TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

La Asociación Mexicana de Robótica e Industria A.C. presenta el XXII Congreso Mexicano de Robótica, primer Congreso Virtual, COMROB 2020, un espacio para compartir el trabajo realizado por nuestros miembros: investigadores y alumnos de licenciatura, maestría y doctorado de Instituciones educativas y centros de investigación nacionales e internacionales.

El Congreso Mexicano de Robótica busca ser un espacio de crítica constructiva de los expertos en el tema en un ambiente de respeto y cordialidad fomentando la creación de redes de colaboración, estamos convencidos que este tipo de eventos contribuyen a la generación de conocimiento y desarrollo tecnológico del país.

Durante el evento se presentaron 38 ponencias estrictamente evaluadas y cuatro conferencias magistrales, se realizaron dos talleres precongreso. El premio Rafael Kelly en su décimo cuarta edición contó con cinco trabajos nominados, durante el congreso se seleccionó el mejor trabajo presentado por un estudiante, evaluado por el comité de expresidentes, presidente y vicepresidente actuales de la Asociación; de la misma manera se hizo entrega del octavo premio AMRob a Tesis que tiene como objetivo reconocer la investigación realizada en instituciones de educación superior nacionales e internacionales.

En esta vigésima segunda edición, agradecemos al Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Tijuana por ser la sede virtual de este evento, quienes a pesar de la pandemia que no nos permitió realizar el congreso de manera presencial nos apoyaron para la realización del congreso de manera virtual, gracias al Dr. Luis N. Coria, presidente del comité organizador, al Director del Instituto Ing. José Guillermo Cárdenas López y a su equipo de trabajo por su disposición, compromiso y esfuerzo para organizar el evento, la memoria electrónica del evento con las presentaciones grabadas estará disponible en https://comrob.tijuana.tecnm.mx/

Agradecemos a nuestros conferencistas magistrales: Dr. Guillermo Valencia Palomo del Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Hermosillo, Dr. Emmanuel Nuño Ortega de la Universidad de Guadalajara, Dr. Ulises Zaldívar Colado de la Universidad Autónoma de Sinaloa y al Dr. Rubén Garrido Moctezuma de CINVESTAV por compartir su conocimiento con nuestros miembros, estamos seguros de que será bien aprovechado.

Reconocemos el trabajo realizado por el presidente de programa el Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela y el comité de revisores, sus evaluaciones y sugerencias realizadas en tiempo y forma enriquecieron los trabajos presentados.

No podemos dejar de mencionar al comité honorífico formado por los expresidentes de la asociación que realizaron el primer congreso el año 1999 y han trabajo intensamente para que lleguemos hoy a la vigésimo segunda edición.

Pero sobre todo gracias a todos los autores porque son ustedes quienes hacen posible este evento.

Dra. Dora Aydee Rodríguez Vega
Presidente de la Asociación Mexicana de Robótica (2017-2020)

XXII CONGRESO MEXICANO DE ROBÓTICA

COMROB 2020

# "Avances en el desarrollo científico de la Robótica en México"

*Memorias del*

## XXII Congreso Mexicano de Robótica 2020
## I Congreso Virtual COMROB 2020

Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana

comrob.tijuana.tecnm.mx

*Tijuana, Baja California, México, 29 al 31 de Octubre de 2020*

**Dra. Dora Aydee Rodríguez Vega**
Presidenta de la AMRob

**Dr. Luis Néstor Coria de los Ríos**
Presidente del Comité Organizador

ISBN: **978-607-98174-8-0**

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# AVANCES EN EL DESARROLLO CIENTÍFICO DE LA ROBÓTICA EN MÉXICO

## Memorias COMRob 2020

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# AVANCES EN EL DESARROLLO CIENTÍFICO DE LA ROBÓTICA EN MÉXICO

## Memorias COMRob 2020

Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Ulises Zaldívar Colado

Iliana Castro Liera

Jesús Alberto Sandoval Galarza

Paul Antonio Valle Trujillo

Luis Néstor Coria de los Ríos

(EDITORES)

Primera Edición: Noviembre 2020



D.R. © UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

Ángel Flores s/n, colonia Centro, Culiacán, 80000 (Sinaloa)

DIRECCIÓN EDITORIAL

D.R. © INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LA PAZ

Blvd. Forjadores de B.S.C. #4720, 23080 La Paz, B.C.S.

SELLO EDITORIAL



ISBN :
978-607-98174-8-0
Hecho en México

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Índice

## *CAPÍTULO 1 Drones*



## *CAPÍTULO 2 Instrumentación, teleoperación y robótica educacional*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## *CAPÍTULO 3 Tópicos especiales*



## *CAPÍTULO 4 Humanoides y drones*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## *CAPÍTULO 5 Visión y navegación autónoma*



## *CAPÍTULO 6 Robótica médica, de asistencia y reabilitación*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## *CAPÍTULO 7 Robótica móvil*



## *CAPÍTULO 8 Control 1*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# *CAPÍTULO 9 Control 2*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 1

## *Drones*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Implementación y análisis de los sistemas de percepción y control de drones autónomos en entornos virtuales 3D usando Gazebo y ROS

Andres Cureño Ramirez
*Departamento de Computación*
*Centro de Investigación de Estudios Avanzados del IPN*
Ciudad de México, México.
andres.cureno@cinvestav.mx

Juan Manuel Ibarra Zannatha
*Departamento de Control Automático*
*Centro de Investigación de Estudios Avanzados del IPN*
Ciudad de México, México.
jibarra@cinvestav.mx

***Resumen*—Se propone una alternativa de bajo costo y de fácil acceso para investigación y desarrollo en drones, en donde se utilizaron frameworks, simuladores, SDK y programas de diseño de código abierto. También se realizaron pruebas tomando como referencia trabajos en control realizados en un dron real y agregando tareas como vuelo en formación. Los resultados muestran la capacidad y el potencial de los recursos utilizados como herramientas educativas y de investigación.**

***Index Terms*—simuladores, drones, ROS, gazebo**

## I. Introducción

### *I-A. Simulación digital*

La simulación digital es una herramienta muy poderosa para el diseño y prueba de sistemas complejos que se viene utilizando casi desde la aparición de las computadoras. La simulación digital es cada vez más utilizada en la medida en que se dispone de las versiones digitales de los modelos matemáticos que describen de manera detallada el comportamiento dinámico de estos sistemas. De ahí la relevancia de contar con métodos numéricos precisos y eficientes. Tres de las partes fundamentales de esta clase de simuladores son: i) el motor que resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), ii) el sistema de visualización que se encarga de generar despliegues gráficos 3D a la manera de mundos virtuales navegables, y iii) las interfaces gráficas (GUI) que permiten la comunicación bilateral entre el operador y el simulador, de modo a tener una interacción eficiente y sencilla con los sistemas simulados.

El campo de aplicación de los simuladores digitales incluye prácticamente todo tipo de actividad profesional, desde sistemas biomédicos, incluyendo los más finos detalles de la biomecánica y de la fisiología humana, hasta los complejos sistemas de navegación espacial, pasando por todos los sistemas electromecánicos de interés para la Robótica y la Mecatrónica. Siendo este último el área de interés de nuestro trabajo.

### *I-B. Simulación de drones autónomos*

Una de las áreas de interés en nuestro laboratorio es el desarrollo de drones autónomos. En particular nos interesa desarrollar los sistemas de percepción visual y el de control que permitan a drones comerciales de pequeño formato volar de manera autónoma, realizar misiones de exploración y rescate, generar mapas 3D del terreno y autolocalizarse visualmente, entre otras tareas de interés. Ya sea por las limitaciones de espacio, por aspectos de seguridad o por las restricciones inherentes a este tipo de dispositivos robóticos como la corta duración de sus baterías, se hace indispensable utilizar simuladores en el desarrollo, prueba y análisis de los sistemas de percepción y control. Las principales características de un simulador para este tipo de aplicaciones son: modelos dinámicos completos y de rápida solución, modelos cinemáticos de cámaras de visión, capacidades de visualización de datos y de visualización de entornos virtuales 3D, comunicación con otros sistemas computacionales, escalabilidad al mundo real, fácil portabilidad de los programas, la capacidad de crear o modificar los entornos y contar con un SDK y diferentes modelos de drones.

### *I-C. Estado del arte*

Se han presentado propuestas a lo largo de los años para simular drones en ROS y Gazebo como *Comprehensive simulation of quadrotor uavs using ros and gazebo* [1] y *A high fidelity simulator for a quadrotor uav using ros and gazebo* [2] en los cuales se muestra la capacidad de tomar en cuenta los modelos dinámicos y de simular sensores como una IMU, un sensor ultrasónico y un LIDAR. El problema que existe con simuladores creados en años pasados es la falta de compatibilidad con las distribuciones actuales de ROS [3]. Aunque existen simuladores como el *hector quadrotor* [4] que han tratado de ir lo actualizando con cada distribución nueva, pero actualmente se encuentra 3 distribuciones atrás de la más actual.

### *I-D. Planteamiento del problema y de la solución propuesta*

Actualmente se dispone de varias opciones de simuladores para realizar este tipo de trabajos de desarrollo entre las que destacan el simulador del fabricante chino de drones DJI [5] y Matlab [6]. Aunque DJI tiene una versión gratuita de su

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

simulador se trata de una versión limitada que no incluye todas sus opciones, mientras que la licencia de Matlab tiene un costo nada despreciable. Esta situación motiva el presente trabajo, esto es, la implementación de un simulador de drones basado en software libre y que esté conforme con ROS (Robot Operating System) que actualmente es un estándar de la robótica.

Así, en este trabajo se propone la utilización de diferentes softwares de código abierto, como una alternativa de bajo costo y de fácil acceso tanto para estudiantes, desarrolladores e investigadores. Que cuente con la capacidad de crear sus propios entornos y que permita implementar y analizar distintos algoritmos o tareas sin la necesidad de contar con el espacio físico o con un dron.

## II. Descripción del Software utilizado

### II-A. Gazebo

Gazebo ofrece la posibilidad de simular de forma precisa y eficiente robots en entornos complejos, tanto interiores como exteriores. Se puede tener acceso a múltiples motores de física de alto rendimiento, también proporciona una representación realista de los entornos, incluyendo iluminación, sombras y texturas de alta calidad. Puede generar datos de sensores, de telémetro láser, cámaras 2D/3D, sensores de estilo Kinect, sensores de contacto, fuerza-torsión y más [7].

### II-B. Parrot-Sphinx

Parrot-Sphinx es una herramienta de simulación pensada inicialmente para cubrir las necesidades de los ingenieros de Parrot que desarrollan software para drones.

El concepto principal es ejecutar el firmware de un dron Parrot en un PC, en un entorno aislado y bien separado del sistema anfitrión [8].

### II-C. ROS

El Sistema Operativo de Robots (ROS) es un framework flexible para escribir software de robots. Es una colección de herramientas, bibliotecas y convenciones que tienen como objetivo simplificar la tarea de crear un comportamiento robótico complejo y robusto a través de una amplia variedad de plataformas robóticas.

### II-D. Bebop Autonomy

Es un controlador de ROS para los drones Parrot Bebop 1.0 y 2.0, basado en el ARDroneSDK3 oficial de Parrot [9]. Este controlador es el que nos permitirá intereactuar con los tópicos del dron, algunos de los datos que se pueden obtener son la odometría visual del dron, la altura, la orientación, la imágen de la cámara y el control de movimiento del dron.

### II-E. Blender

Blender es la suite de creación 3D de código abierto y gratuito. Soporta la totalidad de la creación de tuberías 3D, rigging, animación, simulación, renderizado, composición y seguimiento de movimiento, edición de vídeo y creación de animación 2D [10].

## III. Vision general

Se explican 4 etapas para hacer desarrollo con ROS y Gazebo.

### III-A. Primera Etapa

Es importante conocer algún lenguaje de programación, ROS permite usar una gran variedad de lenguajes de programación, aunque los lenguajes con más documentación son C++ y Python. La mayoría de los libros ponen ejemplos en estos dos lenguajes, pero también se pueden consultar ejemplos de Java dentro de la documentación de ROS.

### III-B. Segunda Etapa

En esta etapa es importante conocer los conceptos básicos de ROS (Nodos, Tópicos, Suscriptores, etc.), ya que estos conceptos solo se aplican en el código del lenguaje de programación seleccionado, solo cambiará la sintaxis de un lenguaje a otro. Es importante conocer cuales son sus aplicaciones y restricciones.

### III-C. Tercera Etapa

En esta etapa se comienzan a aplicar los conceptos y la programación, ya sea en robots reales o para comenzar usar las simulaciones, para el caso de las simulaciones comenzar a crear entornos y pones a prueba los robots.

### III-D. Cuarta Etapa

Esta etapa se puede observar como algo global, siempre esta presente el aprender conceptos de linux, ya sea para solucionar problemas, configurar paquetes o hacer conexiones.

## IV. Esquemas internos

Es importante conocer los archivos internos para poder realizar nuestros modelos y simulaciones dentro de Gazebo. El modelo es la descripción del sistema que se va estudiar y un sistema es una colección de elementos que actúan juntos para lograr un objetivo. Un modelo no tiene que ser una descripción de un sistema de la vida real, pero sí tiene que ser consistente. La simulación es solo la implementación de un modelo y las simulaciones digitales se pueden dividr en dos grupos: experimental y experiencial. Las simulaciones experimentales buscan resolver alguna pregunta, mientras que las experienciales intentan proporcionar un entorno con el que uno o más usuarios pueden interactuar [11].

Para utilizar el simulador parrot-sphinx es necesario activar el firmware, una vez el firmware está listo, se inicia sphinx, el cuál cargara por defecto un dron y un mundo vacío en Gazebo. Una vez listo es necesario arrancar el controlador Bebop Autonomy y revisar que todos los tópicos estén funcionando. Una vez terminado ya es posible comenzar a utilizar los nodos para controlar el dron. En la Figura 1 podemos observar un esquema general, en donde Gazebo se utiliza en gran medida para simular el entorno físico y visual del dron y la conexión con ROS.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

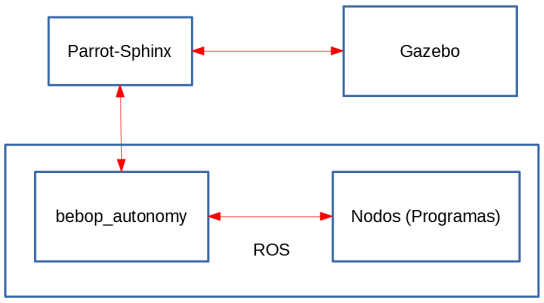



Figura 1. Esquema general del funcionamiento de del controlador Bebop Autonomy, el simulador Parrot-Sphinx y ROS

## V. Creación de entornos

Para crear los mundos en Gazebo se pueden utilizar las herramientas de edición de modelos con las que ya cuenta o se pueden importar archivos de otros programas, para estas pruebas se utilizó Blender para que los modelos pudieran tener texturas, imágenes o formas complejas. En la Figura 2 se muestra un entorno creado con ventanas y con una arena de vuelo basado en la competición de Drones Autónomos del Torneo Mexicano Robótica [12].

El tipo de archivo que se utlizó fue SDF que cuenta con los siguientes metadatos: **Links:** Un link contiene todas las propiedades físicas de un cuerpo del modelo. **Collision:** Un elemento de colisión encapsula la geometría que es usada para la comprobación de la colisión. **Visual:** Un elemento visual se utiliza para visualizar partes de un link. **Inertial:** El elemento inercial describe las propiedades dinámicas del link. **Sensor:** Un sensor recoge datos del mundo para usarlos en plugins. **Light:** Un elemento de luz describe una fuente de luz conectada a un link. **Joints:** Una articulación conecta dos eslabones. Se establece una relación padre e hijo junto con otros parámetros como el eje de rotación y los límites de la articulación. **Plugins:** Un plugin es una biblioteca compartida creada por un tercero para controlar un modelo [13].

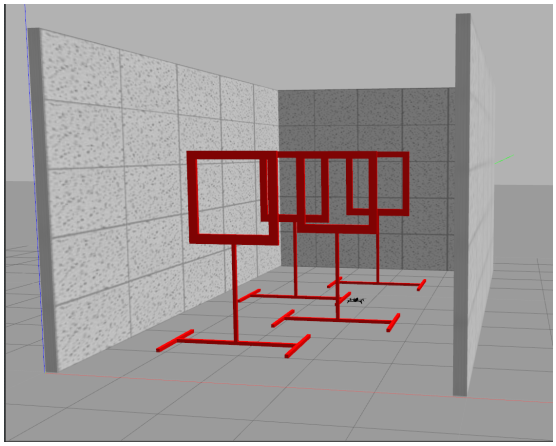


Figura 2. Mundo de prueba con ventanas realizadas en Blender.

## VI. Pruebas y simulaciones

Para la parte dinámica se utilizó el modelo basado en PVTOL (Planar Vertical Take Off and Landing) [14] :

$$m\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix} = -mg\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\cos(\theta)\\ \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$J\ddot{\eta} = -C(\eta,\dot{\eta}) + \tau \tag{2}$$

Las ecuaciones de control son las propuestas en el trabajo [15] pero sin el vector de perturbaciones.

$$U_\psi = K_{p\psi}(\psi_d - \psi_a) + K_{d\psi}(\dot{\psi_a}) \tag{3}$$

$$U_z = K_{pz}(z_d - z_a) + K_{dz}(\dot{z_a}) \tag{4}$$

$$U_y = \frac{K_{py}(y_d - y_a) + K_{dy}(\dot{y_a})}{U_z + mg} \tag{5}$$

$$U_x = \frac{K_{px}(x_d - x_a) + K_{dx}(\dot{x_a})}{U_z + mg} \tag{6}$$

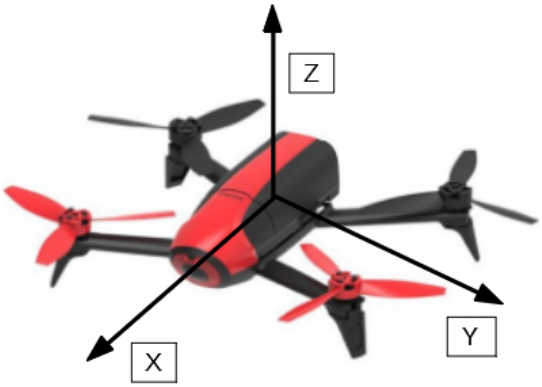



Figura 3. Bebop Drone 2.

En la Figura 3 se muestran los ejes del dron dentro del simulador. Para la obtención de los datos se utilizaron los siguientes tópicos: **odom.x** y **odom.y** para la posición lineal en X y en Y del dron, que están dados en metros. Para la orientación en el eje Z se usó el tópico **bebop/attitude**, los datos del tópico están dados en radianes y para la altura el tópico **bebop/height**, los datos del tópico están dados en metros.

El controlador de *bebop autonomy* solo permite enviar 4 velocidades $U_x$, $U_y$, $U_z$, $U_\psi$ al dron para controlar su movimiento y las cuales solo pueden tomar valores entre $(-1, 1)$ [16].

En la Figura 4 se puede observar un diagrama de flujo de la implementación de las Ecuaciones 3, 4, 5 y 6, de donde se conoce la masa del dron y se pueden calcular las ganancias. Cabe resaltar que dependiendo de la prueba a realizar se

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

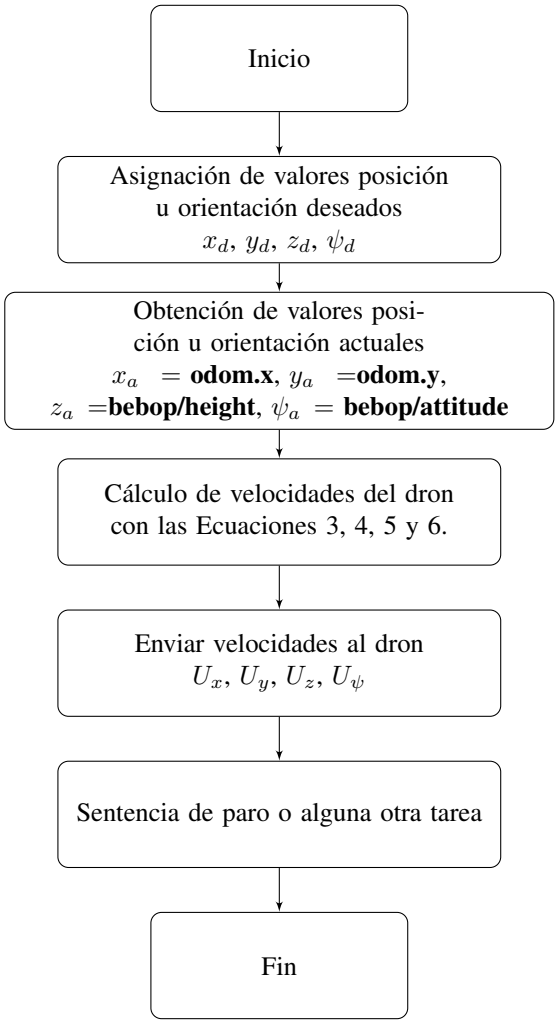



Figura 4. Diagrama de flujo de la implementación de las Ecuaciones 3, 4, 5 y 6.

asignan los valores deseados y la sentencia de paro o alguna otra tarea.

Se realizaron las pruebas en 3 computadoras con diferentes especificaciones: **Computdora 1:** Core i3 2.4 Ghz, 4gb de RAM, 240gb SSD, Intel HD Graphics. **Computadora 2:** A10-8700P 1.8 Ghz, 8gb de RAM, 1 TB HDD, AMD Radeon R6. **Computadora 3:** Ryzen 5 2400, 16gb de RAM, 1 TB HDD, GTX 1660.

En la computadora 1 el simulador se cerraba o se detenía repentinamente, en la computadora 2 el simulador tardaba en cargar los mundos y se podía utilizar la cámara virtual del dron pero con baja resolución y en la computadora 3 no se presentó ningún problema y fue posible utilizar la cámara del dron con alta resolución. Los resultados mostrados en este documento fueron realizados en la computadora 3.

### *VI-A. Prueba 1: 4 posiciones con control de orientación*

Se introdujo una matriz como se muestra en la Ecuación 7 para indicar 4 posiciones, en donde la primer columna es la posición deseada en X, la segunda columna es la posición deseada en Y, la tercer columna es la posición deseada en Z y la cuarta columna es la orientación deseada.

Se puede apreciar la representación gráfica en la Figura 5 siendo los puntos azules las posiciones deseadas, la altura se mantiene constante y existen cambios de orientación por lo que es importante tomar en cuenta la cinemática del dron.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 4 & 0 & 1.5 & 90 \\ 4 & 4 & 1.5 & -90 \\ 0 & 4 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se puede apreciar en la Figura 6 que en las gráficas del control en el eje X y Y existen pequeños sobretiros pero recupera bien la posición deseada. En la Figura 7 también se puede observar que la altura se mantuvo constante y que se cumplieron las posiciones deseadas. Se puede observar un video de esta prueba en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=-rgIAcAo4yk

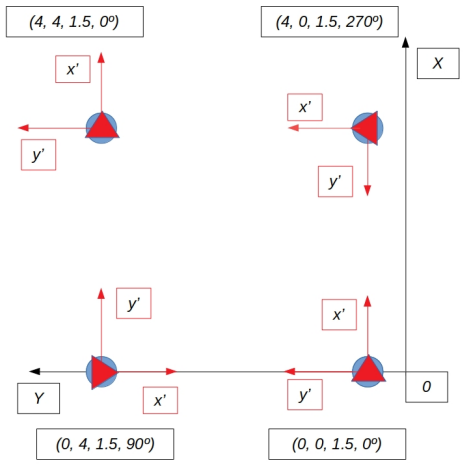



Figura 5. Diagrama de la prueba 1.

### *VI-B. Prueba 2: trayectorias circulares*

Para las trayectorias circular solo se indicó que se requería un circulo de 2 metros de radio, por lo que se estableció un centro $(h, k)$ y la posición del dron sería dada por las coordenadas $(x, y)$ obtenidas de su odometría. El ajuste se haría sobre el eje Y del dron tomando como referencia los 2 metros de radio y la distancia actual al centro sería dada por $r$ obtenida de la Ecuación 8.

$$r = \sqrt{(h-x)^2 + (k-y)^2} \tag{8}$$

Para saber la orientación deseada se toma en cuenta que el eje X del dron debe ser perpendicular a la orientación del

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

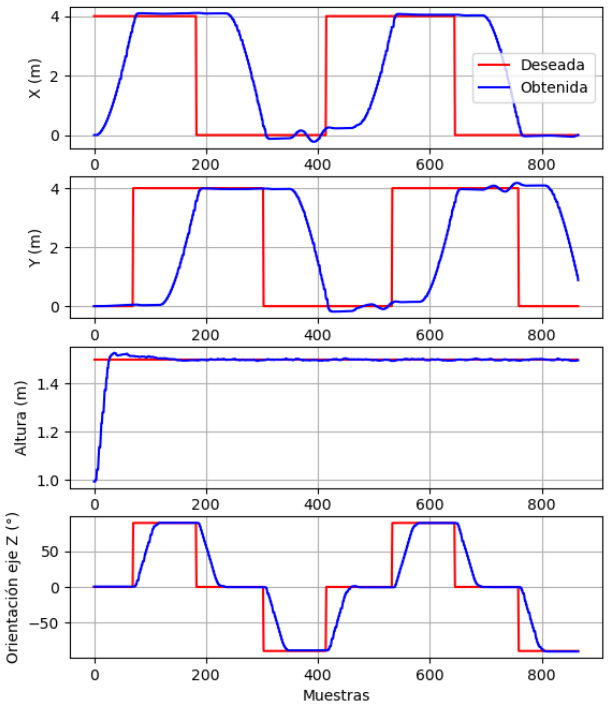



Figura 6. Resultados de la prueba 1.

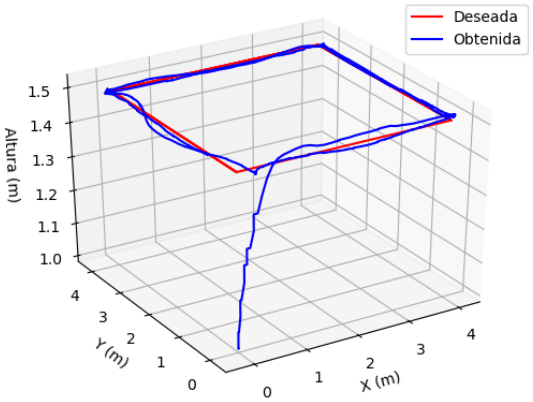



Figura 7. Resultados de la prueba 1 en X-Y-Z.

radio, por lo que se utilizó la Ecuación 9 donde $\alpha$ será la referencia para la orientación del dron, $x$ la posición del dron obtenida con su odometría y $r$ es el radio obtenido en la Ecuación 8.

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{r} \tag{9}$$

Se pueden observar los resultados en la Figura 8 en donde es posible ver que el control de orientación es estable, en el caso del error entre el radio deseado y el radio obtenido no es mayor a $0.08m$ y que la altura se mantiene constante. En la Figura 9 se aprecia la trayectoria circular generada y que cuenta con un radio de $2m$. Se puede observar un video esta prueba en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=4Xga5KE87fE

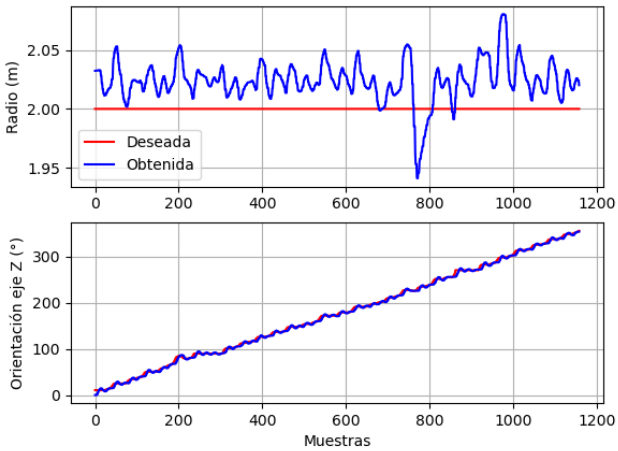



Figura 8. Resultados prueba 2.

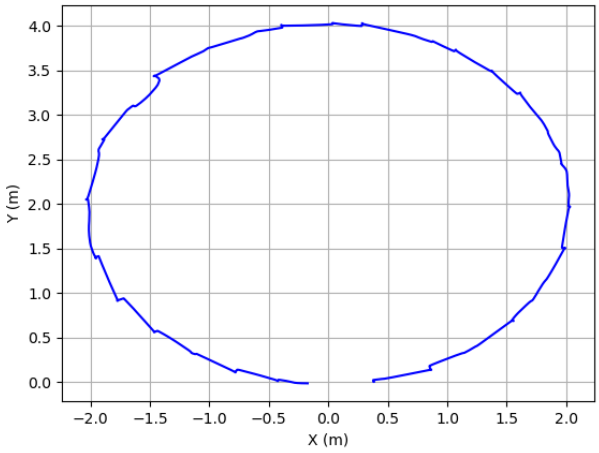



Figura 9. Trayectoria circular.

### *VI-C. Prueba 3: vuelo en formación*

Se creó un Nodo que recibe la información de cada uno de los drones por separado y la información se procesa. Dentro

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

del nodo se delimita un espacio de trabajo para los drones y de cada uno de ellos se recibe la información del tópico de odometría, por lo que sus coordenadas locales se pasan a coordenadas globales y sumado a esto se puede saber si el dron está dentro del espacio de trabajo establecido y mantiene un distancia segura. La distancia que existe entre los drones se calcula con la Ecuación 10, para verificar que se encuentran a una distancia mayor a un metro y en caso de que no cumplan con esta restricción se detienen y se reacomodan.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2} \qquad (10)$$

Existe un nodo por cada dron el cuál se encarga de enviar su estado o si ya cumplió la tarea designada al nodo global que controla las tareas a realizar. Se tomó como líder al dron 1 y como seguidor al dron 2, podemos observar en la Figura 10 el movimiento en X y en Z, la referencia dada en rojo y la respuesta en azul y en la figura 11 se puede apreciar que la respuesta del dron 1 se vuelve la referencia para el dron 2 en X y en Z.

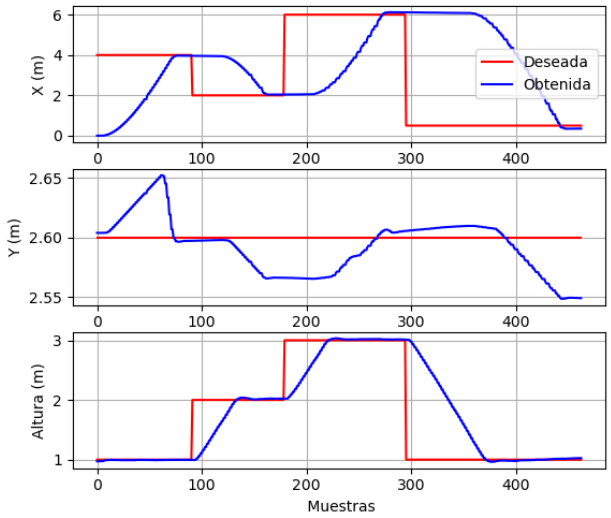



Figura 10. Resultados dron 1.

En el siguiente enlace se puede observar un vídeo de la prueba: https://www.youtube.com/watch?v=x6jkbYHnKEE .

## VII. Conclusiones

Se demuestra la capacidad del simulador Gazebo y Parrot-Sphinx para realizar diferentes pruebas, así como sus aplicaciones con fines educativos para robótica móvil, extracción y procesamiento de datos, programación y diseño en computadora. Es una buena alternativa cuando no se puede tener acceso a un robot físico o para entrenamiento antes de realizar las pruebas en entornos reales. Es importante resaltar que la curva de aprendizaje del software antes mencionado puede ser complicada si no cuenta con conocimientos previos como se explica en las diferentes etapas. Por último el buen

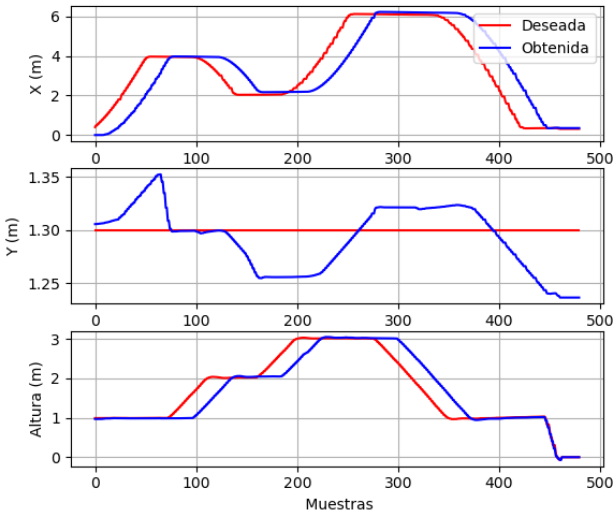



Figura 11. Resultados dron 2.

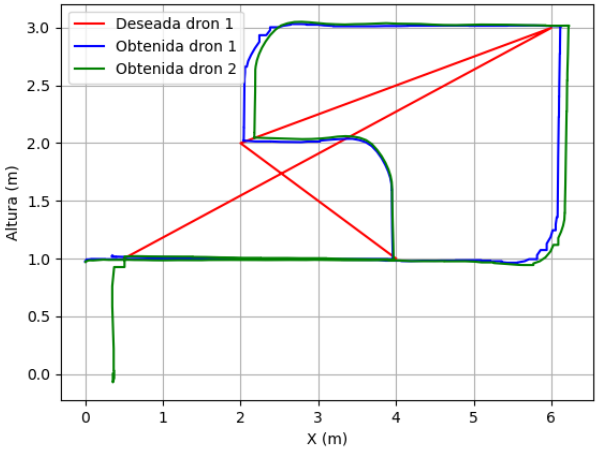



Figura 12. Trayectoria X-Z drones 1 y 2.

funcionamiento del simulador dependerá del hardware de la computadora, por eso se dejan como referencia algunas de las características de las computadoras que se utilizaron.

## VIII. Trabajo a futuro

Crear un repositorio público con diferentes entornos para realizar diferentes pruebas basadas en competencias internacionales como IMAV o nacionales como el Torneo Mexicano de Robótica, y diseñar un curso en donde se pueda aprender a utilizar el simulador o para crear sus propios entornos y comenzar a hacer pruebas usando visión artificial dentro del simulador y ver su rendimiento.

## Referencias

[1] J. Meyer, A. Sendobry, S. Kohlbrecher, U. Klingauf, and O. Von Stryk, “Comprehensive simulation of quadrotor uavs using ros and gazebo,” in

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

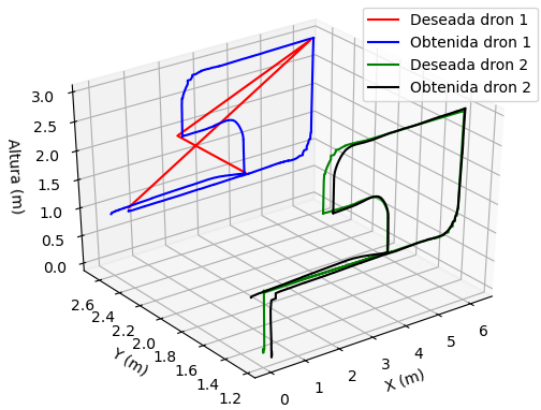



Figura 13. Trayectoria X-Y-Z dron 1 y 2.

*International conference on simulation, modeling, and programming for autonomous robots*. Springer, 2012, pp. 400–411.

[2] M. Zhang, H. Qin, M. Lan, J. Lin, S. Wang, K. Liu, F. Lin, and B. M. Chen, "A high fidelity simulator for a quadrotor uav using ros and gazebo," in *IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE, 2015, pp. 002 846–002 851.

[3] ROS, "Distributions," http://wiki.ros.org/Distributions, 2020.

[4] ——, "hector$_quadrotor,'' http://wiki.ros.org/hector_quadrotor$, 2020.

[5] DJI, "Dji flight simulator," https://www.dji.com/mx/simulator/infospecs, 2020.

[6] G. D. Andrade, "Programming drones with simulink," https://www.mathworks.com/videos/programming-drones-with-simulink-1513024653640.html, 2017.

[7] Gazebo, "Gazebo," urlhttp://gazebosim.org/, 1999.

[8] Parrot, "What is parrot sphinx," https://developer.parrot.com/, 2020.

[9] A. Lab, "bebop autonomy - ros driver for parrot bebop drone (quadrocopter) 1.0 2.0," https://bebop-autonomy.readthedocs.io/en/latest/, 2015,.

[10] Blender, "About," https://www.blender.org/about/, 2020.

[11] K. B. J. Parker, *The Guide to Computer Simulations and Games*, paperback ed. John Wiley Sons, 2011.

[12] F.-M. de Robótica, "Torneo mexicano de robótica - drones autónomos," https://www.femexrobotica.org/tmr2020/drones-autonomos/, 2020.

[13] Gazebo, "Make a model," http://gazebosim.org/tutorials, 2020.

[14] P. C. Garcia, R. Lozano, and A. E. Dzul, *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer Science & Business Media, 2006.

[15] S. M. Orozco-Soto, J. M. Ibarra-Zannatha, A. J. Malo-Tamayo, and A. Cureño-Ramírez, "Active disturbance rejection control for uav pose regulation," in *2017 14th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE, 2017, pp. 1–6.

[16] A. Lab, "Sending commands to bebop - piloting," https://bebop-autonomy.readthedocs.io/en/latest/piloting.html, 2020.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Comparación de controladores por modos deslizantes aplicados al control en altitud de un UAV de ala fija

T. Espinoza-Fraire[1], A. Saenz-Esqueda[2], C. Saenz-Esqueda[3]

***Abstract*— En este trabajo se presenta la comparación de diferentes controladores basados en la teoría por modos deslizantes. Los controladores obtenidos con la mencionada técnica de control no lineal, se aplican al control en altitud de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija sometido a perturbaciones por ráfagas de viento, con lo anterior se desea saber que controlador basado en los métodos por modos deslizantes presenta un mejor desempeño. Los resultados obtenidos se presentan en simulaciones utilizando el programa MatLab.**

## I. Introducción

El mantener una altura deseada de cualquier vehículo aéreo tripulado y no tripulado, no es una tarea fácil, incluso para un piloto experimentado, el cual tiene que estar constantemente observando los indicadores del tablero para conocer si se esta manteniendo la ruta y altura deseada. la mayoría de las aeronaves comerciales cuentan con un piloto automático, una de las tareas de este piloto automático es precisamente mantener una altura deseada que es definida por el piloto.

Es por ello que es necesario el estudio de controladores que ayuden a tener el mejor desempeño durante esta tarea. Para un vehículo aéreo no tripulado de ala fija o como es conocido en el idioma inglés fixed-UAV es también importante el tener un controlador de altura que le permita llevar a cabo un vuelo a una altura deseable de forma autónoma.

Existen otros trabajos en los cuales muestran alguna metodología para poder controlar la altura de un UAV de ala fija, uno de ellos es el que se muestra en [1], en el cual, se llevo a cabo, la comparación de dos controladores PID, uno de ellos es un controlador PID adaptable, en este controlador se utiliza la lógica difusa como mecanismo de ajuste de las ganancias del controlador, los resultados obtenidos en [1] son presentados en simulación por computadora.

En [2] se utiliza un controlador por $H_\infty$ para el control de la dinámica lateral de un pequeño vehículo aéreo no tripulado de ala fija, pero para el control de altura del UAV utilizaron un controlador clásico PID.

Por otra parte, en [3] se presenta una comparación de dos controladores para la altitud de un UAV de ala fija, los controladores que están comparando en [3] son el PID y otro controlador por compensación de fase, utilizando un modelo matemático no lineal que al final lo linealizan llevando al UAV a un punto de operación estable. Se han realizado pruebas con un controlador PID con filtro de Kalman bajo perturbaciones, con el objetivo de obtener un buen control sobre los ángulos de Euler que están presentes en un UAV de ala fija, ver [4].

Cabe mencionar que los resultados obtenidos en [2], [3] y [4] son presentados en simulaciones.

En este trabajo se realiza la comparación de cinco controladores basados en la metodología por modos deslizantes, estos controladores se aplican para el control en altura de un UAV (Unmanned Aerial Vehicle) de ala fija, como se menciona en la parte superior de la introducción de este trabajo, el control de la altitud de un UAV de la fija es muy importante por diversas razones, es por ello que al estar sujeto o bajo perturbaciones el UAV de ala fija, es necesario un controlador robusto ante estas perturbaciones, y se tiene el conocimiento que los controladores por modos deslizantes son una buena opción para tratar con perturbaciones en los sistemas de control automático [8], [9], [5].

Así, los controladores a comparar son: modos deslizantes de primer orden (SMC), *Twisting*, modos deslizantes quasi continuos (QCSM), *Super Twisting* (ST) y modos deslizantes de alto orden anidado (HOSM). En este trabajo se presentan resultados obtenidos en simulación.

La organización del artículo es la siguiente: la sección II muestra las ecuaciones que definen el modelo dinámico para la dinámica longitudinal del vehículo aéreo no tripulado de ala fija; la sección III trata sobre las leyes de control desarrolladas para el control en altitud del UAV de ala fija. En la sección IV se muestran los resultados obtenidos en simulación. Finalmente, en la sección V se tienen las conclusiones y el trabajo a futuro.

## II. Modelo dinámico

En esta sección se presenta el modelo longitudinal del vehículo aéreo no tripulado para llevar a cabo el control de la altitud del vehículo aéreo no tripulado de ala fija.

Cabe mencionar que el modelo aerodinámico que se presenta para la dinámica longitudinal del vehículo aéreo no tripulado, se obtuvo considerando que no existe alguna parte flexible sobre éste, y además se considera la tierra como plana , lo anterior debido a que el vehículo aéreo no tripulado sólo recorrerá distancias cortas, es por ello que en el modelo matemático de dicha aeronave no tripulada, no se considera la curvatura terrestre.

[1]T. Espinoza-Fraire Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura Universidad Juárez del Estado de Durango Gómez Palacio, Durango, México atespinoza@ujed.mx

[2] A. Saenz-Esqueda Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura Universidad Juárez del Estado de Durango Gómez Palacio, Durango, México jsaenz@ujed.mx

[3] C. Saenz-Esqueda Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura Universidad Juárez del Estado de Durango Gómez Palacio, Durango, México jsaenz@ujed.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Entonces, la obtención del modelo es a partir de la segunda ley de movimiento de Newton. A continuación, se presenta el modelo longitudinal que define al vehículo aéreo no tripulado de ala fija [7]:

$$\dot{V} = \frac{1}{m}(-D + T\cos(\alpha) - mg\sin(\gamma)) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{mV}(L + T\sin(\alpha) - mg\sin(\gamma)) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3)$$

$$\dot{q} = M_q q + M_{\delta_e}\delta_e \quad (4)$$

$$\dot{h} = V\sin(\theta) \quad (5)$$

donde $V$ es la velocidad de vuelo, $\alpha$ describe el ángulo de ataque, $\gamma$ representa el ángulo de incidencia del viento y $\theta$ denota el ángulo de cabeceo. Además, $q$ es la velocidad angular de cabeceo (con respecto al eje $y$ en el cuerpo del vehículo aéreo no tripulado de ala fija), $T$ denota la fuerza de empuje del motor, $h$ es la altura de la aeronave no tripulada y $\delta_e$ representa la desviación de la superficie de control, conocida en aerodinámica como elevador [6], [7].

Los efectos aerodinámicos en el vehículo aéreo son obtenidos por la fuerza de elevación $L$ y la fuerza de oposición al movimiento $D$. La masa total del avión esta dada por $m$, $g$ es la constante gravitacional, $I_{yy}$ describe momento de inercia en cabeceo.

El valor del ángulo de ataque es obtenido utilizando la siguiente relación[7]:

$$\alpha = \theta - \gamma \quad (6)$$

En aerodinámica, $M_q$ y $M_{\delta_e}$ son las derivadas de estabilidad implícitas en el movimiento de cabeceo. La fuerza de elevación $L$, la fuerza $D$ son definidas como [6], [7]:

$$L = \bar{q}SC_L \quad (7)$$

$$D = \bar{q}SC_D \quad (8)$$

donde $\bar{q}$ denota la presión aerodinámica. $S$ representa el área del ala. $C_L$ y $C_D$ son los coeficientes aerodinámicos para las fuerzas de sustentación y de oposición, respectivamente [7].

Las derivadas de estabilidad aerodinámica son definidas por:

$$M_q = \frac{\rho S V \bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{m_q}$$

$$M_{\delta_e} = \frac{\rho V^2 S \bar{c}}{2I_{yy}} C_{m_{\delta_e}}$$

donde:

$\rho$: Densidad del aire (1.05 kg/m$^3$).
$S$: Área del ala (0.09 $m^2$).
$\bar{c}$: Respuesta estándar de la cuerda (0.14 $m$).
$I_{yy}$: Momento de inercia en cabeceo (0.17 $kg \cdot m^2$).
$C_{m_q}$: Coeficiente adimensional para el movimiento longitudinal, obtenido de forma experimental (-50).
$C_{m_{\delta_e}}$: Coeficiente adimensional para el movimiento del elevador, obtenido de forma experimental (0.25).

La obtención del momento de inercia $I_{yy}$, se calculó con la realización de la plataforma con el programa *Solidworks* con las medidas de la plataforma a controlar, el modelo desarrollado en *Solidworks* se muestra en la Figura 2. La plataforma a controlar es la mostrada en la Figura 3.

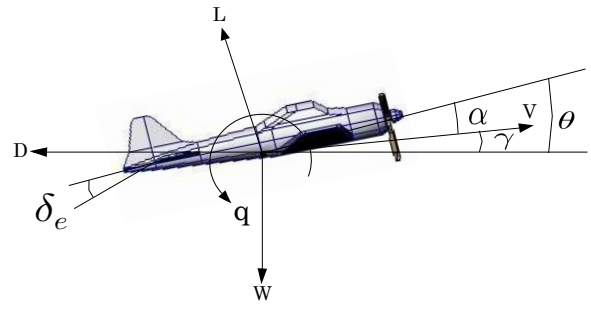



Fig. 1. Movimiento de cabeceo

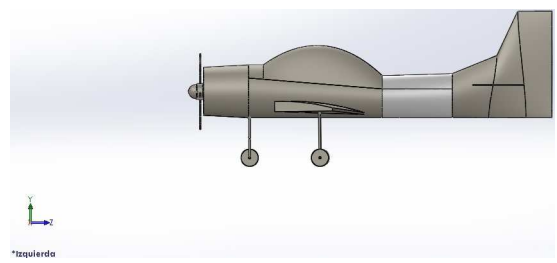


Fig. 2. Modelo en *Solidworks* para obtención del momento de inercia $I_{yy}$


Fig. 3. Plataforma a controlar

## III. Diseño del controlador

Con el objetivo de diseñar diferentes técnicas de control basados en modos deslizantes para el control en altura de un UAV de ala fija, se han considerado las ecuaciones (3)-(5), esto es debido a que la ecuación(1) representa la velocidad de la aeronave no tripulada, pero para las simulaciones realizadas en este trabajo se consideró una velocidad de vuelo constante, y la ecuación (2) es el ángulo generado por la incidencia del viento y en este trabajo los controladores están diseñado sobre el solido (el cuerpo del vehículo aéreo no tripulado).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Entonces, el error de altitud esta definido como:

$$\tilde{e}_h = h_d - h \tag{9}$$

donde $h_d$ es la altura deseada y $h$ es la altura actual a la que se encuentra el vehículo aéreo no tripulado.

La altura deseada es alcanzada controlando el ángulo de cabeceo de la aeronave no tripulada, por lo tanto, se define un error para este ángulo como:

$$\tilde{e}_\theta = \theta_d - \theta(t) \tag{10}$$

donde $\theta_d = \arctan(\tilde{e}_h/\varsigma)$ es el ángulo de cabeceo deseado, y $\varsigma$ denota la longitud desde el centro de masa del vehículo aéreo hasta la nariz del mismo.

El controlador por modos deslizantes (SMC) está definido como:

$$\delta_e = \frac{-M_q q - k_1 \tilde{e}_\theta - v}{M_{\delta_e}} \tag{11}$$

donde $k_1$ es una ganancia definida positiva, $v = \beta_1 \operatorname{sign}(\sigma)$ con $\beta_1 > 0$. La superficie deslizante esta definida como:

$$\sigma = q - k_1 e_\theta \tag{12}$$

La superficie deslizante (12), es utilizada para los otros controladores que se presentan es este trabajo. A continuación, se define el controlador Twisting para el control en altitud del UAV de ala fija:

$$\delta_e = \frac{-M_q q - k_1 \tilde{e}_\theta - (\beta_1 \operatorname{sign}(\sigma) + \beta_2 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}))}{M_{\delta_e}} \tag{13}$$

con $\beta_1, \beta_2 > 0$. Enseguida, se presenta el controlador por modos deslizantes quasi-continuo o como es conocido en el idioma inglés como *Quasi-Continuos Sliding Mode* (QCSM):

$$\delta_e = \frac{-M_q q - k_1 \tilde{e}_\theta - \alpha_1 \frac{\dot{\sigma} + \beta_1 |\sigma|^{1/2} \operatorname{sign}(\sigma)}{|\dot{\sigma}| + \beta_1 |\sigma|^{1/2}}}{M_{\delta_e}} \tag{14}$$

El controlador super *twisting* para el control en altitud del UAV de la fija esta definido como:

$$\delta_e = \frac{-M_q q - k_1 \tilde{e}_\theta - \lambda |\sigma|^{1/2} \operatorname{sign}(\sigma) + u}{M_{\delta_e}} \tag{15}$$

donde $\lambda > 0$ y $u$ es obtenida de:

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & |u| > U_m \\ -\alpha_1 sign(\sigma) & |u| \leq U_m \end{cases}$$

siendo $\alpha_1$ y $U_m$ una constante definida positiva. Finalmente, el último controlador que será comparado con los otros controladores mencionados anteriormente, es el control por modos deslizantes de alto orden anidado o como se conoce por sus siglas en el idioma inglés HOSM (High Order Sliding Mode), así, el controlador HOSM esta definido como:

$$\begin{aligned} \delta_e &= -M_q q - k_1 \tilde{e}_\theta - \alpha_1 \operatorname{sign}((\ddot{\sigma} + 2|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{1/6} \\ &\quad \times \operatorname{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3}) \operatorname{sign}(\sigma))/M_{\delta_e} \end{aligned} \tag{16}$$

Para el diseño de los controladores (13), (14), (15), y (16) es necesario un diferenciador robusto de segundo orden [9], que está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = v_0 &= -\lambda_0 |x_0 - \sigma|^{2/3} \operatorname{sign}(x_0 - \sigma) + x_1 \\ \dot{x}_1 = v_1 &= -\lambda_1 |x_1 - v_0|^{1/2} \operatorname{sign}(x_1 - v_0) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda_2 \operatorname{sign} |x_2 - v_1| \end{aligned}$$

donde $x_0$, $x_1$ y $x_2$ son estimaciones en tiempo real de $\sigma$, $\dot{\sigma}$ y $\ddot{\sigma}$. Los valores de $\lambda_0$, $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son ganancias definidas positivas.

## IV. Resultados en simulación

Para describir los resultados obtenidos con las diferentes formulaciones de la metodología por modos deslizantes, se utilizara la norma $\mathscr{L}_2$ para conocer que controlador muestra un menor error al alcanzar la altura deseada por el avión no tripulado [8]. Así, la norma $\mathscr{L}_2$ para el error está definida como:

$$\mathscr{L}_2[e_h] = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \|e_h\|^2 dt} \tag{17}$$

La norma $\mathscr{L}_2$ será utilizada nuevamente para el análisis del esfuerzo de los controladores y obtener que metodología por modos deslizantes genera mayor esfuerzo de control para alcanzar la altura deseada por el vehículo aéreo no tripulado, y esta definida por:

$$\mathscr{L}_2[\delta_e] = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \|\delta_e\|^2 dt} \tag{18}$$

donde $T$ es el tiempo final y $t_0$ es el tiempo inicial, con el uso de las normas (17) y (18) se obtiene la Tabla I.

TABLE I
NORMA $\mathscr{L}_2$ PARA LOS ERRORES Y ESFUERZOS DEL CONTROLADOR EN ALTURA

| Método | Altura | |
|---|---|---|
| | $\mathscr{L}_2[e_h](mts)$ | $\mathscr{L}_2[\delta_e](grados)$ |
| SMC | 0.0713 | 9.3770 |
| Twisting | 0.0358 | 12.6641 |
| QCSM | 0.0840 | 22.5725 |
| S. Twisting | 0.0461 | 20.5470 |
| HOSM | 0.0691 | 9.0841 |

Los resultados en simulación presentados en la Figura 4 están sujetos a perturbaciones por ráfagas de viento.

Basados en los resultados obtenidos en la Tabla I, se puede apreciar que el controlador por la metodología de *Twisting* presentó un menor error que los otros métodos que se están comparando en este trabajo, pero se puede apreciar en la Figura 5 que el controlador de modos deslizantes por la metodología de *Twisting* presenta el efecto *chattering*.

El controlador que presentó mayor error en altura fue el modos deslizantes quasi continuo, presentó un efecto *chattering* en magnitud menor que el basado en *Twisting* y se aprecia que tiene una menor frecuencia del efecto *chattering*, ver la Figura 6. Además, que el el modos deslizantes quasi continuo, presentó una acción de control mayor que los otros

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

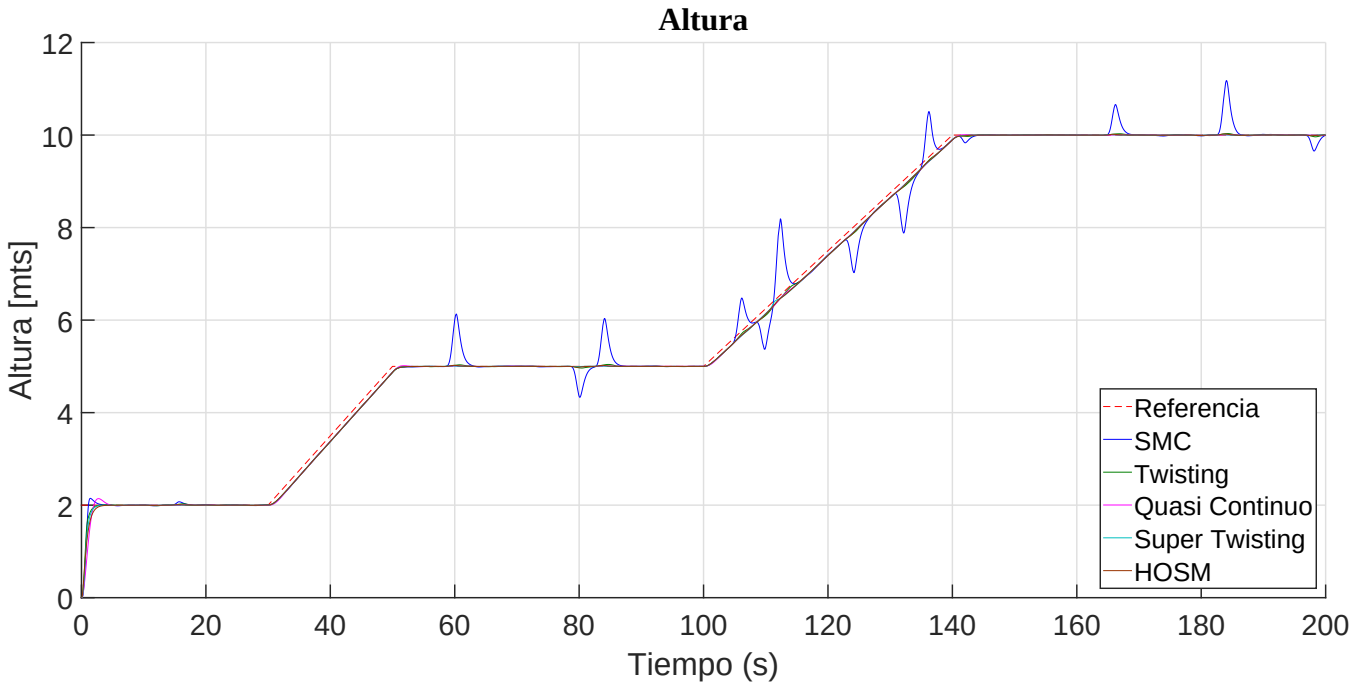



Fig. 4. Respuesta del UAV de ala fija sujeto a perturbaciones en diferentes alturas con los controladores por modos deslizantes

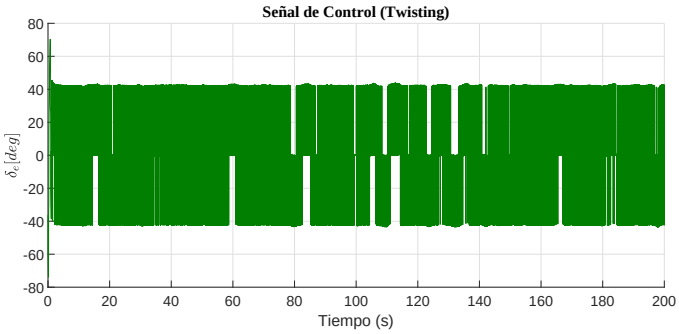



Fig. 5. Respuesta del controlador por metodología *Twisting*

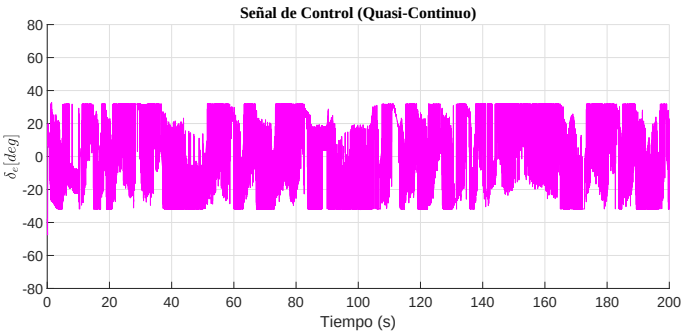



Fig. 6. Respuesta del controlador por metodología quasi continuo

métodos por modos deslizantes analizados en este trabajo (ver Tabla I).

El controlador con el que se obtuvo una disminución del efecto *chattering* y que presentó menos esfuerzo del controlador para alcanzar la altura deseada fue el modos

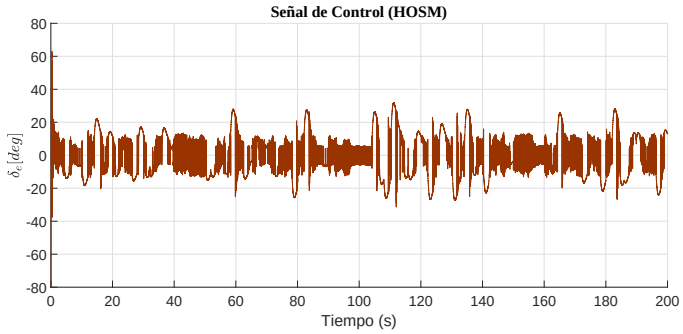



Fig. 7. Respuesta del controlador por modos deslizantes de alto orden anidado

deslizantes de alto orden anidado (HOSM), ver la Figura 7 y presenta un buen desempeño sometido a perturbaciones por ráfagas de viento, ver la Figura 4.

El controlador que no presentó un buen desempeño bajo perturbaciones por ráfagas de viento, fue el controlador por modos deslizantes de primer orden, lo anterior se puede comprobar en la Figura 4. Se aprecia que trata de mantenerse sobre las alturas que se desean que se mantenga el vehículo aéreo no tripulado, pero es muy notorio, que ante las perturbaciones no se obtuvo un buen resultado con el SMC de primer orden. En la Figura 8 se presenta el esfuerzo de control generado por el controlador por modos deslizantes de primer orden.

Por su parte el controlador basado en *Super-Twisting*, presentó un buen desempeño ante las ráfagas de viento, pero este controlador basados en los resultados obtenidos en la Tabla I esta por de bajo del controlador por mo-

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

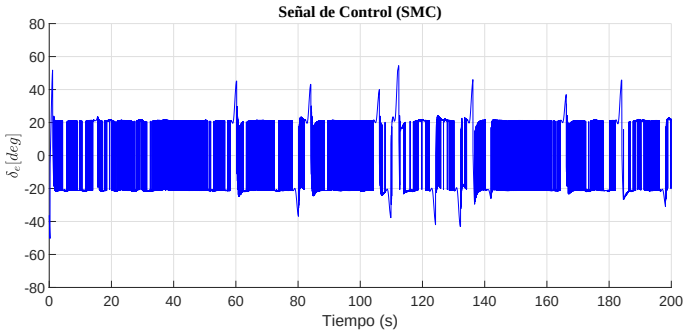



Fig. 8. Respuesta del controlador por modos deslizantes de primer orden

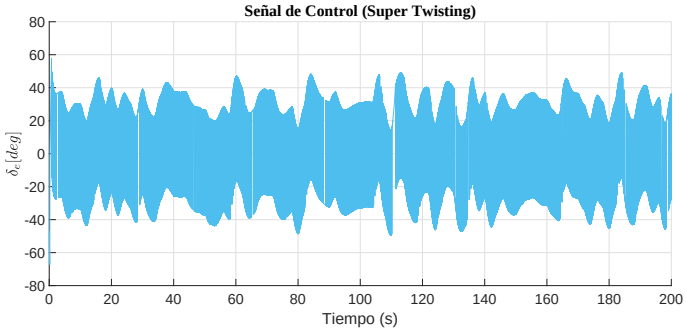



Fig. 9. Respuesta del controlador por *Super-Twisting*

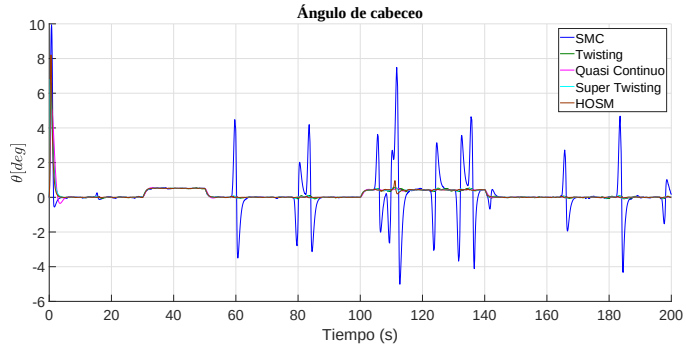



Fig. 10. Respuesta del ángulo de cabeceo

dos deslizantes quasi continuo en aplicar un esfuerzo de control mayor en comparación con los otros controladores por modos deslizantes de primer orden (SMC), *Twisting* y modos deslizantes de alto orden (HOSM), en la Figura 9 se presenta el esfuerzo del controlador basado en *Super-Twisting*. En el error de altura, el controlador basado en *Super-Twisting* presenta un error menor que los métodos basadas en modos deslizantes de primer orden (SMC), modos deslizantes quasi continuo y modos deslizantes de alto orden (HOSM) anidado.

En la Figura 10 se presenta el movimiento del ángulo de cabeceo durante todo el tiempo que el vehículo aéreo no tripulado llegando a las referencias deseadas. Finalmente la Figura 11 muestra las perturbaciones utilizadas en los resultados obtenidos en este trabajo.

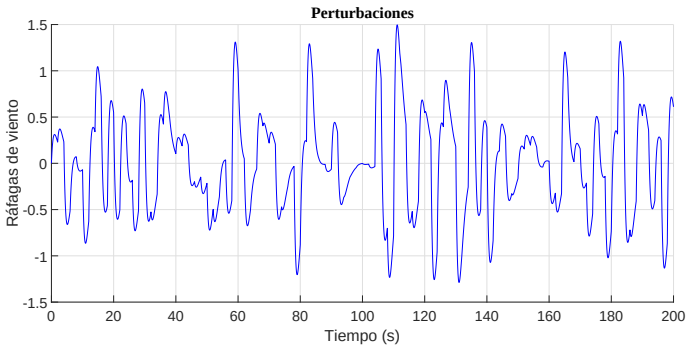



Fig. 11. Perturbaciónes por ráfagas de viento

## V. Conclusiones

En este trabajo se llevo a cabo, el análisis de diversos métodos por modos deslizantes para el control en altitud de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija.

El controlador que no obtuvo un buen desempeño fue el basado en modos deslizantes de primer orden, debido a que sujeto a perturbaciones por ráfagas de viento, se aprecia en las simulaciones realizadas que estaba fuera de la altura deseada en repetidas ocasiones, siendo lo anterior un problema grave al ser un vehículo que se encuentra en vuelo y que pudiera estrellarse si existiese un objeto por debajo de las alturas que se desea que se mantenga.

basados en el error el controlador por la metodología *twisting* presento un menor error que las metodologías por modos deslizantes basadas en SMC, quasi continuo, *super-twisting* y HOSM. Además, el controlador por modos deslizantes basado en *twisting* presentó un buen desempeño sujeto a las perturbaciones por ráfagas de viento, pero el controlador *twisting* presento el conocido efecto *chattering*.

El controlador que presentó un menor esfuerzo de control, disminución del efecto *chattering* y un buen desempeño sujeto a ráfagas de viento, fue el basado en la metodología por modos deslizantes de alto orden anidado.

Para el trabajo futuro se realizará el diseño de estos métodos de control para el movimiento de guiñada y alabeo del vehículo aéreo no tripulado de ala fija.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo para el desarrollo y presentación de este trabajo a la Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura de la Universidad Juárez del Estado de Durango (FICA-UJED).

## References

[1] A. Sarhan, S. Qin, “Adaptive PID Control of UAV Altitude Dynamics Based on Parameter Optimization with Fuzzy Inference”, International Journal of Modeling and Optimization, Vol. 6, No. 4, pp. 246-251, 2016

[2] S. Akyurek, U. Kaynak, C. Kasmakoglu, “Altitude Control for Small Fixed-Wing Aircraft Using H-infinity Loop-Shaping Method ”, IFAC, Vol. 49, No. 9, pp. 111-116, 2016

[3] M. Ahsan, K. Shafique, et al, “Performance Comparison of Two Altitude-Control Algorithms for a Fixed-Wing UAV”, 3rd IEEE International Conference on Computer, Control and Communication (IC4), Karachi, Pakistan, 2013

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

[4] F.A. Warsi, D. Hazry, et al, "Yaw, Pitch and Roll Controller Design for Fixed-wing UAV under Uncertainty and Perturbed Condition", IEEE 10th International Colloquium on Signal Processing & its Applications (CSPA), Kuala Lumpur, Malaysia, 2014

[5] Y, Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A, Levant. Sliding Mode Control and Observation, Ed. Birkhauser, 2014

[6] M. V. Cook. Flight Dynamics Principles, Second edition, Ed. Elsevier, 2013

[7] L. Stevens, L. Lewis, Aircraft Control and Simulation, Ed. Jhon Wiley and Sons, 1992

[8] H. Khalil, Nonlinear Systems, Ed. Prentice Hall, ISBN: 0-13-067389-7, 1996

[9] A. Levant, "Robust Exact Differentition Via Sliding Mode Technique", Automatica, Vol. 34, pp. 379-384, 1998.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Control Robusto de un Vehículo Aéreo no Tripulado de Despegue y Aterrizaje Vertical con Capacidades de Manipulación Aérea.

J. Díaz-Téllez, L. Villalpando-Portillo, J.F. Guerrero-Castellanos

***Abstract*— Este artículo presenta una ley de control robusta para estabilizar la posición y actitud de Vehículos Aéreos no Tripulados bajo incertidumbres y perturbaciones externas e internas. La estructura del algoritmo de control está dividida en un control interno (control de actitud) y un control externo (control de posición). El objetivo principal de este algoritmo es el preciso posicionamiento mientras se atenúan perturbaciones externas e internas. Un modelo no simplificado del cuadricóptero es establecido en presencia de perturbaciones. El algoritmo de control toma en cuenta las limitaciones debidas a los actuadores mediante funciones de saturación. El algoritmo de control propuesto es relativamente simple, lo cual hace accesible su implementación en sistemas embebidos de bajo poder computacional. Simulaciones son realizadas para mostrar la efectividad del control propuesto.**

## I. Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT) se han convertido en una plataforma estándar de investigación en el área de la robótica aérea. Las primeras aplicaciones de los VANT se realizaron en el ámbito militar, sin embargo, hoy en día, se tiene una amplia gama de aplicaciones en el ámbito civil. En los últimos años el desarrollo de VANT con capacidades de despegue y aterrizaje vertical como los multicópteros, han experimentado un crecimiento en el ámbito científico, académico, militar y social. Características como su alta maniobrabilidad, su dimensión reducida y vuelo estacionario, permiten que estas aeronaves puedan navegar en interiores. La fotografía aérea, vigilancia, inspección, alivio de desastres, monitoreo ambiental, búsqueda y rescate son algunas de las aplicaciones más comunes de estas aeronaves.

Sin embargo, en la actualidad las aplicaciones tienden a ser cada vez mas complejas y se desarrollan en ambientes poco estructurados. Algunas de estas aplicaciones son: maniobras agresivas, sistemas de guiado autónomos, evasión de obstáculos y manipulación aérea. La manipulación aérea es el transporte de objetos mediante diferentes mecanismos (carga suspendida, mecanismos de agarre, efectores finales pequeños). El transporte aéreo tiene muchas aplicaciones potenciales debido a los diferentes tipos de carga que puede transportar, sin embargo, trasladar una carga incrementa la inercia de la aeronave, produce momentos y fuerzas externas difíciles de predecir y modelar. Por tal motivo, es necesario diseñar algoritmos de control robustos, capaces de adaptarse a los cambios en la dinámica del sistema, y eliminar los efectos causados por la misma. Diferentes estrategias de control encontramos reportadas en la literatura científica, las cuales podemos dividir en tres categorías dependiendo de su objetivo [1]. La primera se centra en la eliminación de la oscilación de la carga. La segunda se centra en la estabilización de la carga a través de la actuación del multicóptero. La tercera se centra en la generación de trayectorias considerando la dinámica del sistema. El presente trabajo se enfoca en la primera categoría, *i.e.*, en el diseño de algoritmos de control que permitan rechazar las perturbaciones originadas por la oscilación de la carga y en cierta medida evitar dichas oscilaciones.

Los primeros trabajos en reportar el control de multicópteros, asumiendo el conocimiento total del vector de estado y libre de perturbaciones, fueron publicados durante el año 2004 al año 2008 por diferentes grupos de trabajo [2], [3], [4] y [5]. Recientemente en [6] se propone un control de seguimiento de la orientación de un multicóptero, el cual contiene un observador y un control saturado basado en cuaterniones. El observador estima la velocidad angular, el término de Coriolis y perturbaciones externas. Las pruebas físicas muestran que el controlador es robusto bajo cargas suspendidas y es capaz de seguir maniobras agresivas. En [7] se presenta un control robusto para la estabilización de la orientación. Utiliza el control por rechazo activo de perturbaciones (ADRC). El observador de estado extendido (ESO) se utiliza para estimar disturbios externos. En [8] se plantea un planificador de trayectoria que tiene por objetivo el posicionar un multicóptero a la posición deseada mientras suprime la oscilación de la carga útil. Un análisis de la estabilidad basado en Lyapunov es realizado.

En el presente trabajo, se describe el diseño de una estrategia de control robusta basada en la técnica de rechazo activo de perturbación. La estructura del algoritmo de control está dividida en un control interno (control de actitud) y un control externo (control de posición). En ambos sistemas se añade un observador de estado extendido para estimar perturbaciones externas e internas y dinámica no modelada. El objetivo principal de este algoritmo es el preciso posicionamiento mientras se atenúan las perturbaciones generados por el movimiento de la carga. Además, es relativamente simple, lo cual hace accesible su implementación en sistemas embebidos de bajo poder computacional.

El resto del documento se estructura de la siguiente manera. La sección II presenta el modelo matemático del multicóptero, la dinámica inducida por la carga y su mecanismo de sujeción se modela como una perturbación variante en el tiempo. La sección III está estructurada en dos subsecciones,

J. Díaz-Téllez, L. Villalpando-Portillo y J.F. Guerrero-Castellanos están con la Facultad de Ciencias de Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, Puebla, México. juan.diaztel@alumno.buap.mx, leonardo.villalpandopo@correo.buap.mx, fermi.guerrero@correo.buap.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

primero se aborda el diseño del observado de estado extendido y enseguida se presenta el algoritmo que estabiliza a una posición deseada. En la sección IV se aborda el problema de control de orientación, se estructura de la misma manera que la anterior. La sección V presenta las simulaciones numéricas que permiten validar el algoritmo propuesto. Finalmente en la sección VI se presentan las conclusiones.

## II. MODELO DEL VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO

En esta sección se describe el modelo dinámico del multicóptero. Dichos sistemas son no lineales inestables, subactuados y altamente acoplados [9] . Este sistema se modela como un cuerpo rígido de seis grados de libertad, con solo cuatro entradas de control independientes: tres momentos en sus respectivos ejes y una fuerza de empuje perpendicular a la aeronave. Como se muestra en Fig. 1, dos marcos de coordenadas ortogonales son introducidos. El marco inercial denotado por $\mathbf{E}^f = \left[\mathbf{x}_e^f, \mathbf{y}_e^f, \mathbf{z}_e^f\right]$, y el marco fijo al cuerpo denotado por $\mathbf{E}^b = \left[\mathbf{x}_e^b, \mathbf{y}_e^b, \mathbf{z}_e^b\right]$. Ambos sistemas de coordenadas obedecen la ley de la mano derecha. La convención utilizada en aeronáutica es adoptada en este articulo, los ejes $\mathbf{o}_e^f\mathbf{x}_e^f$ apunta al norte, los ejes $\mathbf{o}_e^f\mathbf{y}_e^f$ apuntan al este y los ejes $\mathbf{o}_e^f\mathbf{z}_e^f$ apuntan perpendicularmente al suelo.

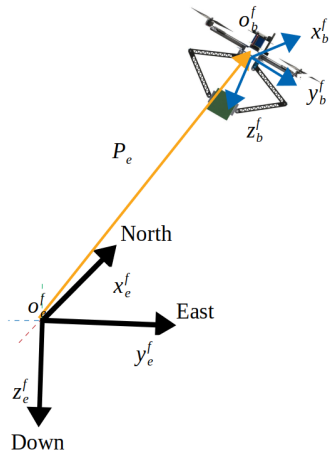



Fig. 1: Relación entre los sistemas de coordenadas: $\mathbf{E}^f$ y $\mathbf{E}^b$.

Algunas suposiciones se realizan para simplificar el modelo matemático del VANT.

- El multicóptero es un cuerpo rígido.
- La estructura de la aeronave es simétrica.
- El centro de gravedad y el origen $o_b^f$ del marco $\mathbf{E}^b$ coinciden.

Introduciendo un cuaternión unitario q denotado como:

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ \mathbf{e}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3 \tag{1}$$

donde $\beta$ es el ángulo de rotación, $\mathbf{q}_v = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ y $q_0 \in \mathbb{R}$ denotan la parte vectorial y la parte escalar del cuaternión respectivamente. La ecuación cinemática de rotación está dada por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathbf{q}_v^T \\ I_3 q_0 + [\mathbf{q}_v^\times] \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{2}\Xi(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ representa la velocidad angular medida en el sistema de coordenadas $\boldsymbol{E}^b$.
El error de actitud se utiliza para cuantificar el desajuste entre las dos orientaciones. Si $\mathbf{q}$ define el cuaternión de actitud actual y $\mathbf{q}_d$ define el cuaternión deseado, *p. ej.*, la orientación deseada, entonces el cuaternión que representa el error de orientación entre la actitud actual y la actitud deseada está dado por:

$$\tilde{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_d)^{-1} \odot \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 & \tilde{\mathbf{q}}_v^T \end{pmatrix}^T \tag{3}$$

donde $\mathbf{q}^{-1}$ es la rotación complementaria del cuaternión $\mathbf{q}$, dada por $\mathbf{q}^{-1} = \begin{pmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_v^T \end{pmatrix}^T$ y $\odot$ denota la multiplicación del cuaternión [10].

*Observación 2.1:* En este artículo, $\mathbf{R}$ denota la matriz de rotación entre el sistema de coordenadas $\mathbf{E}^b$ al sistema de coordenadas $\mathbf{E}^f$.

La matriz de rotación $\mathbf{R}$ está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\phi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\psi c_\theta \end{bmatrix} \tag{4}$$

por simplicidad, $c_\theta$ y $s_\theta$ representan $\cos\theta$ y $\sin\theta$ respectivamente, y similarmente para $\phi$ y $\psi$.

Analizando las fuerzas y momentos que actúan sobre la aeronave, podemos deducir el modelo en traslación (5) y rotación (6) del multicóptero:

$$\Sigma_T \quad : \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3^f - \frac{\Gamma}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3^b + \boldsymbol{\xi}_t \end{cases} \tag{5}$$

$$\Sigma_R \quad : \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\Xi(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -[\boldsymbol{\omega}^\times]\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\xi}_r \end{cases} \tag{6}$$

donde $\mathbf{p}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ representa la posición y la velocidad lineal del multicóptero expresada en $\mathbf{E}^f$ respectivamente. El termino g $\in \mathbb{R}_+$ representa la aceleración de la gravedad, y $\Gamma$ $\in \mathbb{R}_+$ es el empuje total generado por los rotores. Además, $\boldsymbol{\xi}_t$ es una perturbación aditiva dependiente de variables internas, incluye la fuerza de gravedad, el par giroscópico asociado al movimiento del rotor, el acoplamiento entre la fuerza de empuje y el par accionado, debido a que el empuje vectorial $\Gamma$ no se aplica exactamente al centro de masa del vehículo.

Por su parte en (6), $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ denota la matriz de inercia, constante y simétrica. $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ representan los momentos generados por la diferencia entre el movimiento de los rotores, por lo tanto, son las entradas de control. El termino $\boldsymbol{\xi}_r$ al igual que el anterior es una perturbación aditiva dependiente de variables internas, incluye el par inducido por todas las fuerzas externas $\boldsymbol{\xi}_t$ y los pares giroscópicos debido a la rotación de las hélices.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

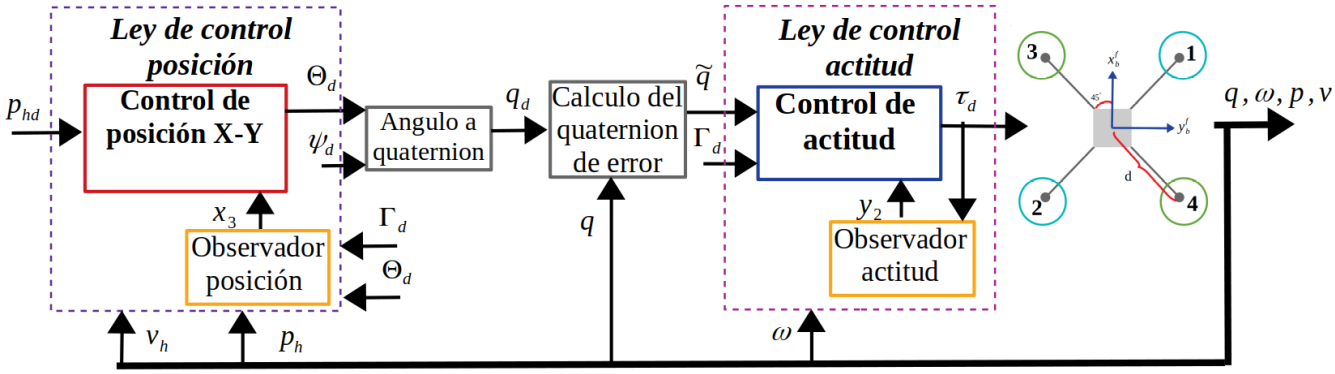



Fig. 2: Algoritmo de control propuesto.

### *II-A. Planteamiento del problema*

El objetivo principal del presente trabajo es diseñar un control robusto ante disturbios endógenos y exógenos, sobre el estado completo de la aeronave. Matemáticamente lo anterior puede ser escrito como:

$$\mathbf{p}(t) \to \mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{v} \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

esto condición se cumple, si y solo si, el control de orientación satisface:

$$\mathbf{q}(t) \to \mathbf{q}_d(t) \in \mathbb{S}^3, \ \boldsymbol{\omega} \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3 \tag{8}$$

Un control eficiente de orientación es crucial para mantener una orientación deseada con el fin de alcanzar una posición deseada a pesar de la perturbación exógena. Para compensar la dinámica no modelada y las perturbaciones externas, se propone un observador de estado extendido (ESO) tanto en dinámica de traslación y rotación. Este observador tendrá la función de estimar los efectos causados por perturbaciones endógenas y exógenas. La estimación generada mediante el observador, se utilizarán en la retroalimentación del lazo de control para amortiguar su efecto. Los valores propios del ESO de orientación se elige de tal manera que sea mayor en una proporción dinámica de diez veces que los valores propios del ESO en posición. Con respecto al algoritmo de control, utilizamos la función de saturación anidada con el objetivo de limitar al sistema en una región de operación deseada. El control de posición limita los ángulos deseados en un rango de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por su parte, el control de orientación tiene en cuenta los pares máximos de los rotores $[-\tau_{max}, \tau_{max}]$.

## III. CONTROL DE POSICIÓN

En esta sección asumimos que el problema de la estabilización de la altitud se encuentra solucionada, es decir el $\lim_{t\to} \begin{bmatrix} p_z(t) & v_z(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_{zd} & 0 \end{bmatrix}^T$. Por lo que nos restringiremos a trabajar en el plano X-Y. La finalidad de esta sección es diseñar un controlador de posición de tal manera que el siguiente objetivo se cumpla: $\lim_{t\to} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_h(t) & \mathbf{v}_h(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{hd} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$, donde $\mathbf{p}_h$ y $\mathbf{v}_h$ estan definidos como: $\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$.

### *III-A. Diseño del observado de estado extendido (ESO) para el control de posición*

Considere la ecuación (5) , donde $\xi_t$ es una perturbación uniformemente limitada. Además existe su derivada temporal de primer orden y esta denotada por $\dot{\xi}_t$, por lo que se puede estimar. El modelo de posición horizontal es representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_h &= \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -\frac{\Gamma}{m}\mathbf{A}(\psi,\phi)\,\mathbf{sin}\,\Theta + \boldsymbol{\xi}_t \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\Theta = \begin{bmatrix} \phi & \theta \end{bmatrix}^T$, y $\mathbf{sin}\,(\Theta) = \begin{bmatrix} \sin\phi & \sin\theta \end{bmatrix}^T$. $\mathbf{A}(\psi,\phi)$ está definida por la ecuación (10).

$$\mathbf{A}(\psi,\phi) = \begin{bmatrix} s_\psi & c_\psi c_\phi \\ -c_\psi & s_\psi c_\phi \end{bmatrix} \tag{10}$$

Definiendo $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x_3}$ como posición horizontal , velocidad horizontal y perturbación estimada respectivamente. Podemos definir el observador ESO como:

$$\Sigma_{ESO} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 + l_2\,(\mathbf{p}_h - \mathbf{x}_1) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\Gamma}{m}\mathbf{A}(\psi,\phi)\,\mathbf{sin}\,\Theta + \mathbf{x}_3 + l_1\,(\mathbf{p}_h - \mathbf{x}_1) \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = l_0\,(\mathbf{p}_h - \mathbf{x}_1) \end{cases} \tag{11}$$

donde $l_2$, $l_1$ y $l_0 \in \mathbb{R}_+$.

### *III-B. Diseño del control de posición*

En esta subsección, la ley de control que estabiliza la posición horizontal (9) es propuesta.

*Definición 3.1:* Dada una constante positiva $M$, una función continua y no decreciente $\sigma_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$\begin{aligned} &(1)\sigma_M = s \text{ if } |s| < M; \\ &(2)\sigma_M = \text{sign}(s)M\ ; \end{aligned} \tag{12}$$

Considere el modelo del sistema de posición horizontal (9) con la siguiente entrada de control ficticia :

$$\mathbf{r} = -\sigma_{M1}\left(\mathbf{x}_3 + \lambda_t\left[\mathbf{v}_h + \rho_t\tilde{\mathbf{p}}_h\right]\right) \tag{13}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

donde $\tilde{\mathbf{p}}_h = \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}$ representa el error de posición. Proponiendo la siguiente transformación en el espacio de estado, obtenemos la entrada de control que tiene por objetivo eliminar las no linealidades:

$$\mathbf{\Theta}_d = -\sigma_{M2}\left(\arcsin\left(\frac{m}{\Gamma}\mathbf{A}^{-1}(\psi,\phi)\mathbf{r}\right)\right) \tag{14}$$

donde $M_2 > M_1$. $\mathbf{A}^{-1}(\psi,\phi)$ es siempre invertible si $\phi$ se encuentra operando en el rango de $\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$. La ecuación (14) estabiliza robustamente a (9) a la posición deseada.

## IV. Control de orientación

En esta sección nos enfocamos en el desarrollo del algoritmo de control para estabilizar la orientación. El objetivo principal del controlador de orientación es mantener el vector de orientación deseado $q_d$ y el vector de velocidad angular a cero, independientemente de los valores que tomen las condiciones iniciales, es decir $\lim_{t\to} \begin{bmatrix}\mathbf{q}(t) & \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_d & \mathbf{0}\end{bmatrix}^T$.

### *IV-A. Diseño del observador de estado extendido (ESO) para el control de la orientación*

Considere el sistema de orientación endógenamente perturbado (6), el término de Coriolis $-[\boldsymbol{\omega}^\times]\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ dependiente del estado, agrupando los términos endógenos y exógenos como una perturbación global uniformemente limitada obtenemos $\boldsymbol{\zeta}(t) = -[\boldsymbol{\omega}^\times]\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi}_2$.

Definiendo las siguientes variables $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ como la velocidad angular y el disturbio global estimado respectivamente. Podemos considerar el siguiente ESO:

$$\Sigma_{ESO_R} : \begin{cases}\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{J}^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{y}_2\right) + \eta_1\left(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{y}_1\right) \\ \dot{\mathbf{y}}_2 = \eta_0\left(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{y}_1\right)\end{cases} \tag{15}$$

donde $\eta_0$ y $\eta_1 \in \mathbb{R}_+$.

### *IV-B. Diseño del control de orientación*

En esta subsección, se aborda el problema de estabilizar robustamente la orientación del multirotor hacia una posición deseada.

Considere la dinámica de rotación del cuerpo rígido descrita por 6, definimos la siguiente entrada de control acotada

$$\boldsymbol{\tau} = -\sigma_{N2}(\mathbf{y}_2 + \sigma_{N1}\left(\lambda_a\left[\boldsymbol{\omega} + \rho_a\tilde{\mathbf{q}}\right]\right)) \tag{16}$$

ademas $M_1 > 3\lambda_a\rho_a$, y $\lambda_a$ y $\rho_a \in \mathbb{R}_+$, entonces las entradas (16) estabilizan robustamente el cuerpo rígido a la orientación deseada [11].

## V. Resultados en simulación

Esta sección presenta las simulaciones realizadas para validar y demostrar la efectividad del controlador propuesto. Se presenta una aplicación que consiste en el seguimiento de trayectoria basada en puntos de referencia deseados. La simulación se centra en la agricultura de precisión, se divide un área mediante puntos de referencia unidos por una linea recta. La tabla I muestra los parámetros físicos utilizados en la simulación. Para verificar y evidenciar la robustez del algoritmo de control propuesto, se han añadido torques y fuerzas externas al modelo matemático de la aeronave. La perturbación externa $\xi_r$, se ha modelado como una carga esférica suspendida, la cual oscila de forma periódica. La ecuación ((17)) describe la perturbación $\xi_r$, la cual representa aproximadamente el 30 % del máximo par permitido por los actuadores $\tau_{max} = 0{,}8Nm$.

TABLE I: Parámetros físicos del VANT

| Parámetros | Descripción | Unidades |
|---|---|---|
| g | Gravedad | 9.81 $m/s^2$ |
| m | Masa | 1.033 $kg$ |
| $J_{xx}$ | Inercia en el eje x | 0.00653 $kg\ m^2$ |
| $J_{yy}$ | Inercia en el eje y | 0.00653 $kg\ m^2$ |
| $J_{zz}$ | Inercia en el eje z | 0.00978 $kg\ m^2$ |

$$\xi_r = \begin{bmatrix}0{,}3\cos 2t \sin 50t \cos t \\ 0{,}3\cos 2t \sin 50t \cos t\end{bmatrix} \tag{17}$$

La Fig. 3 muestra la perturbación $\xi_r$ que se describe en (17) y la perturbación estimada en el sistema de rotación.

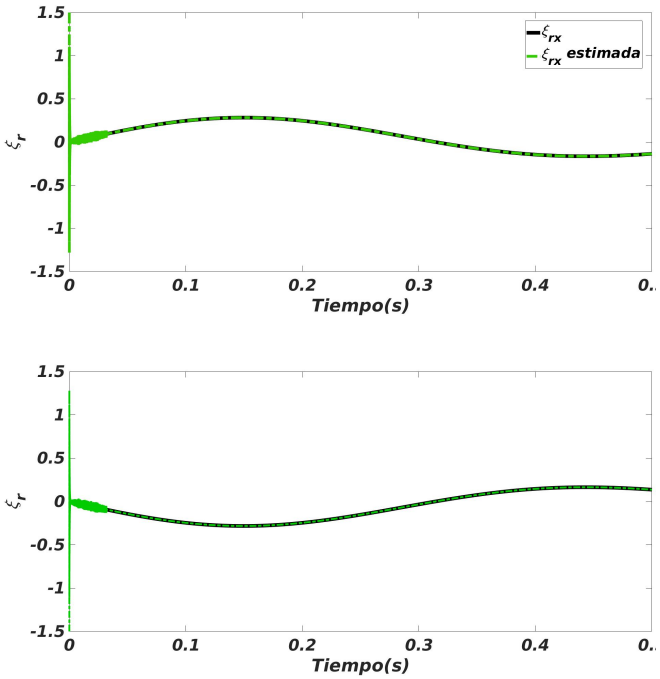



Fig. 3: Perturbación real y estimada en el sistema de rotación.

El perturbación externa $\xi_t$ para el sistema de traslación se ha modelado con la ecuación (18). La Fig. 4 muestra la perturbación real y la perturbación estimada del mismo sistema.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

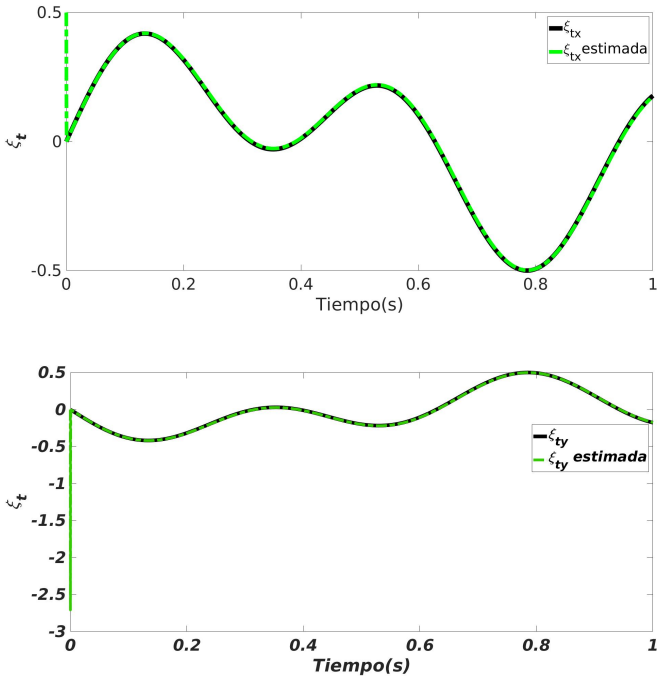



Fig. 4: Perturbación real y estimada en el sistema de traslación.

$$\xi_r = \begin{bmatrix} 0{,}1\cos 2t \sin 50t \\ -0{,}1\cos 2t \sin 50t \end{bmatrix} \tag{18}$$

Como se mencionó anteriormente, se ha diseñado un planeador de ruta mediante puntos de referencia deseados. Como se muestra en la tabla II , se especifica las posiciones deseadas en cada instante de tiempo.

TABLE II: Puntos de referencia deseados.

| Punto de ruta | tiempo(s) | $p_{zd}(m)$ | $p_{xd}(m)$ | $p_{yd}(m)$ | $\psi_d(rad)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 5 | -3 | 20 | 0 | 0 |
| 3 | 15 | -3 | 20 | 10 | 0 |
| 4 | 20 | -3 | 0 | 10 | 0 |
| 5 | 30 | -3 | 0 | 20 | 0 |
| 6 | 35 | -3 | 20 | 20 | 0 |
| 7 | 45 | -3 | 20 | 30 | 0 |
| 8 | 55 | -3 | 0 | 30 | 0 |

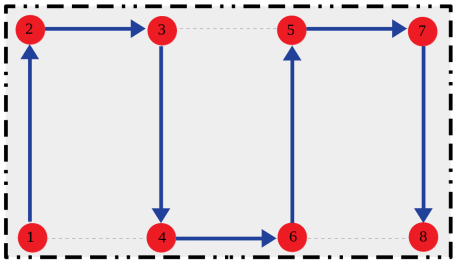



Fig. 5: Puntos de referencia deseados

Definimos el control A como el algoritmo de control propuesto, y el control B como una alternativa la cual no contiene los observadores de estado extendido en ambos sistemas. La Fig. 6 muestra la evolución de la actitud en ambos controladores. Se observa una atenuación aproximadamente del 0.2 $rad$, en el algoritmo propuesto.

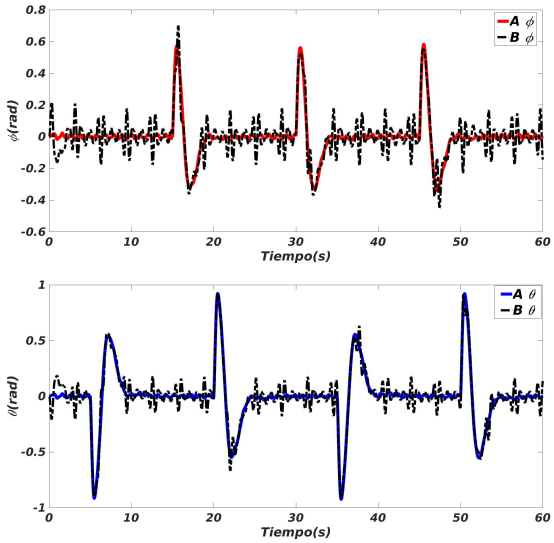



Fig. 6: Evolución de la orientación del VANT parametrizada en ángulos de Euler.

La Fig. 7 muestra la evolución de la velocidad angular en ambos controladores. Se observa una atenuación aproximadamente de 1 $\frac{rad}{s}$, en el algoritmo propuesto.

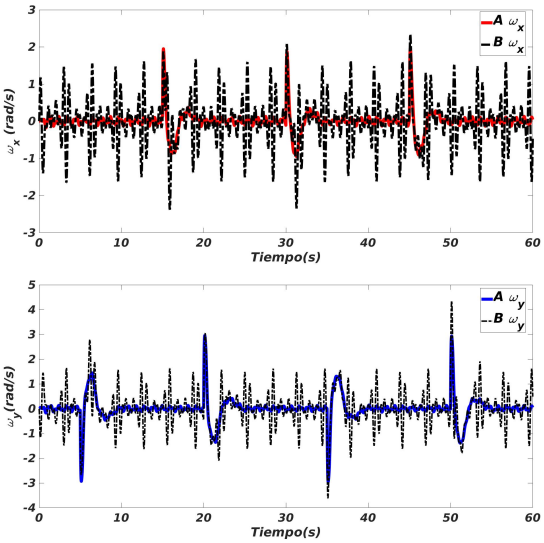



Fig. 7: Evolución de la velocidad angular del VANT $\omega$

En la Fig. 9, muestra la evolución de la posición del vehículo. El algoritmo de control muestra una respuesta suave y alto grado de precisión, además, es lo suficiente robusto para atenuar perturbaciones internas y externas. El diseño de control toma en cuenta la saturación de error en la

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

posición y limita los ángulos permitidos. Para esta aplicación los ángulos se restringieron a $\pm 1$ radian.

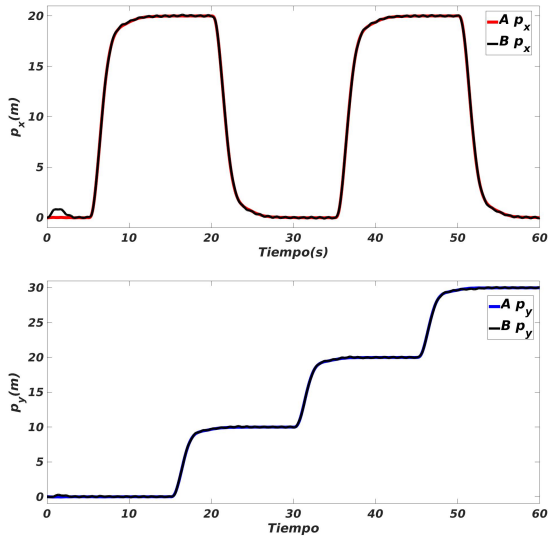



Fig. 8: Evolución de la posición $\mathbf{p}$ del VANT.

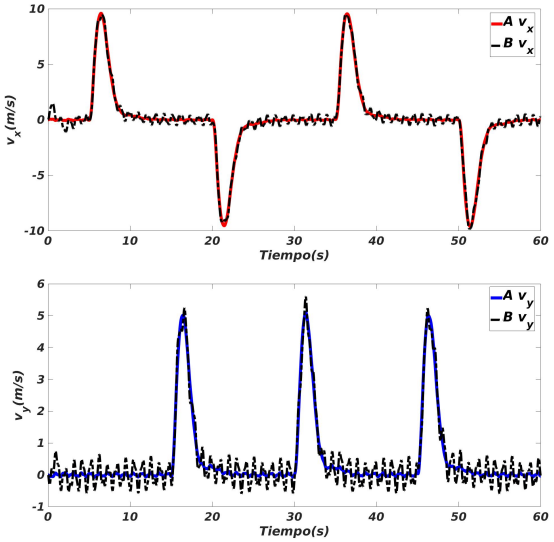



Fig. 9: Evolución de la velocidad lineal $\mathbf{v}$ del VANT.

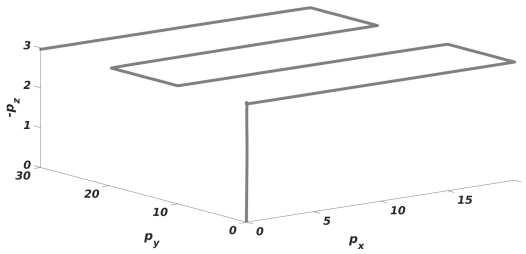



Fig. 10: Seguimiento de trayectoria del VANT.

La Fig. 10 muestra el seguimiento de trayectoria que realiza el multicóptero en los tres ejes. Se puede verificar las diferencias entre los dos controladores en `https://www.youtube.com/watch?v=SzfzKDCKvBA`. La simulación se realizo en Matlab y FlightGear.

## VI. CONCLUSIONES

La ley de control presentada muestra robustez ante perturbaciones endógenas y exógenas en ambos sub-sistemas, a saber, posición y orientación. El control de orientación muestra una respuesta suave y con un aceptable tiempo de respuesta, lo cual es de suma importancia para el control de posición. Por su simplicidad, la estrategia de control puede ser implementada en sistemas computacionales de bajo poder computacional. EL control de posición es lo suficientemente robusto para seguir trayectorias parametrizadas mediante puntos de referencia con alta precisión. Como trabajo futuro se planea implementar el algoritmo de manera experimental usando una plataforma computacional desarrollada en el marco de este proyecto.

## REFERENCES

[1] C. Y. Son, H. Seo, D. Jang, and H. J. Kim, "Real-time optimal trajectory generation and control of a multi-rotor with a suspended load for obstacle avoidance," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5, no. 2, pp. 1915–1922, 2020.

[2] S. Bouabdallah and R. Siegwart, "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005, pp. 2247–2252.

[3] S. Salazar-Cruz, A. Palomino, and R. Lozano, "Trajectory tracking for a four rotor mini-aircraft," in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 2505–2510.

[4] G. Hoffmann, S. Waslander, and C. Tomlin, "Quadrotor helicopter trajectory tracking control," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 08 2008.

[5] Z. Zuo, "Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor," *IET Control Theory Applications*, vol. 4, no. 11, pp. 2343–2355, 2010.

[6] A. Castillo Frasquet, R. Sanz, and P. García, "Disturbance observer-based quadrotor attitude tracking control for aggressive maneuvers," *Control Engineering Practice*, vol. 82, pp. 14–23, 09 2018.

[7] A. Pulido-Flores, J. F. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, S. E. Maya-Rueda, J. U. Alvarez-Muñoz, J. Escareno, and G. Mino-Aguilar, "Active disturbance rejection control for attitude stabilization of multi-rotors uavs with bounded inputs," in *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2018, pp. 1181–1188.

[8] B. Xian, S. Wang, and S. Yang, "An online trajectory planning approach for a quadrotor uav with a slung payload," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 8, pp. 6669–6678, 2020.

[9] D. J. Almakhles, "Robust backstepping sliding mode control for a quadrotor trajectory tracking application," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 5515–5525, 2020.

[10] A. Bani Younes, J. Turner, D. Mortari, and J. Junkins, "A survey of attitude error representations," 08 2012.

[11] F. Guerrero-Castellanos, N. Marchand, A. Hably, S. Lesecq, and J. Delamare, "Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter," *Control Engineering Practice*, vol. 19, no. 8, pp. 790–797, 2011. [Online]. Available: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00568075

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Consenso de un sistema multi-agente heterogéneo aplicando esquemas de control no lineal

Daniel Uresti-Morales[1], Ricardo Pérez-Alcocer[2] y Javier Moreno-Valenzuela[1]

***Resumen*— En este trabajo se aborda el problema de consenso de un sistema multi-agente heterogéneo. Se detalla una estrategia de consenso que garantiza el cumplimiento del mismo siempre que los controladores aplicados a cada agente del sistema aseguren estabilidad asintótica en la tarea de regulación. Se usa un vehículo terrestre con ruedas y un quadrotor para conformar el sistema multi-agente en que se aplica la metodología. Se implementan controladores no lineales en ambos agentes. En el caso del quadrotor se propone un nuevo controlador mientras que para el vehículo terrestre se usó uno tomado de la literatura. La estrategia de consenso propuesta se compara de manera experimental con un método tomado de la literatura y los resultados son analizados. De los datos obtenidos se observa que la técnica de consenso con controladores no lineales muestra un mejor desempeño.**

***Palabras clave*— Consenso, sistema multi-agente, control, quadrotor, vehículo terrestre con ruedas.**

## I. Introducción

Los vehículos no tripulados han tenido un gran auge durante los últimos años debido a que permiten realizar tareas complejas con la mínima intervención de un piloto. Los robots aéreos, terrestres y acuáticos son usados frecuentemente en distintas actividades, las cuales incluyen exploración, mantenimiento, entretenimiento y transporte, por mencionar algunas. El éxito en las tareas asignadas a estos dispositivos recae en que estén dotados con estrategias de control y navegación que brinden un comportamiento robusto.

Como se mencionó, los vehículos autónomos en sus distintas versiones son de gran utilidad en tareas específicas. Sin embargo, un grupo de ellos trabajando de manera conjunta incrementa la capacidad para realizar tareas más complejas de las que podría hacer un solo vehículo. Estos grupos de múltiples vehículos son comúnmente llamados sistemas multi-agente cuando poseen una red de trabajo con capacidad de trasmitir información entre sí. Además, los sistemas que integran vehículos de distintas características se les denomina sistemas multi-agente heterogéneos y también han sido objeto de estudios dado que agregan funcionalidades e incrementan el número de posibles aplicaciones. Distintas investigaciones han abordado el problema de control de sistemas multi-agente con el objetivo de garantizar el cumplimiento de la tarea asignada. En [1]-[2] se establecieron condiciones necesarias y suficientes para que los sistemas multi-agente con topologías de interacción cambiantes alcancen formaciones variantes en el tiempo. Los autores de [3] diseñaron un controlador por modos deslizantes aplicado a un quadrotor que sigue una trayectoria circular alrededor de un vehículo terrestre. En [4] se propuso un algoritmo para un sistema de múltiples robots con ruedas con el objetivo de cubrir un área predefinida. En [5] se introdujo la extensión de un algoritmo de consenso para sistemas de segundo orden. Una estrategia de control para un sistema de dos manipuladores aéreos que transportan un objeto de manera conjunta se presentó en [6].

En este trabajo se aborda el problema de consenso, el cual es fundamental para la coordinación distribuida en los sistemas multi-agente [7]. El objetivo a resolver en este problema es lograr que los agentes concuerden en un valor común como puede ser la posición, velocidad o postura. En [8] se presentó un protocolo de consenso robusto para mantener la formación de un sistema de múltiples quadrotores aplicando un algoritmo de control *super twisting* para cada agente. Un control por modos deslizantes integral para seguimiento de trayectoria de un quadrotor fue propuesto en [9]. Tres vehículos terrestres con ruedas completaron el sistema multi-agente y el consenso se validó experimentalmente. En [10], el problema de consenso para sistemas multi-agente heterogéneos con topologías de interacción cambiantes fue abordado, La teoría de control LQR fue empleada para diseñar los controladores de los vehículos y el consenso de posición en el plano horizontal fue garantizado bajo el supuesto que dichos controles garantizan estabilidad exponencial.

Como se puede observar, existe una variedad de trabajos que abordan el problema de consenso empleando agentes que poseen las mismas características cinemáticas y dinámicas, y otros que difieren entre ellos. En este trabajo se revisa la estrategia de consenso basada en [10] para un sistema formado por un vehículo terrestre de dos ruedas y un quadrotor. La metodología presentada garantiza que el sistema converge a una posición en común en el plano horizontal. Se demuestra de manera experimental que el consenso se alcanza implementando controladores que garantizan estabilidad asintótica en vez de exponencial en cada uno de los vehículos del sistema. Como contribución, se empleó un nuevo controlador basado en modelo para el quadrotor y uno tomado de la literatura para el vehículo terrestre. Los resultados obtenidos muestran un desempeño superior de la propuesta en comparación del esquema original.

[1]Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Tijuana, Baja California, México. C.P. 22435, moreno@citedi.mx

[2]CONACyT-Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Tijuana, Baja California, México. C.P. 22435, rrperez@citedi.mx

Trabajo apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT-Fondo Sectorial de Investigación para la Educación con el proyecto A1-S-24762, CONACyT proyecto Cátedras 1537 y por la Secretaría de Investigación y Posgrado-Instituto Politécnico Nacional, México. Proyecto Apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección II se describe la estrategia de consenso. Los modelos cinemáticos y dinámicos de los vehículos del sistema, así como los controladores implementados, se presentan en la sección III. En la sección IV se describen los experimentos y se presentan los resultados obtenidos. Finalmente, las conclusiones de este trabajo se encuentran en la sección V.

## II. Estrategia de consenso

La teoría de grafos es ampliamente usada en el los problemas de sistemas multi-agente. Un grafo es una estructura matemática que permite modelar relaciones binarias entre objetos de algún dominio [11]. En este trabajo la topología de interacción entre los distintos agentes del sistema es modelada usando un grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de vértices que representan los $N$ agentes del sistema, y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de aristas. Cada elemento $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ denota que la información del agente $j$ puede ser trasmitida al agente $i$, y el agente $j$ se denomina vecino del agente $i$. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ denota la matriz de adyacencia, donde $a_{ij} = 1$ si $e_{ij} \in \mathcal{E}$ y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Además, los elementos de la diagonal de $A$ son nulos. El grafo tiene un árbol de expansión con raíz en $v_i$ si existe una secuencia de aristas que comienzan en $v_i$ y alcanza cualquier otro nodo $v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N, j \neq i)$ en el grafo.

Considerando un sistema con $N$ agentes, la posición del $i$-ésimo agente a lo largo de los ejes $x$ y $y$ se denota como $x_i(t)$ y $y_i(t)$, respectivamente. El problema de consenso de posición en el plano horizontal consiste en obtener entradas de control para cada uno de los agentes que garanticen que el siguiente límite

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - y_j(t)| = 0, \tag{2}$$

se cumple $\forall i, j = 1, 2, ..., N,\ i \neq j$.

El protocolo de consenso presentado en este trabajo tiene su fundamento en la metodología introducida por Mu y Shi en [10], la cual emplea la noción de tiempo de permanencia para definir la actualización de los valores deseados de posición en el plano horizontal de cada agente. De este modo, se define una ventana de tiempo $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, y en el primer instante $t_k$ de cada una de estas ventanas de tiempo, los agentes toman información de los sensores y envían sus datos a los demás agentes dependiendo de la configuración de la topología de interacción del sistema. Con la información obtenida se obtienen los valores deseados de posición como sigue

$$x_{id}(t_k) = \frac{x_i(t_k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_j(t_k)}{d_i(t_k) + 1}, \tag{3}$$

$$y_{id}(t_k) = \frac{y_i(t_k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} y_j(t_k)}{d_i(t_k) + 1}, \tag{4}$$

donde $\mathcal{N}_i$ es el conjunto de vecinos y $d_i(t_k)$ es el número de vecinos del $i$-ésimo agente en el instante de tiempo $t_k$.

En [10] se demuestra que si el grafo de interacción asociado al sistema multi-agente tiene un árbol de expansión en cada instante de tiempo $t_k$ y el control aplicado a cada uno de los agentes garantiza estabilidad exponencial en la tarea de regulación de posición, se puede establecer la duración del intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ con la cual se garantiza el consenso del sistema. En este trabajo se demuestra de manera experimental que empleando la misma estrategia de actualización de posiciones deseadas es posible cumplir con la tarea de consenso aplicando controladores que aseguren estabilidad asintótica. Esta afirmación se puede demostrar de manera teórica, sin embargo el análisis se omite en este trabajo.

## III. Estrategias de control para el sistema multi-agente

En esta sección se describen los distintos vehículos que conforman el sistema multi-agente. De inicio se presenta el modelo cinemático del vehículo terrestre de dos ruedas y el controlador que garantiza estabilidad asintótica en la tarea de regulación. Posteriormente se describe el modelo dinámico del quadrotor y la propuesta de controlador desarrollado.

### *III-A. Vehículo terrestre de dos ruedas*

El modelo cinemático del vehículo terrestre de dos ruedas ha sido ampliamente estudiado y empleado en el desarrollo de esquemas de control [12]-[13]. La figura 1 muestra la representación del vehículo en el plano horizontal. Asumiendo que la posición del centro de rotación del vehículo y el origen del marco de referencia del cuerpo coinciden, puede demostrarse que el modelo está dado por

$$\dot{\boldsymbol{q}} = S(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}, \tag{5}$$

donde $\boldsymbol{q}(t) = [x(t)\ y(t)\ \theta(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de pose del vehículo, $x(t)$ y $y(t)$ denotan la posición del punto medio del eje que une las ruedas en el marco de referencia inercial y $\theta(t)$ representa su orientación. La matriz de transformación $S(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ se define como

$$S(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

y el vector de entradas $\boldsymbol{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ está constituido por la velocidad lineal y angular como sigue

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} V(t) & W(t) \end{bmatrix}^T. \tag{7}$$

El esquema de control seleccionado para el vehículo terrestre de dos ruedas del sistema multi-agente fue el propuesto por Dixon y otros en [14]. Considerando el vector de pose deseada como $\boldsymbol{q}_d = [x_d(t)\ y_d(t)\ \theta_d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$, el vector de error de pose $\tilde{\boldsymbol{q}} = [\tilde{x}(t)\ \tilde{y}(t)\ \tilde{\theta}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ se define como

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{q}_d(t) - \boldsymbol{q}(t). \tag{8}$$

De este modo, el objetivo de control consiste en obtener las entradas de velocidad lineal $V(t)$ y angular $W(t)$ tales que

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

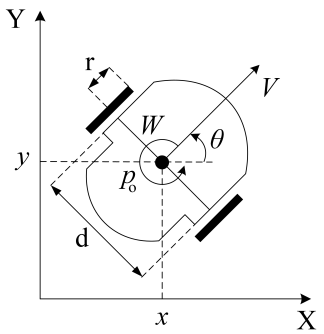



Fig. 1: Vista superior del vehículo terrestre de dos ruedas.

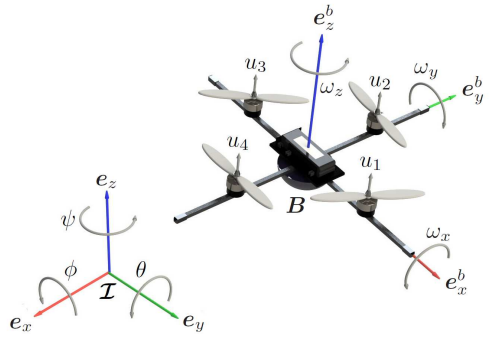



Fig. 2: Esquema CAD del quadrotor.

se satisface.

El diseño del controlador se realiza sobre el error transformado, el cual se obtiene como sigue

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Así, la dinámica del error expresado en el marco de referencia del cuerpo se obtiene calculando la derivada de (10) y usando el modelo cinemático en (5). Por lo tanto, la dinámica del error en lazo abierto se expresa como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V + We_2 \\ -We_1 \\ -W \end{bmatrix}, \tag{11}$$

y la ley de control propuesta por los autores está dada por

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e_1 \\ k_2 e_3 + e_2^2 sen(t) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

donde $k_1$, $k_2 \in \mathbb{R}$ son ganancias constantes positivas.

La prueba de estabilidad presentada por los autores garantiza que el vector de errores transformados converge a cero de manera asintótica y en forma global, y como consecuencia se cumple el objetivo de control.

### *III-B. Quadrotor*

El modelo dinámico del quadrotor que se presenta en este trabajo se obtiene considerado la aeronave como un cuerpo rígido que se mueve en un espacio tridimensional, ver [15]-[16]. El vehículo se somete a las fuerzas de empuje y arrastre generadas por los rotores dando lugar al movimiento en el espacio. Las ecuaciones de movimiento que representan la dinámica del quadrotor están dadas por

$$m\ddot{\boldsymbol{p}} + mg\boldsymbol{e}_z = R(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{e}_z u_T, \tag{13}$$

$$H(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} = W(\boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\tau}, \tag{14}$$

donde $\boldsymbol{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del centro de masa del vehículo respecto al marco de referencia inercial, $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector que describe la orientación del quadrotor representado por los ángulos de Euler, la masa del vehículo está denotada por $m$, $g$ es la constante gravitacional, $I_o$ representa el tensor de inercia, $\boldsymbol{e}_z \in \mathbb{R}^3$ expresa el vector unitario en dirección del eje $z$ en el marco de referencia inercial, $u_T \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T \in \mathbb{R}^3$ son las entadas del sistema correspondientes al empuje total generado por los rotores y el vector de pares, respectivamente. Las matrices $H(\boldsymbol{\eta})$ y $C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ son definidas como

$$H(\boldsymbol{\eta}) = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} I_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1}, \tag{15}$$

$$C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = W(\boldsymbol{\eta})^{-T}[S(\boldsymbol{\omega})I_o - I_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1}\dot{W}(\boldsymbol{\eta})]W(\boldsymbol{\eta})^{-1}. \tag{16}$$

siendo $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \in \mathbb{R}^3$ el vector de velocidades angulares obtenido como $\boldsymbol{\omega} = W(\boldsymbol{\eta})^{-1}\dot{\boldsymbol{\eta}}$, y $S(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz antisimétrica dada por

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & o & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, $R(\boldsymbol{\eta}) \in SO(3)$ y $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ denotan las matrices de transformación definidas explícitamente como

$$R(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\theta s_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\phi & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix}, \tag{18}$$

donde $s_x$, $c_x$ y $t_x$ representan las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$, respectivamente. La figura 2 muestra un esquema del quadrotor en el cual se representan los marcos de referencia, los movimientos que realiza y las posiciones de los rotores.

Considerando que los valores deseado de posición y orientación están dados por $\boldsymbol{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\eta}_d(t) \in \mathbb{R}^3$, respectivamente, las señales de error se definen como

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{p}_d(t) - \boldsymbol{p}(t), \tag{19}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t) - \boldsymbol{\eta}(t). \tag{20}$$

De este modo, el objetivo de control es diseñar un algoritmo que proporcione los valores adecuados a las entradas del sistema $u_T(t)$, $\phi_d(t)$, $\theta_d(t)$ y $\boldsymbol{\tau}(t)$, tales que se satisfaga el siguiente límite

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\boldsymbol{p}}(t), \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{21}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Para alcanzar el objetivo de control antes mencionado se propone el siguiente controlador no lineal con compensación del modelo

$$u_T = \frac{f_{pz}}{r_{33}(\boldsymbol{\eta})}, \tag{22}$$

$$\phi_d = \tan^{-1}\left(\frac{c_{\theta_d}}{f_{pz}}[f_{px}s_{\psi_d} - f_{py}c_{\psi_d}]\right), \tag{23}$$

$$\theta_d = \tan^{-1}\left(\frac{1}{f_{pz}}[f_{py}s_{\psi_d} + f_{px}c_{\psi_d}]\right), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\tau} = W(\boldsymbol{\eta})^{-T}(H(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}}_r + C(\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}}_r + K_s\boldsymbol{s} + K_{is}\boldsymbol{\xi}_s), \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_s = \boldsymbol{s}, \tag{26}$$

donde $\boldsymbol{f}_p = [f_{px}\ f_{py}\ f_{pz}]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector definido como

$$\boldsymbol{f}_p = m\ddot{\boldsymbol{p}}_d + mg\boldsymbol{e}_z + K_{pp}\tilde{\boldsymbol{p}} + K_{ip}\boldsymbol{\xi}_p + K_{dp}\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}, \tag{27}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \tilde{\boldsymbol{p}}, \tag{28}$$

y $r_{ij}(\boldsymbol{\eta})$ es el $ij$-ésimo elemento de la matriz $R(\boldsymbol{\eta})$. Los vectores $\boldsymbol{s}, \dot{\boldsymbol{\eta}}_r \in \mathbb{R}^3$ se establecen como

$$\boldsymbol{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \Lambda\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tag{29}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_r = \dot{\boldsymbol{\eta}}_d + \Lambda\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tag{30}$$

y $K_{pp}, K_{ip}, K_{dp}, \Lambda, K_s,\ K_{is} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son matrices diagonales definidas positivas.

Sustituyendo la entrada de control, aplicando propiedades del sistema y realizando algunas manipulaciones algebraicas, el sistema en lazo cerrado obtenido con la dinámica del quadrotor en (13)-(14) y el controlador no lineal con compensación del modelo dado en (22)-(26) está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_p &= A\boldsymbol{x}_p + d_c(t,\boldsymbol{x}_p,\tilde{\boldsymbol{\eta}}),\\
\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{\eta}} &= -\Lambda\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{s},\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{s} &= H^{-1}(\boldsymbol{\eta})[-C(\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{s} - K_s\boldsymbol{s} - K_{is}\boldsymbol{\xi}_s],\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}_s &= \boldsymbol{s},
\end{aligned} \tag{31}$$

donde $\boldsymbol{x}_p = [\tilde{\boldsymbol{p}}^T\ \boldsymbol{\xi}_p^T\ \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}^T]^T \in \mathbb{R}^9$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ -\frac{1}{m}K_{pp} & -\frac{1}{m}K_{ip} & -\frac{1}{m}K_{dp} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$I_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz identidad de dimensión tres y el vector $\boldsymbol{d}_\eta \in \mathbb{R}^9$ se define como

$$\boldsymbol{d}_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{pz}[r_c(\boldsymbol{\eta}_d) - r_c(\boldsymbol{\eta})]/m. \end{bmatrix}$$

Note que el único punto de equilibrio del sistema está dado por $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_p^T(t)\ \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T(t)\ \boldsymbol{s}^T(t)\ \boldsymbol{\xi}_s^T(t)]^T = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{18}$ y con ello se puede establecer la siguiente proposición.

**Proposición 1:** Bajo los supuestos que la matriz $A$ en (32) es Hurwitz, el origen del espacio de estados del sistema de lazo cerrado (31) es local y uniformemente estable. Además, el límite

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{x}_p^T(t)\ \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T(t)\ \boldsymbol{s}^T(t)]^T = \boldsymbol{0} \tag{33}$$

se satisface de manera local.

Es posible demostrar la proposición anterior, sin embargo dicha prueba se omite en este trabajo.

## IV. Resultados experimentales

Para evaluar el desempeño de la estrategia de consenso y del controlador propuesto se realizaron experimentos de tiempo real con el vehículo terrestre de dos ruedas QBot y el quadrotor QBall 2, ambos manufacturados por Quanser. Los vehículos interactúan con el sistema de visión *Optitrack* para realizar la realimentación de la posición en el espacio 3D. Los algoritmos de control fueron programados en *Simulink-Matlab* con la bibliotecas de QUARC en la computadora de mando, y posteriormente fueron compilados y descargados en la computadora embebida de cada vehículo. La actualización de la posición deseada de cada vehículo fue calculada y enviada a los agentes desde la computadora de mando, tomando en cuenta que los dos vehiculos se mantienen comunicados durante todo el experimento. La figura 3 ilustra la configuración experimental del sistema multi-agente heterogéneo.

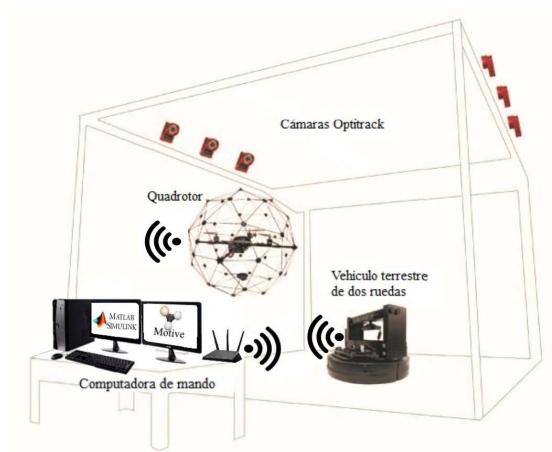



Fig. 3: Configuración experimental del sistema multi-agente heterogéneo.

Con el objetivo de comparar el desempeño del protocolo de consenso propuesto se implementó el esquema de consenso LQR presentado en [10]. La entrada de control para el vehículo terrestre con ruedas está dada por

$$V = M_d\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{34}$$

$$W = R_b W_c, \tag{35}$$

donde

$$v_x = -\int(k_1\tilde{x} + k_2\dot{\tilde{x}})dt,$$

$$v_y = -\int(k_1\tilde{y} + k_2\dot{\tilde{y}})dt,$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

$M_d$ y $R_b$ definen la dirección de avance y giro del vehículo y $W_c$ representa la velocidad angular constante. Las ganancias $k_1$ y $k_2$ se obtienen por medio del método LQR. Más detalles de la implementación se pueden encontrar en el algoritmo presentado en [10].

Por otra parte, las entradas de control para el quadrotor fueron definidas como sigue

$$u_T = mg + k_{pz}\tilde{z} + k_{iz}\xi_z + k_{dz}\dot{\tilde{z}}, \tag{36}$$

$$\dot{\xi}_z = \tilde{z}, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -K_x \boldsymbol{x}_q \\ -K_y \boldsymbol{y}_q \\ k_{p\psi}\tilde{\psi} + k_{d\psi}\dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix}, \tag{38}$$

donde $k_{pz}, k_{iz}, k_{dz}, k_{p\psi}, k_{d\psi} \in \mathbb{R}$ son constantes positivas, $\tilde{z} = z_d - z$ y $\tilde{\psi} = \psi_d - \psi$ definen los errores de altura y orientación en el ángulo *yaw*, $K_x, K_y \in \mathbb{R}^{1\times 5}$ representan las matrices de ganancias constantes obtenidas por el método LQR y los vectores $\boldsymbol{x}_q, \boldsymbol{y}_q \in \mathbb{R}^5$ denotan los estados definidos como

$$\boldsymbol{x}_q = [\tilde{x}\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta}\ p]^T,$$
$$\boldsymbol{y}_q = [\tilde{y}\ \dot{y}\ \phi\ \dot{\phi}\ r]^T,$$

siendo $p$ y $r$ variables que representan la dinámica del actuador.

Las ganancias para ambos protocolos de consenso fueron establecidas por medio de procesos de prueba y error. Para el protocolo de consenso LQR se obtuvieron los siguientes valores

$$\begin{aligned}
&k_1 = \text{-1.0}, \quad k_2 = \text{-1.414}, \quad W_c = 0.50,\\
&k_{px} = 0.497, \quad k_{ix} = 0.168, \quad k_{dx} = 0.629,\\
&K_x = [-0.015\ 0.051\ 0.211\ 0.034\ 2.614],\\
&K_y = [0.015\ -0.051\ 0.211\ 0.034\ 2.614],\\
&k_{p\psi} = 0.158, \quad k_{d\psi} = 0.080,
\end{aligned}$$

mientras que para esquema el consenso no lineal las ganancias se establecieron como

$$\begin{aligned}
&k_1 = 4.5, \quad k_2 = 2.5,\\
&K_{pp} = \text{diag}\{4.75,\ 4.75,\ 7.00\},\\
&K_{dp} = \text{diag}\{3.50,\ 3.50,\ 3.75\},\\
&K_{ip} = \text{diag}\{0.75,\ 2.00,\ 1.30\},\\
&K_s = \text{diag}\{0.35,\ 0.35,\ 1.00\},\\
&K_{is} = \text{diag}\{0.075,\ 0,25,\ 0.05\},\\
&\Lambda = \text{diag}\{3.50,\ 3.50,\ 4.50\}.
\end{aligned}$$

Los experimentos se llevaron a cabo de la siguiente manera. Durante el intervalo de tiempo 0 [s] $<$ t $\leq$ 10 [s] se establece una tarea de regulación en una posición específica con el propósito de que el quadrotor alcance una altura preestablecida. Posteriormente, para $t > 10$ [s] se inicia el protocolo de consenso y se mantiene este proceso hasta el final del experimento. La duración del intervalo de tiempo que determina la actualización de las posiciones deseadas empleando las ecuaciones (3) y (4) se estableció en 5 [s]. El ángulo deseado para el vehículo terrestre también se actualiza con la misma frecuencia en ambos controladores usando la siguiente ecuación

$$\theta_d = \text{atan2}(\tilde{y}, \tilde{x}).$$

Para este trabajo, la posición en el plano horizontal del quadrotor se denota por $x_1(t)$ y $y_1(t)$ mientras que para el vehículo terrestre de dos ruedas se representa con $x_2(t)$ y $y_2(t)$. El grafo no dirigido que describe la interacción entre los dos agentes del sistema se presenta en la figura 4.

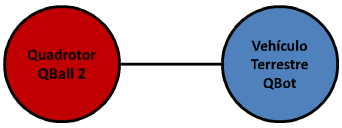
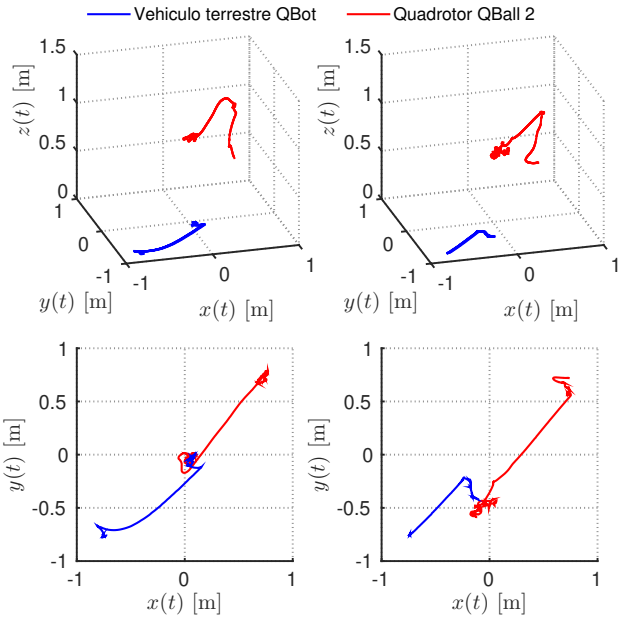



Fig. 4: Grafo de interacción entre los agentes del sistema.

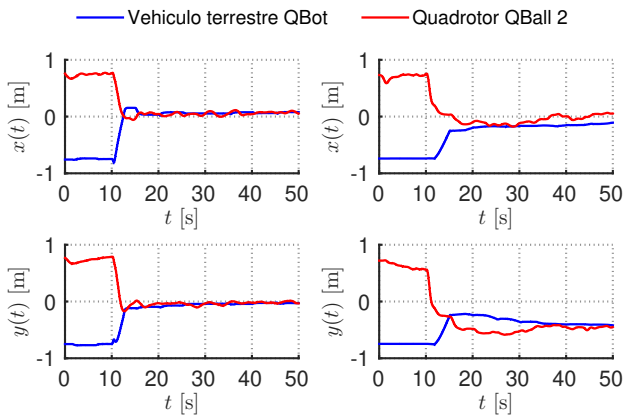
Las figuras 5-7 muestran el desempeño de ambos esquemas de consenso. En la figura 5 se muestra las trayectorias descritas por los agentes del sistema tanto en el espacio tridimensional como en el plano horizontal. En particular, en las gráficas del plano $xy$ se puede observar como con el consenso no lineal los vehículos se mantienen más cercanos que en el caso del consenso LQR. La evolución de las señales de posición $x_i(t)$ y $y_i(t)$ de los agentes durante los experimentos se muestran en la figura 6. Se puede notar que durante los primeros segundos los vehículos se mantienen separados pero a partir del instante de tiempo $t = 10$ [s] comienzan a acercarse. En estas gráficas se observa que la distancia entre los agentes en cada una de las coordenadas es menor con el esquema no lineal.




a) Consenso control no lineal b) Consenso control LQR

Fig. 5: Rutas descritas por el sistema multi-agente en el espacio tridimensional y en el plano $xy$ durante la tarea de consenso aplicando los controladores no lineales y los basados en LQR.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




a) Consenso control no lineal b) Consenso control LQR

Fig. 6: Evolución temporal de la posición $x_i(t)$ y $y_i(t)$ del sistema multi-agente aplicando los controladores no lineales y los basados en LQR.

Por último, en la figura 7 se muestra el error de consenso $EC(t)$, el cual se define como la distancia euclidiana entre los vehículos del sistema, esto es

$$EC = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

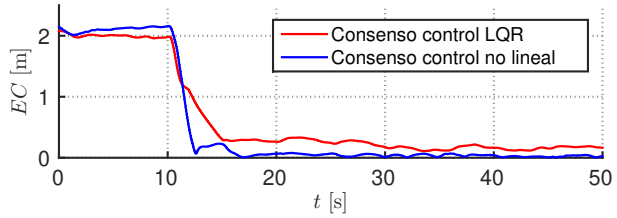



Fig. 7: Evolución temporal del error de consenso $EC(t)$ del sistema multi-agente aplicando los controladores no lineales y los basados en LQR.

Finalmente, con el objetivo de presentar una comparación cuantitativa del desempeño de los esquemas aquí abordados se calcularon los valores RMS (pos sus siglas en inglés Root Mean Square) de las señales de error, tanto de la posición para cada uno de los vehículos $\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t),\ i = 1, 2$ como del error de consenso $EC(t)$, durante el intervalo de tiempo $40\ [\mathrm{s}] \leq t \leq 50\ [\mathrm{s}]$, período en el cual el sistema ha alcanzado su estado estable. Como se puede observar en todos las señales de error, el esquema propuesto produce valores más pequeños.

| | $EC(t)$ | Vehículo QBot $\tilde{x}(t)$ | $\tilde{y}(t)$ | Quadrotor QBall 2 $\tilde{x}(t)$ | $\tilde{y}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Consenso control LQR | 0.160 | 0.068 | 0.029 | 0.086 | 0.035 |
| Consenso control no lineal | **0.025** | **0.010** | **0.005** | **0.017** | **0.021** |

Tabla I: Valor RMS de las señales del error de consenso de posición en el intervalo de tiempo $40\ [\mathrm{s}] \leq t \leq 50\ [\mathrm{s}]$.

## V. Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de consenso de un sistema multi-agente heterogéneo. Se estudió un protocolo de consenso tomado de la literatura y se detectó que los controladores que garantizan estabilidad asintótica en la tarea regulación de posición también pueden garantizar el consenso. Se desarrolló un controlador no lineal con compensación del modelo para el quadrotor el cual asegura estabilidad asintótica. Se realizó la validación experimental de la propuesta de control y del esquema de consenso con un sistema de dos agentes conformado por un vehículo terrestre de dos ruedas y un quadrotor. El desempeño de la propuesta fue comparada con el esquema estudiado de la literatura obteniendo resultados superiores con el nuevo esquema de consenso.

## Referencias

[1] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, y Y. Zhong, "Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies," *Control Engineering Practice*, vol. 46, pp. 26–36, 2016.

[2] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, y Y. Zhong, "Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 6, pp. 5014–5024, 2016.

[3] A. Aghaeeyan, F. Abdollahi, y H. A. Talebi, "UAV–UGVs cooperation: With a moving center based trajectory," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 63, pp. 1–9, 2015.

[4] C. A. Rabbath y N. Léchevin, "Coverage with a team of wheeled mobile robots," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 78, no. 3-4, pp. 553–575, 2015.

[5] W. Ren, "Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations," *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 505–512, 2007.

[6] H. Lee y H. J. Kim, "Constraint-based cooperative control of multiple aerial manipulators for handling an unknown payload," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 13, no. 6, pp. 2780–2790, 2017.

[7] Y. Zheng, Y. Zhu, y L. Wang, "Consensus of heterogeneous multi-agent systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 16, pp. 1881–1888, 2011.

[8] E. G. Rojo-Rodriguez, O. Garcia, E. Ollervides, P. Zambrano-Robledo, y E. Espinoza-Quesada, "Robust consensus-based formation flight for multiple quadrotors," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 93, no. 1-2, pp. 213–226, 2019.

[9] B. Mu, K. Zhang, y Y. Shi, "Integral sliding mode flight controller design for a quadrotor and the application in a heterogeneous multi-agent system," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 12, pp. 9389–9398, 2017.

[10] B. Mu y Y. Shi, "Distributed LQR consensus control for heterogeneous multiagent systems: Theory and experiments," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 23, no. 1, pp. 434–443, 2018.

[11] C. Godsil y G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, vol. 207. Springer Science & Business Media, 2013.

[12] D. Diaz y R. Kelly, "On modeling and position tracking control of the generalized differential driven wheeled mobile robot," in *Proc. IEEE International Conference on Automatica*, Curico, Chile, pp. 1–6, 2016.

[13] Y. Wang, Z. Miao, H. Zhong, y Q. Pan, "Simultaneous stabilization and tracking of nonholonomic mobile robots: A Lyapunov–based approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 4, pp. 1440–1450, 2015.

[14] W. E. Dixon, D. M. Dawson, E. Zergeroglu, y A. Behal, *Nonlinear control of wheeled mobile robots*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 262. London: Springer, 2001.

[15] J. Kim, M.-S. Kang, y S. Park, "Accurate modeling and robust hovering control for a quadrotor VTOL aircraft," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 57, no. 1, pp. 9–26, 2010.

[16] J. Moreno-Valenzuela, R. Pérez-Alcocer, M. Guerrero-Medina, y A. Dzul, "Nonlinear PID-type controller for quadrotor trajectory tracking," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 23, no. 5, pp. 2436–2447, 2018.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 2

## *Instrumentación, teleoperación y robótica educacional*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# FPGA implementation of an unstable dissipative system and generalized Lorenz system synchronization scheme*

Jesus R. Pulido–Luna
*Tecnológico Nacional de México*
*Instituto Tecnológico de Tijuana*
Tijuana, México
jesus.pulido19@tectijuana.edu.mx

Jorge A. López–Rentería
*CONACyT / Tecnológico Nacional de México*
*Instituto Tecnológico de Tijuana*
Tijuana, México
jorge.lopez@tectijuana.edu.mx

Nohe R. Cazarez–Castro
*Tecnológico Nacional de México*
*Instituto Tecnológico de Tijuana*
Tijuana, México
nohe@ieee.org

***Abstract*—Chaos synchronization is useful in problems related to robot manipulation. This work proposes a master–slave synchronization configuration to synchronize an UDS defined in four parts and a classical Lorenz system defined in one part. The control law is designed considering the error state feedback with a Lyapunov function to guarantee stability. The control law proposed is implemented in a FPGA in order to test the performance.**

***Index Terms*—Chaos, synchronization, UDS, Lorenz, FPGA**

## I. Introduction

FPGA are useful because of their flexibility and speed in the implementation of new designs no matter the application. Chaotic systems like the one discovered by E. Lorenz in [1] have been implemented in FPGA (see [2]–[4]) however the implementation of the synchronization of this kind of systems is a highly analyzed topic in the last years. This is due to the common misconception that this type of systems cannot be synchronized due to the complexity of their dynamics. This has been disprove by Pecora and Carroll in [5], where a methodology for the synchronization of two chaotic systems in a master-–slave scheme is presented, this configuration allows the slave system to be controlled to follow the dynamics of the independent master system. Since then, multiple alternatives for chaos synchronization have been presented [6]–[9] and this allows a vast quantity of applications in science and engineering, from optics [10], [11], physics [12], [13], biology [14], [15], secure communications [16], and robotics [17], [18].

The synchronization of chaotic systems is a very explored topic in literature, but one of the more substantial drawbacks that all schemes have in common is the complex electronic implementation. It is important to define appropriate methodologies for the application of this class of strategies. Here reconfigurable hardware systems are useful because they allow flexibility of being able to implement multiple synchronization schemes and make experimental tests without the need to implement new hardware in each implementation. Efforts of this type have been made already in [19], altho the majority of applications only consider homogeneous systems.

The main contribution of this work is the design and implementation of a synchronization scheme that consider systems defined in different number of pieces, which means that the master system and the slave system do not present the same behavior through time, the master system is defined as a piecewise system with $n$ parts, while the slave system is defined in a single part.

The rest of this work is divided in the following way: in the Section II the systems with which we will work are presented and a brief description of them is given; In Section III the synchronization scheme is presented, including the methodology; in Section IV the implementation of one of the scheme in an FPGA is presented and the results obtained are shown; finally in Section V the conclusions are presented.

## II. Preliminaries

This section presents in a non exhaustive way the dynamics of the systems that will be used for the master–slave synchronization scheme.

### A. The generalized Lorenz system

Consider the generalized Lorenz system (GLS) defined in [20] as

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad (1)$$

where $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Four typical chaotic systems can be obtained from (1) but in this work only the classical Lorenz system will be considered with $a_{12} = -a_{11} = a$, $a_{21} = c$, $a_{22} = -1$ and $a_{33} = -b$. Where $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

### B. Unstable dissipative systems

Now consider a dynamical system defined as

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ b_{k3} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

*This work was supported by CONACyT grant number A1–S–32341, TecNM grant number 8085.20-P and a master degree scholarship for Jesus R. Pulido–Luna.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

where $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ and $b_{ki}$, $i = 1, 2, 3$, contains a switching law of the form

$$b_{ki} = \begin{cases} b_{1i} & if \quad y \in D_1, \\ b_{2i} & if \quad y \in D_2, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{ki} & if \quad y \in D_k, \end{cases} \tag{3}$$

where $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ and $\bigcap_{j=1}^{k} D_j = \emptyset$.

*Definition 1 (Campos–Cantón et al. [21]):* A system defined by (2) with eigenvalues $\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$ is said to be an unstable dissipative system (UDS) type I, if $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i < 0$ with one eigenvalue $\lambda_i$ being negative real and the other two are complex conjugated with positive real part, and is said to be UDS type II if one of its eigenvalues is positive real and the other two are complex conjugated with negative real part.

## III. Synchronization Scheme

Consider the master system as

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ b_{k3} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

while the slave system is

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + u, \tag{5}$$

where $u = (u_1, u_2, u_3)^T$. If the error vector is defined as $\xi = x - y$, is possible to obtain

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ & - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ b_{k3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

In order to stabilize the error system, the proposed Lyapunov function is

$$L = \frac{1}{2} \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \right). \tag{7}$$

Whose derivative is

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \xi_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - \alpha_{11} y_1 - \alpha_{12} y_2 - \alpha_{13} y_3 \\ & - b_{k1} + u_1) + \xi_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - x_1 x_3 \\ & - \alpha_{21} y_1 - \alpha_{22} y_2 - \alpha_{23} y_3 - b_{k2} + u_2) \\ & + \xi_3 (a_{33} x_3 + x_1 x_2 - \alpha_{31} y_1 - \alpha_{32} y_2 - \alpha_{33} y_3 \\ & - b_{k3} + u_3). \end{aligned} \tag{8}$$

Which allows to design the control law as

$$\begin{aligned} u = & - \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3^2 \end{pmatrix} \xi - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ b_{k3} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ is the error vector.

## IV. FPGA Implementation

For the implementation of the synchronization scheme, the selected piecewise UDS is given in [22] presents a four scrolls attractor and it is defined as

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35.1 & -8.2 & -3.7 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_k \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where $B_k$ is given by

$$B = \begin{cases} 21.09 & if \quad y_1 > 0.5, \\ 14.06 & if \quad 0.3 < y_1 \leq 0.5, \\ 7.03 & if \quad 0.1 < y_1 \leq 0.3 \\ 0 & if \quad y_1 \leq 0.1, \end{cases} \tag{11}$$

and the slave system is

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -16 & 16 & 0 \\ 45.6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + u. \tag{12}$$

Using the synchronization scheme described in the Section III, the control law is defined as

$$\begin{aligned} u = & - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xi - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35.1 & -8.2 & -3.7 \end{pmatrix} y \\ & + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -16 & 16 & 0 \\ 45.6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x \\ & - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_k \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

which will be implemented in a Spartan–3AN FPGA Starter Kit board from Xilinx, in the Fig. 1 the general scheme can be appreciated. It can be seen in (a) the Spartan–3AN Starter Kit board in which the master system is implemented; in (b) the slave system is implemented along the control law of (13); in (c) the Digital to Analog Converter (DAC) and in (d) the output data is acquired.

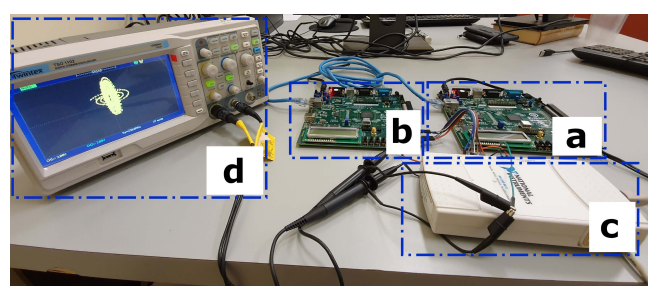



Fig. 1. Synchronization scheme using two Spartan–3AN Starter Kit boards: (a) Master system. (b) Slave system. (c) DAC. (d) Data acquisition.

In order to implement the synchronization scheme in the SPARTAN-3AN starter kit, the Simulink® toolbox *Xilinx System Generator* was utilized. An example of it can be

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

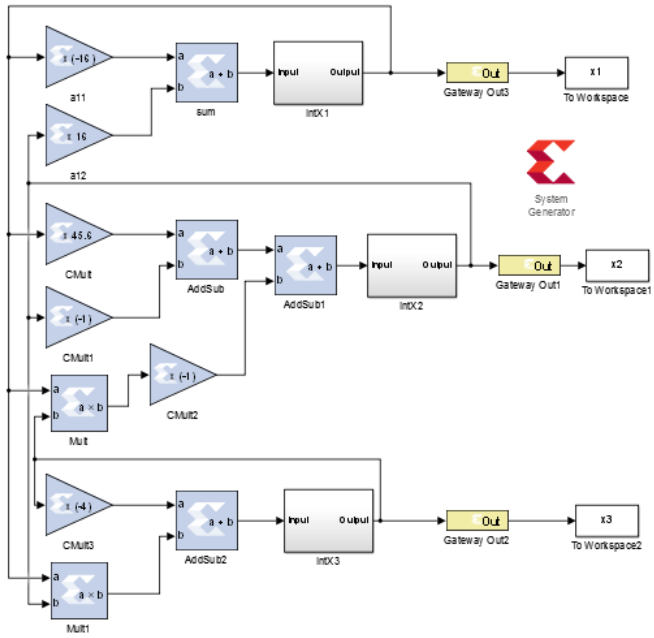



Fig. 2. Classical Lorenz system implemented in Simulink® using the *Xilinx System Generator* toolbox.

observed in the Fig. 2 which contains the classical Lorenz system without any kind of control.

When implementing the master system in the FPGA, it is possible to acquire the signal using the DAC from the National Instruments module NI-6211. The plane projections $(y_1, y_2)$ and can be seen on the Fig. 3

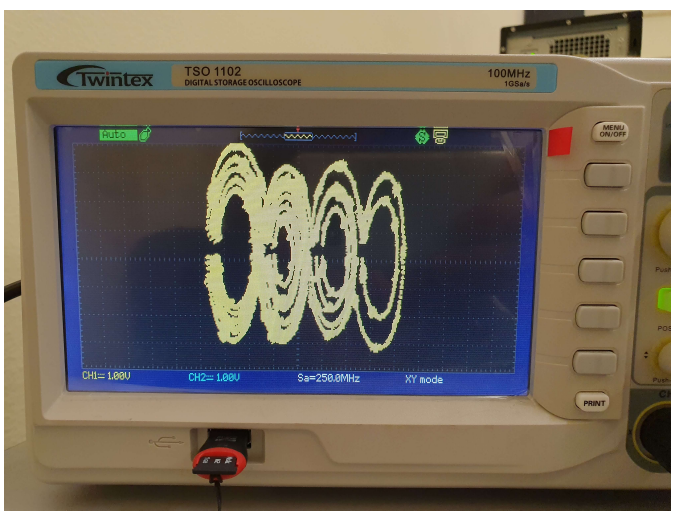



Fig. 3. Projection on the plane $(y_1, y_2)$ acquired from the master system.

As well, the projections on the plane $(y_1, y_3)$ and $(y_2, y_3)$ were obtained and can be appreciated in the Fig. 4 and Fig. 5.

For the uncontrolled slave system the projection on the plane $(x_1, x_2)$ was obtained and can be seen in the Fig. 6 and the projection on the planes $(x_1, x_3)$ and $(x_2, x_3)$ are shown in the Fig. 7 and Fig. 8. Is important to highlight that the slave

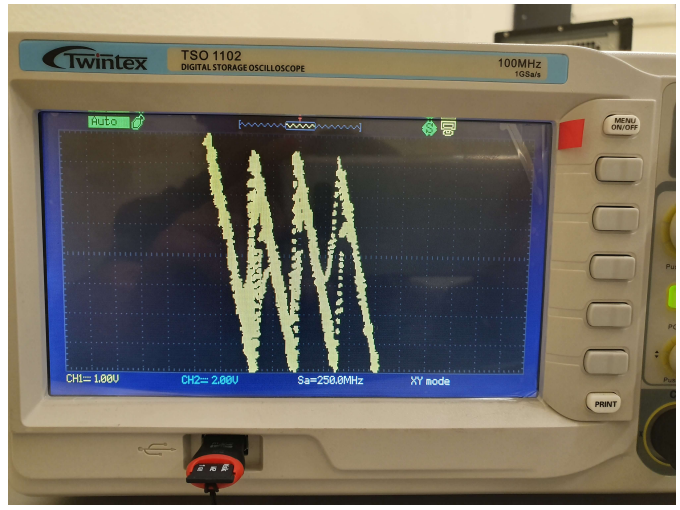



Fig. 4. Projection on the plane $(y_1, y_3)$ acquired from the master system.


Fig. 5. Projection on the plane $(y_2, y_3)$ acquired from the master system.

system present an attractor with two scrolls while the master system presents four, once implemented the control law, the slave system should take the form of the master system.

Finally, for the synchronized slave system the same plane projections were obtained $(x_1, x_2)$, $(x_1, x_3)$, $(x_2, x_3)$ and all of them can be appreciated in the Fig. 9, the Fig. 10 and the Fig. 11 respectively.

## V. Conclusions

A master–slave synchronization scheme of an UDS–Lorenz was implemented in a FPGA, this synchronization scheme can synchronize two systems defined in a different number of pieces, which allows the use in a wide variety of applications in science and engineering. The synchronization scheme gives to the slave system a the dynamics of the master system. The synchronization scheme is designed taking into account the error system between the master and the slave, adding a parameter matrix P that controls the synchronization speed,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

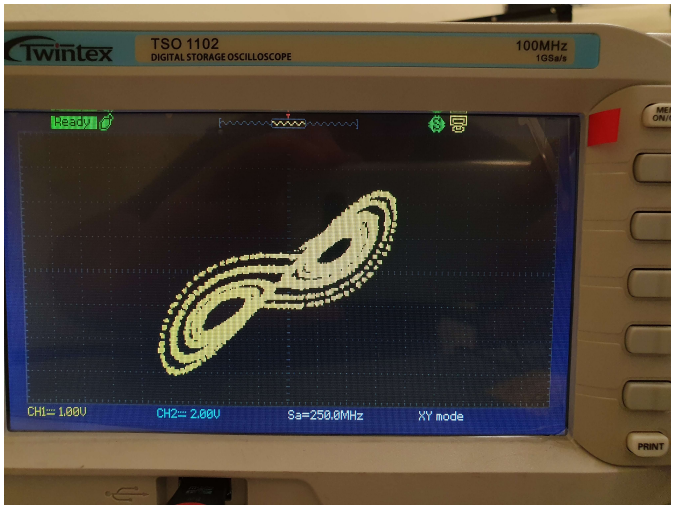



Fig. 6. Projection on the plane $(x_1, x_2)$ acquired from the uncontrolled slave system.

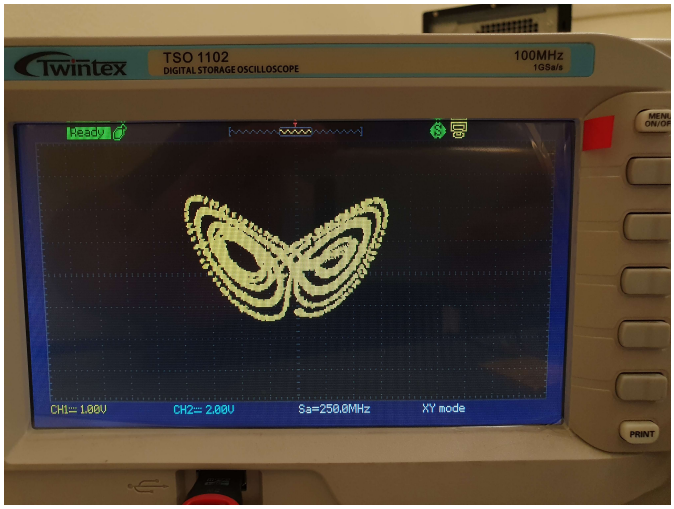



Fig. 7. Projection on the plane $(x_1, x_3)$ acquired from the uncontrolled slave system.

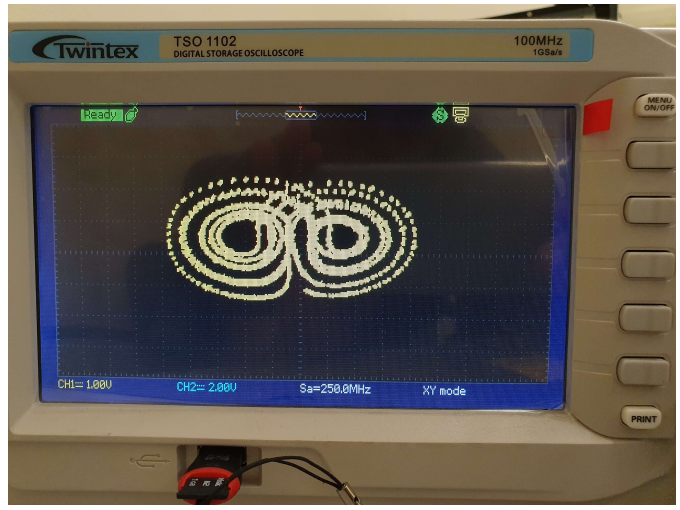



Fig. 8. Projection on the plane $(x_2, x_3)$ acquired from the uncontrolled slave system.

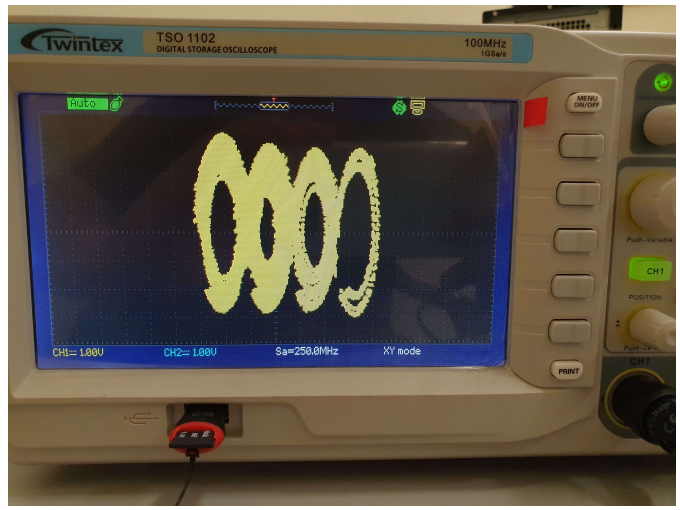



Fig. 9. Projection on the plane $(x_1, x_2)$ acquired from the synchronized slave system.

whenever the parameter is adequate, the controller guarantees a fast synchronization with a minimum error.

## Acknowledgment

J.R.P.-L. would like to thank CONACyT for the master's degree scholarship.

## References

[1] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963. [Online]. Available: https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020¡0130:DNF¿2.0.CO;2

[2] I. Koyuncu, A. T. Ozcerit, and I. Pehlivan, "Implementation of fpga-based real time novel chaotic oscillator," *Nonlinear Dynamics*, vol. 77, pp. 49–59, 2014. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s11071-014-1272-x

[3] A. D. Pano-Azucena, E. Tlelo-Cuautle, G. Rodriguez-Gomez, and L. G. de la Fraga, "Fpga–based implementation of chaotic oscillators by applying the numerical method based on trigonometric polynomials," *AIP Advances*, vol. 8, no. 7, p. 075217, 2018. [Online]. Available: https://doi.org/10.1063/1.5038583

[4] T. Tami, T. Messaoudene, A. Ferdjouni, and O. Benzineb, "Chaos secure communication' implementation in fpga," in *2018 International Conference on Applied Smart Systems (ICASS)*, 2018. [Online]. Available: https://doi.org/10.1109/ICASS.2018.8652046

[5] L. M. Pecora and T. L. Carrol, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, 1990. [Online]. Available: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821

[6] J. H. Park, "Chaos synchronization between two different chaotic dynamical systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 27, no. 2, pp. 549–554, 2006. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.049

[7] X. Wu, G. Chen, and J. Cai, "Chaos synchronization of the master–slave generalized lorenz system via linear state error feedback control," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 229, no. 1, pp. 52–80, 2007. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.03.014

[8] S. Oancea, F. Grosu, A. Lazar, and I. Grosu, "Master–slave synchronization of lorenz systems using a single controller," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 41, no. 5, pp. 2575–2580, 2009. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.038

[9] J. H. Pérez, M. Figueroa, A. López, and S. Rodríguez, "Synchronization of chaotic akgul system by means of feedback llinearization and pole placement," *IEEE Latin America Transactions*,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

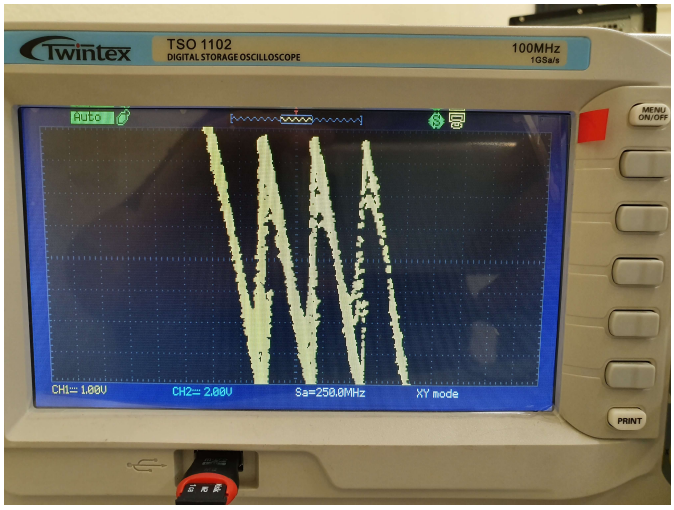



Fig. 10. Projection on the plane $(x_1, x_3)$ acquired from the synchronized slave system.

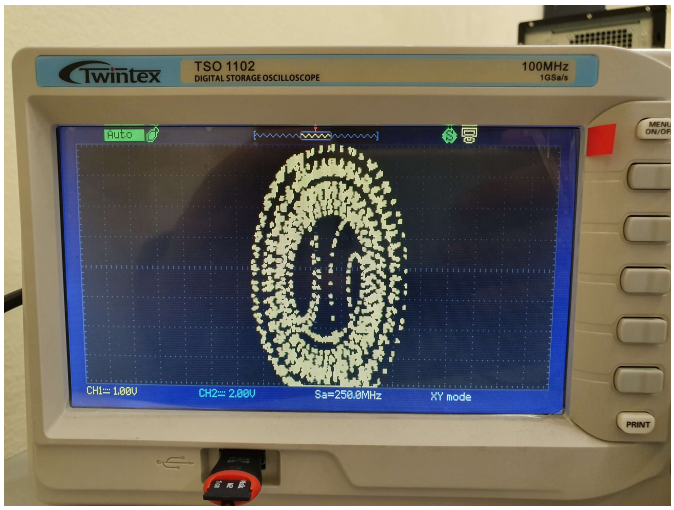



Fig. 11. Projection on the plane $(x_3, x_3)$ acquired from the synchronized slave system.

vol. 15, no. 2, pp. 249–256, 2017. [Online]. Available: https://doi.org/10.1109/TLA.2017.7854619

[10] G. Yuan, X. Zhang, and Z. Wang, "Generation and synchronization of feedback–induced chaos in semiconductor ring lasers by injection–locking," *Optik*, vol. 125, no. 8, pp. 1950–1953, 2014. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.11.007

[11] L. Wang, Z. M. Wu, J. G. Wu, and G. Q. Xia, "Long–haul dual–channel bidirectional chaos communication based on polarization–resolved chaos synchronization between twin 1550 nm vcsels subject to variable–polarization optical injection," *Optics Communications*, vol. 334, pp. 214–221, 2015. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2014.08.041

[12] B. A. Idowu and U. E. Vincent, "Synchronization and stabilization of chaotic dynamics in a quasi-1d bose-einstein condensate," *Journal of Chaos*, vol. 2013, p. 723581, 2013. [Online]. Available: https://doi.org/10.1155/2013/723581

[13] S. Vaidyanathan, "Anti-synchronization of rikitake two-disk dynamo chaotic systems via adaptive control method," *International Journal of ChemTech Research*, vol. 8, no. 9, pp. 393–405, 2015.

[14] Z. Qu, "Chaos in the genesis and maintenance of cardiac arrhythmias," *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, vol. 105, no. 3, pp. 247–257, 2011. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2010.11.001

[15] F. J. Abrego and J. L. Moiola, "Lyapunov exponent analysis applied to a hyperchaotic prey-predator model," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 11, no. 1, pp. 230–235, 2013. [Online]. Available: https://doi.org/10.1109/TLA.2013.6502808

[16] N. Smaoui, A. Karouma, and M. Zribi, "Adaptive synchronization of hyperchaotic chen systems with application to secure communication," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 9, no. 3, pp. 1127–1144, 2013.

[17] A. Zhu and H. Leung, "Cooperation random mobile robots based on chaos synchronization," in *2007 IEEE International Conference on Mechatronics*, 2007, pp. 1–5. [Online]. Available: https://doi.org/10.1109/ICMECH.2007.4280039

[18] L. Moysis, E. Petavratzis, M. Marwan, C. Volos, H. Nistazakis, and S. Ahmad, "Analysis, synchronization, and robotic application of a modified hyperjerk chaotic system," *Complexity*, vol. 2020, p. 2826850. [Online]. Available: https://doi.org/10.1155/2020/2826850

[19] Q. Wang, S. Yu, C. Li, J. Lü, X. Fang, and J. M. Bahi, "Theoretical design and fpga-based implementation of higher-dimensional digital chaotic systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 63, no. 3, pp. 401–412, 2016. [Online]. Available: https://doi.org/10.1109/TCSI.2016.2515398

[20] S. Celikovský and G. Chen, "On a generalized lorenz canonical form of chaotic systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 8, pp. 1789–1812, 2002. [Online]. Available: https://doi.org/10.1142/S0218127402005467

[21] E. Campos-Cantón, J. G. Barajas-Ramírez, G. Solís-Perales, and R. Femat, "Multiscroll attractors by switching systems," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 20, no. 1, p. 013116, 2010. [Online]. Available: https://doi.org/10.1063/1.3314278

[22] E. C. Diáz-González, B. Aguirre-Hernández, J. A. López-Rentería, E. Campos-Cantón, and C. A. Loredo-Villalobos, "Stability and multiscroll attractors of control systems via the abscissa," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, p. 6743734, 2017. [Online]. Available: https://doi.org/10.1155/2017/6743734

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Time delay compensation in a bilateral teleoperation system

1st Carlos Gómez-Rosas, 2st Rogelio J. Portillo-Veléz
*Facultad de Ingeniería de la Construcción y el Hábitat*
*Universidad Veracruzana*
Veracruz, México
1st iecgomezrosas@gmail.com, 2st rportillo@uv.mx

***Abstract*—Time delay is a relevant factor in the performance of teleoperation systems. In this work, an experimental 1-DOF testbed has been designed and built. It considers brushless motors as actuators for a master and a slave rotational robots. Architectures torque-velocity and current-velocity are proposed and evaluated in the experimental testbed aplying the wave variable approach. Simulations and experimental results shows that is possible represent the proposed architectures with the basic compensators, based on wave variables, which allows the teleoperation system to compensate the time delay effect and maintain stable behavior.**

***Index Terms*—Time delay, wave variables, Torque, Current.**

## I. Introduction

The bilateral teleoperation systems were conceived as tools that allow perform tasks to the humans in remote sites of hard access or dangerous enviroments. The development of these systems has severals aplications like espacial exploration [1], tele surgery in medicine [2], [3], rescue [4], for example. These systems consist of the master robot, the slave robot and the communications channel. The master robot has the function of interact with the human operator, translate his intructions into control information and send it to the slave robot. This activity is developed making use of the communications channel, that has the function of carrying the infomation in bidirectional way. The slave robot tries to follow the received instructions and interact with the remote environment, in such a way it feeds back information about this interaction to the master robot. This information allows the human operator to make decisions and to apply corrections when it is necessary. The control architecture for these systems, in this case called teleoperation architecture, is defined according the information to interchange betwen the master robot and the slave robot, and it may be position, velocity, force, etc. According to [5], the stability and the transparency are the most important parameters to develop in a teleoperation system, while the former is more important than the latter.

One problem of the teleoperation control systems is the time delay, according to [6] it can mainly affect more than others parameters of its model and is still resistant to many "classical controllers", being cause of system instability. The time delay is intrinsic to any teleoperation system, particularly to the communication channel or as a part of its control desing. In the case of teleoperated systems, the time delay has its origin in the communications channel mainly. Some of the first works that reported the efects of time delay in bilateral teleoperation like [7], considered the "move and wait" technique like an option for perform the entrusted task in secuencial form. Then in [8], Ferrel and Sheridan presentented the supervised control to approach the inestability problem caused by time delay. This control stategy limits the interaction betwen master robot and slave robot, provides limited autonomy to the slave robot to perfom small tasks and then updates the instructions or guides the slave robot in the remote site directly. Another approach used to deal with this problem is the "predictive control". This type of control has the characteristic of approximating a response in the future whenever some parameter of the same is known in advance. The drawback of this approach is the degree of accuracy presented by the considered model, this determines the certainty that the predictions of the future outputs of the system will possess. An important development of this approach has been the Smith predictor [9], used to mitigate the effect of time delay in teleoperation systems and on wich multiple variants have been made as in [10].

A different methodology is the passivity approach presented by Anderson and Spong [11], in wich the system is modeled as a two-port cascading network. This networks can shown the relationship betwen force and velocity as in [12]. In this case, emphasis is placed on the inputs and outputs, but no on the internal states of the system. Passivity theory holds that a system is considered passive if it can absorb or dissipate more energy than it receives, that is, it does not provide energy beyond that initially stored. According to the above and the work done such as Lawrence [5], Ryu, Kwon y Hannaford [13], passivity is a sufficient condition to guarantee the stability of the teleoperation system. An important concept for analyzing stability is the scattering operator, [14], from which it is established that the necessary and sufficient passivity condition in a teleoperation system is that the module of the dispersion matrix does not exceed unity. This guarantees the stability of a teleoperation system as long as it remains passive. From the passivity theory the wave variables approach is derived, which seeks to keep the bilateral teleoperation system stable against time delay in the communication channel, making the system passive. To achieve this, a transformation of power information (velocity and force) is made into wave variables that make the system passive and therefore allow it

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

to be stable in the presence of time delay.
In the work presented here, a torque-velocity architecture is evaluated and it is also proposed to use an architecture that exchanges current and velocity in an analogous way. The proposed architectures are implemented on an experimental bilateral teleoperation testbed. The rest of the paper is organized as follows, in section II the classical architecture involving wave variable compensators is described. In section III, the teleoperation system to be implemented is modeled (master and slave robots). Section IV describes the schematic of the proposed architectures, then in section V the results of the experiments are presented and finally in section VI the conclusions of this work are reported.

## II. Wave Variable Approach

This approach is an extension of the passivity theory [15], by G. Niemeyer and J.Slotine. The power flow is redefined in a teleoperation system based on a force-velocity scheme as shown in (1).

$$P = \dot{x}F = \frac{1}{2}u^T u - \frac{1}{2}v^T v \tag{1}$$

$P$ is the power as a product of the velocity $\dot{x}$, and the force $F$. But also as a result of the difference between the power that flows from the input to the output of the system $u$, and the power that is reflected from the output to the input $v$, in terms of wave variables. The compensating blocks resulting from this theory are shown in Fig.1, coupled to the communication channel where the information to be transmitted is encoded in wave variables. In this figure, $\dot{x_m}$ is the the master robot velocity, $\dot{x_{ds}}$ is the velocity desired on the slave robot, $F_s$ is the slave robot force generated as a result of the interaction with the enviroment and $F_m$ is the slave force that arrives to the master robot. The variables $u, v$ are calculated from the power variables $\dot{x}, F$, using the transformations shown in 2 and 3.

$$u = \frac{b\dot{x} + F}{\sqrt{2b}} \tag{2}$$

$$v = \frac{b\dot{x} - F}{\sqrt{2b}} \tag{3}$$

In these expressions, $b$ is the characteristic wave impedance and can be a positive constant or a positive and symmetric definite matrix. It is an adjustable parameter and its modification generates different system behaviors. The wave transformation is always reversible as a shown in (4) and (5).

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2b}}(u + v) \tag{4}$$

$$F = \sqrt{\frac{b}{2}}(u - v) \tag{5}$$

The advantage of the wave variable approach is that if the output variable suffers a time delay, its power is temporarily stored without any change in passivity, and therefore in its stability. Conversely, if none compensation strategy is used, the effect of this event on the passivity of the system is unpredictable.

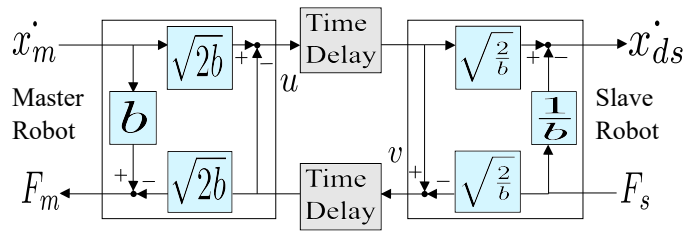



Fig. 1. Transformation of power variables to wave variables in the communication channel.

## III. 1 Degree of freedom teleoperation system model

The experimental testbed under which the respective tests were carried out integrates a computer with Matlab® Simulink, 1 Sensoray® 626 data acquisition board, 2 ESCON 50/5® servo controllers, 1 PCB interface, 1 power supply, 1 test structure and 2 robots (master and slave), built from a BLDC maxon® motor and its respective joint and link.
The teleoperation architecture to be evaluated is placed in a schematic in which the algorithm that controls the master robot and the slave robot are captured. Using Windows® Real Time Target and the Sensoray® 626 card it is possible to run the algorithm in real time at a sampling rate of 1khz. The PCB interface allows establishing synergy between the power supply, the servo controllers and the data acquisition board, for the respective exchange of sensor and control signals. Fig.2 shows the elements that incorporate the experimental one degree of freedom bilateral teleoperation testbed.

### A. Mathematical modelling of the motor

Before the implementation of teleoperation architectures, the electric motor was modeled to obtain a transfer function that describes its behavior. In the specific case of the available motors, this transfer function responds to the operating modes available for the servo-motor system because its control architecture is closed. For this reason, it was chosen to operate in the "current regulator" mode, in which a set current is applied to the servo controller and this seeks to replicate it in the BLDC motor, while generating a velocity response.

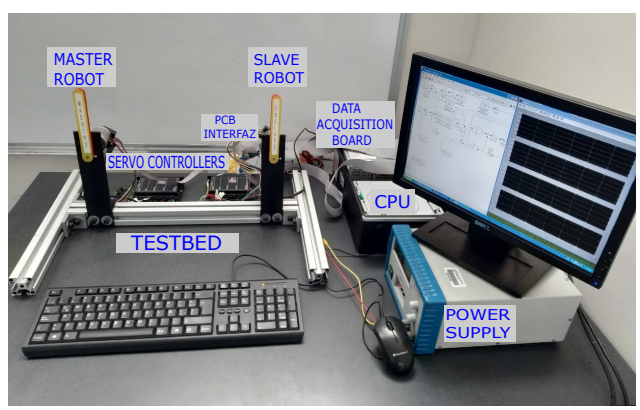



Fig. 2. Experimental testbed.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE I
ENGINE PARAMETERS AND VARIABLES

| | |
|---|---|
| L | Inductance of armature ($0.00018H$) |
| $i_a$ | Armature current ($A$) |
| $u(t)$ | Applied armature voltaje ($V$) |
| $e_b$ | Back emf ($V$) |
| $R$ | Resisteance of armature ($0.343\Omega$) |
| $T_m$ | Torque developed by the motor ($Nm$) |
| $T_l$ | External load torque ($Nm$) |
| $J_m$ | Moment of inertia of motor ($2.42 * 10^{-6} Kgm^2$) |
| $B$ | Equivalent viscous friction coefficient of motor ($5.589 * 10^{-6} Nm/(rad/s)$) |
| $w$ | Angular velocity of motor ($rad/s$) |
| $k_t$ | Motor torque constant ($0.0167Nm/A$) |
| $K_b$ | Back emf constant ($0.0167V/(rad/s)$) |

It is possible to approximate the behavior of a BLDC motor using the modeling equations for a DC motor, as in [16] and as exemplified by the manufacturer in [17]. The equation (6) contains the expression for the voltage mesh, in addition the table I shows the parameters and variables used.

$$u(t) = Ri_a(t) + L\frac{di_a(t)}{dt} + e_b \tag{6}$$

The Back Electromagnetic Field (EMF) $e_b$, is proportional to the angular velocity $w$, as show in (7).

$$e_b = k_b w(t) \tag{7}$$

The torque balance is described by (8).

$$T_m - T_l = J_m\frac{dw}{dt} + Bw(t) \tag{8}$$

The torque developed by the motor $T_m$, is proportional to the armature current as indicated in (9).

$$i_a = \frac{T_m}{k_t} \tag{9}$$

Replacing (7) in (6) and (9) in (8), we optain (10) and (11), which model the motor as a function of current and velocity.

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L}u(t) - \frac{R}{L}i_a(t) - \frac{k_b}{L}w(t) \tag{10}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{k_t}{J_m}i_a(t) - \frac{B}{J_m}w(t) - \frac{1}{J_m}T_l \tag{11}$$

The velocity response using these equations agrees with the expected response for a nominal voltage of 18 volts, however the PI control scheme used to model the servo controller presented deviation from the actual behavior. It is assumed that there is no direct proportionality between the current and the velocity response, due to the internal control scheme of the servo controller. As an alternative, algebraic parameter identification procedure using [18] was used. In this process an input current signal test was aplied to de motor, then, with the available sensors the velocity response was monitored in real time until found a consistent values of the parameters that allows build a first orden transfer function for model the motor behavior. The transfer function obtained is shown in (12), in terms of current and velocity. This function takes the form of (11), if it is rewritten in terms of velocity over current in the frequency domain.

$$G(s) = \frac{6015}{s + 5.69} \tag{12}$$

### B. Master and slave robot

According to the force-velocity architecture of a teleoperation system using the wave variable approach, the master robot interacts with the human operator and transforms its stimuli into velocity signals that are sent to the slave robot. Taking this into account, the expression presented in (12) models the behavior of the master robot. In the case of the slave robot, the same expression of the master robot is used by coupling a PD controller, (13), to improve velocity tracking.

$$C_{PD} = \frac{Bs + K}{s} \tag{13}$$

Where $B$ is the equivalent of a derivative gain $k_d$ and $K$ equals an proporcional gain $k_p$. In this case, the controller input is a velocity reference and its output is a proportional signal that stimulates the desired velocity response in the slave robot.

## IV. PROPOSED TELEOPERATION ARCHITECTURES

### A. Torque-Velocity

To implement the time delay compensation in the experimental system of one degree of freedom using wave variables, it is necessary to adapt the original force-velocity architecture to the variables available in this system. This results in the proposed torque-velocity architecture, where in the absence of force sensors it is possible to calculate the torque generated in the motor using (9) and the current signal provided by the servo controller board. In such a way that the proper units of this architecture will be Newton meter and radians over second, respectively. For this reason it is necessary to add a current to torque converter and vice versa, to be able to work with the electric motor model obtained in (12). Fig.3 presents the schematic of this architecture to be implemented in the testbed. $\dot{x_s}$ is the slave velocity, $T_s$ is the torque developed for the slave in the remote site and $T_m$ is the torque signal that arrives to the master robot. In the proposed configuration, the interaction of the human operator is simulated as a torque step that produces a certain velocity in the master robot, this is encoded in wave variables and decoded when received in the slave robot. This robot reproduces the setpoint generating a torque response when interacting with the remote environment, which is fed back to the master robot to provide haptic sensation to the operator.

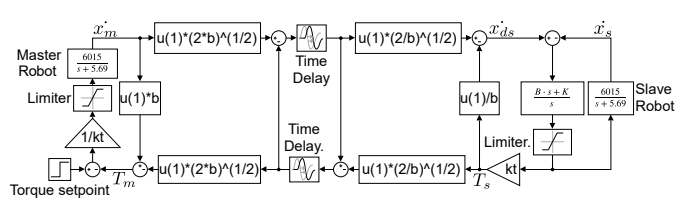



Fig. 3. Torque-Velocity Simulnk architecture under wave variable focus.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

### B. Current-Velocity

In observance of the architecture presented in section IV-A and the wave variables approach, it is analogously proposed to evaluate a current-velocity architecture in the experimental teleoperation system. The operation of this architecture proposes the transmission of current signals (in Amperes), instead of torque signals. It is possible to implement this configuration since the motor current maintains a relationship proportional to the torque, (9). So the transmission of a current signal is analogous to the transmission of a scaled signal of torque.
The conversions to wave signals shown in (2) and (3), allow the encoding of the current signal, since by treating it as a torque scaling it is possible to maintain the concept of power signals, criterion used in the wave variable approach for time delay compensation. Another favorable point to consider is that due to the characteristics of the robot model shown in (12), a current setpoint can be used directly on this function, eliminating the need to perform signal conversion. Fig.4 shows the schematic of the current-velocity architecture to be implemented in the experimental testbed. Where $I_s$ is the current developed for the slave in the remote site and $I_m$ is the current signal that arrives to the master robot.
In addition, the proposed architecture implicitly allows the desired torque to be developed in the motor as a direct consequence of the application of current, since it is part of its characteristic behavior. In this case study, both robots use the same motor model and therefore have the same characteristics. This allows the control signals to be exchanged can be transmitted and applied directly. Otherwise, to extend this architecture to different models of master robot and slave robot an adequate scaling of the control signals must be carried out for a suitable correspondence.

## V. Experiments

### A. Implementation

Considering the schematics of Fig.3 and Fig.4, it was possible to establish the necessary conditions to evaluate the proposed architectures on the experimental teleoperation system. The values of the PD controller were heuristically tuned, where B = 0.0062 and K = 0.0025. The value was also established for the input step that simulates the interaction of the human operator, in the case of the torque-velocity architecture a torque step of magnitude of 0.00668 Nm was assigned and in the case of the current-velocity architecture a step of 0.4A was applied, proportionally using (9). It is necessary to emphasize that in the case of teleoperation systems that do not incorporate any methodology for delay compensation, their behavior tends to be unstable, thus saturating the motor output and generating oscilating behaviour. For example, when evaluating the proposed teleoperation architectures without integrating the wave variables approach it is possible to obtain different responses to the presence of time delays. In Fig.5 and Fig.6 the velocity responses for the torque-velocity and current-velocity architectures are shown in the presence of time delays of 0.1s, 0.3s and 1.0s. For small time delay magnitudes the response of the system oscillates and tends to stabilize slowly. Otherwise, when the magnitude of the time delay increases, stability is compromised since the response of both architectures tends to oscillate and to have an exponential growth that is limited only by the restrictions of the servo-controller board. This behavior is undesirable and can cause damage to actuators when pushed to their operating limits.

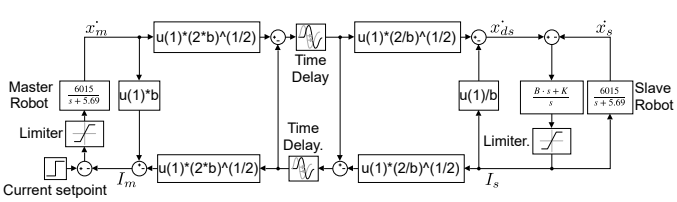



Fig. 4. Current-Velocity Simulink architecture under wave variable focus.

### B. Results

Including a compensation scheme made from the wave variables approach in the teleoperation architecture under analysis, allows the system to maintain stable behavior in the presence of time delays. This has been demonstrated by implementing the architectures proposed in the subsections IV-A and IV-B of the previous section on the experimental testbed. Fig.7 and Fig.8 shows the velocity responses of these architectures, given the existence of 0.7s, 2.0s y 4.0s time delays. In these figures, the master and slave legends represent the veclocitys developed by the master robot and the slave robot. As expected, both architectures compensate the time delay effect, although their responses differ slightly in terms of overshooot and settling time. Fig.9 and Fig.10 shows the responses in torque and current respectively. The slave legend represent the torque or current generated in the slave robot, and the master legend represent the current or torque that reaches the master robot through the communication channel.
Although these responses are not directly compared since

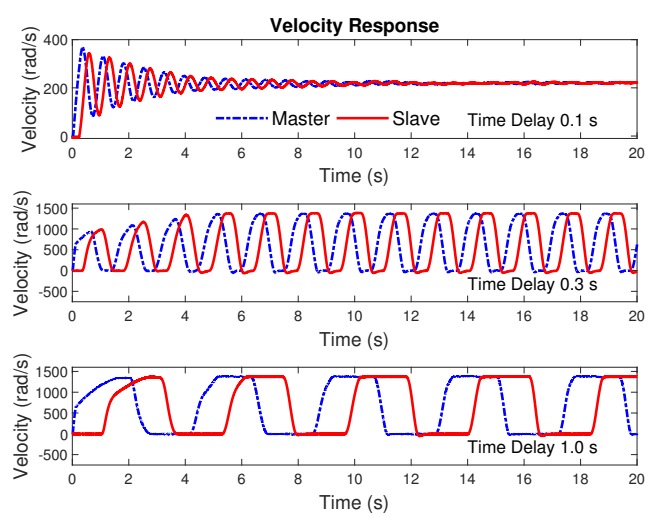



Fig. 5. Responses of uncompensated Torque-Velocity architecture.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

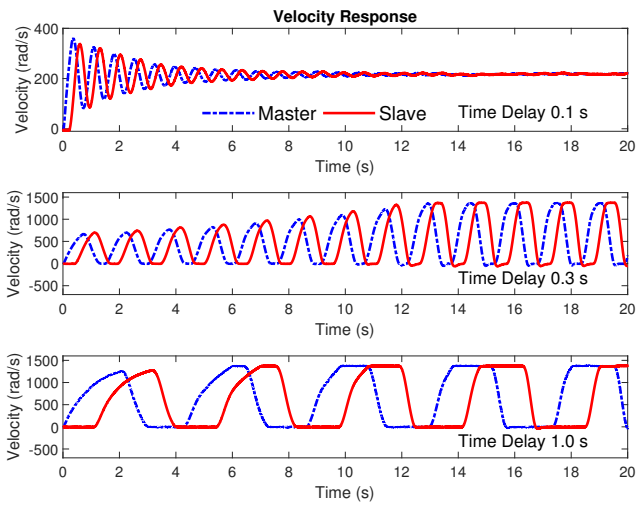



Fig. 6. Responses of uncompensated Current-Velocity architecture.

they have different units, it is clearly visible that the direct use of current as a power variable for its conversion to wave variable is totally valid. The relationship shown in (9) is fully verified if the obtained torque values are divided by the current values obtained. Taking as reference the values of the slave in steady state, the resulting quotient has an approximate value of 0.017 Nm/A, which is very close to the value of the torque constant $k_t$ = 0.0167 Nm/A, provided by the manufacturer. It is necessary to highlight that in the torque-velocity architecture a wave impedance value b=0.00001 was considered while for the current-velocity arquitechture was b=0.001; both manually adjusted values to provided the desired behavior in the system responses. The results presented in this work show the evaluation of the teleoperation architectures in the test bed using symmetric time delays. The use of asymmetric time delays was also approached experimentally and in simulations, deserves further work and will be reported in a new paper. As a result of evaluating this type of time delay the responses of the system maintain a stable behavior, although the time necessary for establishing the response is given as a function of the delay magnitudes used when sending and receiving control information. Therefore, the longer the time delay, the greater the establishment time of the system response.

## VI. Conclusions

In this work it has been possible to experimentally evaluate the behavior of the proposed teleoperation architectures in the previously built testbed. Firstly, the velocity command provided by the master robot has been able to be replicated in the slave robot despite the existence of time delays in the communication channel. It would be expected that when using architectures that were only differentiated by the use of conversion between current signal and torque signal, similar velocity responses would be found as a result of the common variable. As seen in Fig.7 and Fig.8, this does not happen, since there are variations in the overshoot and in the settling time of the responses offered by these architectures. Even in the responses obtained by not using time delay compensation, Fig.5 and Fig.6, it is observed how the speed in the evolution of the response of each architecture is different. Another important observation is that the feedback of force through current and torque signals has verified that the wave variable approach is not restricted to the concept of power variables under which it was designed. As experimental results show, stability is achieved in the responses obtained from the testbed when the wave variables approach is used. In this work, the architectures evaluated were analyzed through movements in free space, so it is proposed as future work to integrate the *environment* variable to the system model to perform and analyze contact tests at the remote site. Likewise, it is proposed

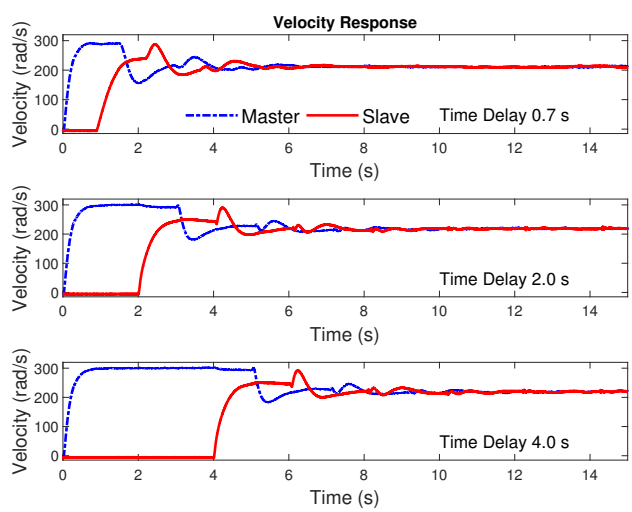



Fig. 7. Velocity responses of the proposed architecture Torque-Velocity for different time delays.

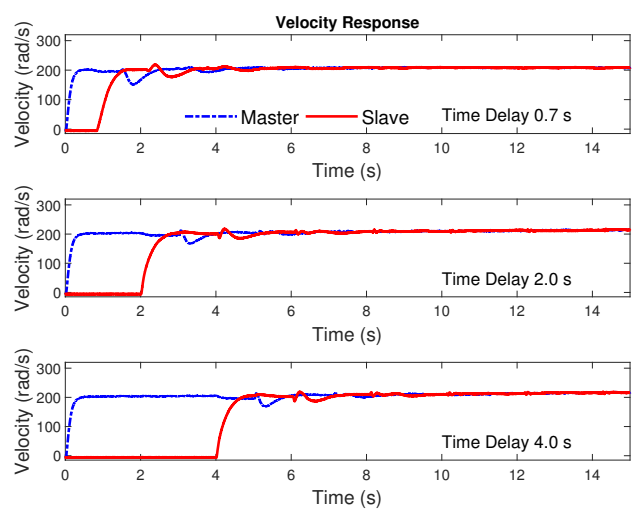



Fig. 8. Velocity responses of the proposed architecture Current-Velocity for different time delays.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

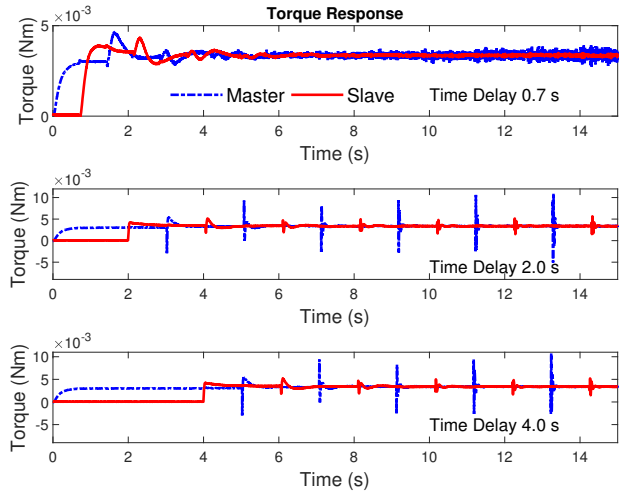



Fig. 9. Torque responses of the proposed architecture Torque-Velocity for diferent time delays.

to use the internet as a communication channel to evaluate the robustness of the system in the face of uncertainties inherent to a real environment. In this sense, a methodology is needed to establish an adequate value of wave impedance to satisfy the passivity condition. This will also help mitigate the presence of wave reflections [15], characteristic effect of the approach used in the system responses. Works like [19] and [20] show the possibility of improving drift in the assigned instructions and in the transparency of the teleoperated system, extending the capacity of the wave variables approach. Finally, taking into account the differences in the responses obtained, it is necessary to carry out an analysis of the factors involved and their influence on the behavior of the teleoperation system.

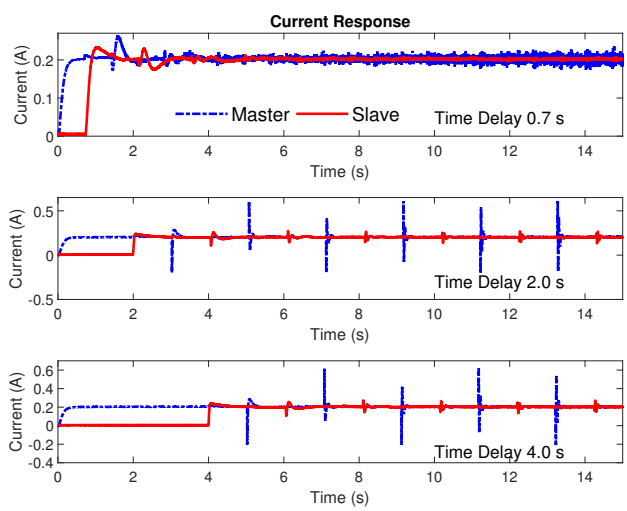



Fig. 10. Current responses of the proposed architecture Current-Velocity for diferent time delays.

## VII. Acknowledgement

The first author acknowledges the support of the CONACyT México via Scholarship number 2018-000012-01NACF-04380.

## References

[1] T. B. Sheridan,"Space teleoperation through time delay: review and prognosis," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.9,pp. 592–606, Oct 1993.

[2] S. C. Low and S. W. Tang and Z. M. Thant and L. Phee and K. Y. Ho and S. C. Chung, "Master-Slave Robotic System for Therapeutic Gastrointestinal Endoscopic Procedures," 2006 International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, pp.pages=3850-3853, Aug 2006.

[3] J. H. Cho, J. Seo, and H. S. Woo, "Development of master-slave robotic system for teleoperated ultrasonography," in 2017 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), pp. 585–586, June 2017.

[4] J. Kim, Y. Choi, and J. Lee, "Development of a master station for the remote control of rescue robots," in 2012 12th International Conference on Control, Automation and Systems, pp. 1994–1997, Oct 2012.

[5] D. A. Lawrence, "Stability and transparency in bilateral teleoperation," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 624– 637, Oct 1993.

[6] Jean-Pierre Richard, "Time-Delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems," Automatica, vol 39, pp. 1667–1694, 2003.

[7] W. R. Ferrell, "Remote manipulation with transmission delay," IEEE Transactions on Human Factors in Electronics, vol. HFE-6, pp. 24–32, Sep. 1965.

[8] W. R. Ferrell and T. B. Sheridan, "Supervisory control of remote manipulation," IEEE Spectrum, vol. 4, pp. 81–88, Oct 1967.

[9] J.M.Smith, "Closer control of loops with dead time," Chemical Engineering Progress, pp. 217–219, 1957.

[10] N. S. Özbek and İ. Eker, "An experimental comparative study of modified smith predictor based fractional order controller design strategies for a time delay process," in 2017 4th International Conference on Electrical and Electronic Engineering (ICEEE), pp. 199–203, April 2017.

[11] R. J. Anderson and M. W. Spong, "Bilateral control of teleoperators with time delay," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, pp. 494–501, May 1989.

[12] J.-H. Ryu, J. Artigas, and C. Preusche, "A passive bilateral control scheme for a teleoperator with time-varying communication delay," Mechatronics, vol. 20, no. 7, pp. 812 – 823, 2010. Special Issue on Design and Control Methodologies in Telerobotics.

[13] Jee-Hwan Ryu, Dong-Soo Kwon, and B. Hannaford, "Stable teleoperation with time-domain passivity control," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 20, pp. 365–373, April 2004.

[14] C. Desoer and M. Vidyasagar, "Passivity," in Feedback Systems: Input–Output Properties, pp. 168 – 227, Academic Press, 1975.

[15] G. Niemeyer and J.Slotine, "Stable adaptive teleoperation," IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 16, pp. 152–162, Jan 1991

[16] N. T. T. Nga, N. P. Chi, and N. H. Quang, "Study on Controlling Brushless DC Motor in Current Control Loop Using DC-Link Current," American Journal Of Engineering Research (AJER), Vol. 7, No. 5, pp.522-528, 2018.

[17] maxon motor, "EPOS2 Positioning Controllers Application Notes," 2017.

[18] H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, J. Cortés-Romero, and A. Luviano-Juárez, "Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems," 1st, John Wiley, 2014.

[19] P. Pitakwatchara, "Wave Correction Scheme for Task Space Control of Time-Varying Delayed Teleoperation Systems," in IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 26, no. 6, pp. 2223-2231, Nov. 2018.

[20] . Chen, F. Huang, W. Sun and W. Song, "An Improved Wave-Variable Based Four-Channel Control Design in Bilateral Teleoperation System for Time-Delay Compensation," in IEEE Access, vol. 6, pp. 12848-12857, 2018, doi: 10.1109/ACCESS.2018.2805782.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Estrategia de aprendizaje enfocada al modelado de sistemas físicos mediante la elaboración de prototipos con control lineal

J. Velázquez Izguerra, R. B. Pérez Silva, A. E. Soria Medina, G. R. Peñaloza Mendoza.
joel_vizguerra@hotmail.com, persilricvla@gmail.com, estefano01020@gmail.com, grey@itspa.edu.mx
Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro

***Resumen*— Los dispositivos equilibristas y balancines han sido de gran interés en los últimos años tanto para estudiantes, ingenieros como investigadores. Existen diferentes tipos dependiendo de la función que se desea obtener, y la complejidad en su diseño se encuentra en la necesidad de ser controlado constantemente para mantenerse en una posición deseada y que la reacción ante perturbaciones externas sea rápida y no oscilante.**

**Uno de los algoritmos mayormente utilizados para lograr esa meta es el control proporcional integral derivativo (PID), debido a sus características lineales que permiten lograr un control efectivo en el dispositivo que se desea controlar. Sin embargo, cuando se va iniciando en el tema de sistemas de control PID, con solo ver la teoría no siempre queda del todo claro la manera en que actúa dicho control o cómo influyen las constantes que lo conforman. Por ello, se plantea el diseño y construcción de 2 prototipos cuya finalidad sea proporcionar una demostración práctica del control PID, en los cuales puedan variarse las constantes de error para observar, tanto físicamente como mediante una gráfica en tiempo real, la manera en que influyen en la acción de control. Ambos prototipos cuentan con un módulo MPU6050, el cual ayuda a obtener el ángulo de inclinación del dispositivo, para así mismo efectuar la acción de control respecto a la señal obtenida.**

## I. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas robóticos han sido introducidos a la mayoría de las instituciones técnicas, desde nivel medio superior hasta nivel superior, para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de asignaturas como programación, matemáticas, etc. La razón de darle mayor peso a la introducción de los sistemas robóticos en la educación se debe a la incorporación de robots, cada vez más frecuente, en ámbitos de la vida cotidiana, lo que ha dado como resultado la necesidad de su manejo.

El modelo constructivista y el aprendizaje a través de proyectos para la generación de competencias, el trabajar en los alumnos competencias tanto genéricas como el trabajo en equipo, creatividad, etc., así como específicas como el manejo de sensores, actuadores, etc., ha hecho que la robótica educativa crezca rápidamente, llegando a ser prioridad en la educación globalizada y llevando a los sistemas educativos a introducir a los estudiantes a esta tecnología.

Así mismo, existen muchos modelos educativos que exigen la implementación de la tecnología en el haber académico. Referenciando a Jean Piaget y a Seymour, ellos toman como base que el conocimiento se obtiene con el apoyo de construcciones mentales, lo que genera la teoría fundamentalista del uso de la tecnología en los espacios educativos [1].

Particularmente, en el área académica de modelado de sistemas y control clásico, un caso específico de estudio que ha sido de gran interés en los últimos años son los dispositivos equilibristas, los cuales permiten observar con mayor claridad la ejemplificación de la importancia de las leyes de control.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se da un recorrido introductorio al marco de referencia usado, en la sección 3 se establece el planteamiento del problema y la solución a abordar. En la sección 4 trataremos la construcción de los sistemas robóticos empleados. En la sección 5 se presentan los resultados obtenidos con los dos sistemas construidos. Por último, la sección 6 presenta las conclusiones a las que se llegan en el desarrollo del trabajo.

## II. Marco de Referencia

### Robots equilibristas y balancines

Los robots equilibristas se basan en el principio del péndulo invertido el cual consiste en un péndulo o varilla que gira libremente sobre uno de sus extremos, son robots capaces de mantener el equilibrio sobre dos ruedas sin verse afectados por acciones externas. A diferencia de los demás robots sobre ruedas que normalmente son estables, el robot equilibrista es un sistema inestable por naturaleza. La complejidad en el diseño de este tipo de robot hace que necesite ser controlado constantemente para mantenerse en sentido vertical y que la reacción ante perturbaciones externas sea rápida y no oscilante [2].

El origen de estos robots se remonta al año 1986 en la universidad ElectroComunicaciones de Chōfu, Japón, donde el profesor Kazuo Yamafuji creó un robot capaz de simular el comportamiento de un péndulo invertido [3, 4].

En la actualidad los robots autobalanceados se han popularizado, principalmente por su aplicación en el transporte personal gracias al SEGWAY, pero se pueden encontrar diseños educativos basados en microcontroladores de diferentes estructuras e incluso existen péndulos invertidos de la marca LEGO (ver Figura 1), que permiten ejemplificar este tipo de robots en ambientes didácticos para el apoyo en programas de computación, en [5] se puede ver el caso de estudio de este tipo de robots en laboratorio.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

*Figura 1.- Robot equilibrista de la marca LEGO*

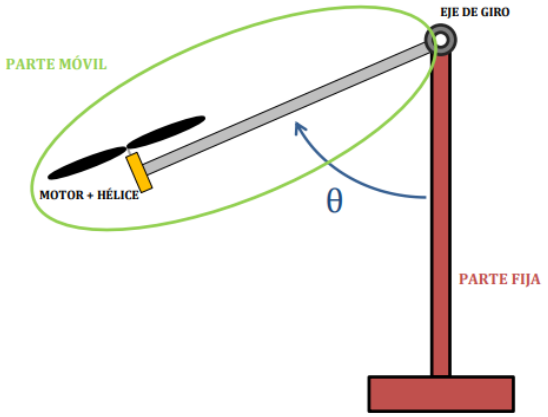



*Figura 2.- Sistema motor-hélice-balancín*

Por otra parte, otro dispositivo equilibrista de uso común son los robots balancines, usando el esquema de péndulo invertido, pero los cuales buscan mantenerse en una posición deseada diferente a la vertical, esto puede encontrarse en cada uno de los brazos en un dron, el cual requiere un control preciso que mantenga el dispositivo en una posición horizontal.

Este sistema es el conjunto motor-hélice-balancín que se muestra en la Figura 2, el cual propone un problema de control de interés debido a su naturaleza inestable del mismo, en este sistema si se desea posicionar en un punto específico se deberá implementar un sistema de control, debido a que su naturaleza inestable lo lleva a mantenerse en una posición debajo de la horizontal. A nivel académico es interesante su empleo ya que se debe implementar conocimientos de física y programación, así como permite comparar diferentes métodos de control [6].

**Uso de control**

El control clásico permite analizar de una manera fuera de línea los sistemas y ver cómo responden a diferentes entradas usando el modelo matemático del mismo, esto permite realizar ajustes que permitan y aseguren el buen funcionamiento del equipo con un control adecuado y dejando que el sistema no provoque problemas.

A nivel académico, uno de los controles más aplicados es aquel que emplea las acciones de control proporcional (P), integral (I) y derivativa (D), esto debido a su facilidad de implementación y sintonización.

El control PID fue desarrollado por el matemático, ingeniero y científico ruso Nikolai Fyodorovich Minorsky. La idea fundamental detrás de un controlador PID es leer la variable del proceso a la salida y obtener a la salida del actuador un término de compensación para la entrada sumando la parte proporcional, integral y derivativa [7].

La diferencia entre la variable de proceso y la referencia que se desea conseguir es utilizada por el algoritmo de control para determinar la salida que se envía a la planta del sistema. Esta salida se obtiene a partir del algoritmo de control PID, el cual está formado por tres acciones distintas: la proporcional, la integral y la derivativa. Estas tres acciones se suman para así obtener la salida necesaria para conseguir el control, esto se puede observar en la Figura 3. Dentro del control PID, se encuentran constantes vinculadas al funcionamiento de cada una de las acciones de control, la constante de proporcionalidad $k_p$, el tiempo integral $T_i$ y el tiempo derivativo $T_d$, la variación de estas constantes nos lleva a tener diferentes tipos de respuestas, ya sea estabilizar el sistema o no hacerlo, generar oscilaciones o no, entre otras. En la Tabla 1, se muestra el efecto existente entre incrementar y disminuir cada constante dentro de un sistema, por ejemplo, si se tiene una respuesta para un valor en $k_p = 1$, el incrementar este hará que el sistema se vuelva menos estable, es decir, empiece a oscilar, pero brinda una mayor velocidad de respuesta. Por lo que es necesario encontrar una relación entre estas constantes que me permitan obtener la respuesta deseada [7].

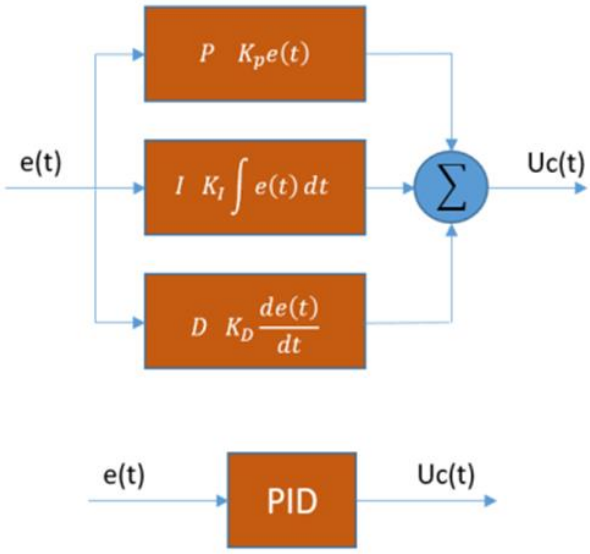



*Figura 3.- Diagrama esquemático de un control PID*

*Tabla 1.- Relación de las constantes de acción de control y su efecto en el sistema*

| | Kp Aumenta | Ti Disminuye | Td Aumenta |
|---|---|---|---|
| **Estabilidad** | Se reduce | Disminuye | Aumenta |
| **Velocidad** | Aumenta | Aumenta | Aumenta |
| **Error estacionario** | No eliminada | Eliminado | No eliminado |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

**Robótica en la educación**

Actualmente existen muchas instituciones que implementan como una actividad diaria en sus clases el uso de la robótica, sin importar el perfil de las mismas, desde plataformas comerciales como LEGO MINDSTORMS o VEX Robotics hasta plataformas que se construyen dentro de las mismas clases con materiales reciclados. Ejemplos de estas aplicaciones son:

- En el Centro Internacional de Tecnologías Avanzadas de Salamanca, España, emplean la metodología de los talleres NXT, impartidos como actividades extraescolares cuyo objetivo es acercar la robótica al público. Empleando los llamados micromundos que incorporan la tecnología LEGO Mindstorms NXT como objeto para pensar [8].
- En la Universidad Autónoma de Yucatán se imparten cursos utilizando diversas tecnologías como lo son software de animación, robots, lenguajes de programación y cámara digital para disminuir los índices de reprobación [9].
- En el Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro se emplean diferentes herramientas creadas a partir de la plataforma libre de Arduino, para implementar en asignaturas como programación, matemáticas e instrumentación [10].

## III. Planteamiento del Problema y Solución Propuesta

El modelado matemático de sistemas y las estrategias de control clásico son impresindibles en la industria actual, esto permite poder optimizar los procesos y realizar pruebas fuera de línea para evitar daños en los componentes del mismo. Esto ha llevado la introducción de estas herramientas en la formación de ingenieros, sin embargo, el aprendizaje de estas no es cosa simple.

**Planteamiento del problema**

El modelado de sistemas físicos permiten realizar pruebas de comportamiento de sistemas, pero por lo complejo de las matemáticas empleadas su entendimiento y la visulaización de los efectos en la práctica resulta dificil; esto junto a las diversas acciones de control aplicados en la industria, como el proporcional, integral y derivativo (PID), generan en los estudiantes problemas para entender la importancia práctica de esto.

**Solución propuesta.**

Se propone diseñar dos prototipos didacticos de sistemas robóticos que tengan una naturaleza inestable para observar la importancia y los efectos de las acciones de control

- El primero de ellos un sistema motor-hélice-balancín que permita posicionar el balancín en la posición deseada.
- El segundo de ellos en basado en un robot equilibrista con dos ruedas y cuyo objetivo sea mantenerlo en la posición vertical ante perturbaciones.

De esta manera se espera lograr en los alumnos la comprensión de la importancia del modelado matemático para realizar pruebas y la importancia del control en las aplicaciones prácticas.

## IV. Metodología – Construcción de modelos y prototipos

**Primer prototipo: Motor-Hélice-Balancín**

El primer prototipo consiste en un balancín con motores brushless cuyo objetivo es lograr la estabilización en el ángulo que el usuario determine. La estrategia empleada en este prototipo es construir el sistema físico y posteriormente mediante experimentación obtener la función de transferencia real del mismo, para realizar la simulación del control y posteriormente aplicarlo en la práctica.

El sistema eléctrico empleado en el primer prototipo se puede ver esquematizado en la Figura 4, este consta de un par de motores brushless, cada uno conectado en extremos opuestos del balancín, los cuales deben de ser conectados con su correspondiente Electronic Speed Controller (ESC), que permitirá convertir la acción de control a su correspondiente necesario en los motores, estos cuentan con cuatro conexiones las cuales son para alimentarlos por medio de baterías, para la señal de control y tierra. Las conexiones para la señal de control son conectadas a una tarjeta de desarrollo Arduino que cuenta con un microcontrolador ATMega, donde se desarrollará el control. Así mismo, en el centro del diagrama se puede observar un giroscopio MPU6050 el cual será el encargado de realizar el envío de datos hacia el Arduino mediante protocolo I2C, del ángulo de rotación del balancín. Por último, a este diagrama se le implementará un teclado matricial que permitirá hacer la variación de las constates empleadas en las acciones de control y el ángulo de inclinación deseado.

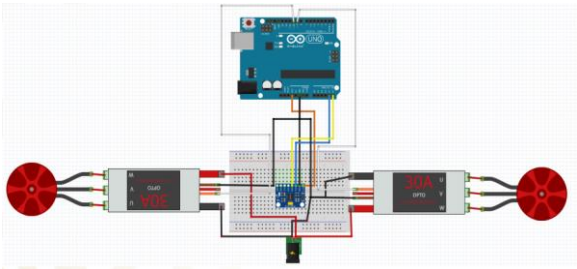


*Figura 4.- Esquema de la conexión eléctrica del prototipo motor-hélice-balancín*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Para la construcción de la estructura física del prototipo, se utiliza una barra de madera, a la cual le fue marcado el centro para realizar una perforación en dicho lugar, posteriormente fue introducido el eje sobre el cual el prototipo se balancearía. Este eje fue fijado a la barra de madera mediante tuercas y arandelas; a continuación, se realizó la base del prototipo, la cual fue realizada principalmente con madera MDF, dejando una altura de aproximadamente 30cm respecto al suelo. De esta manera se permitió que el eje principal tuviese un ángulo de inclinación máximo de aproximadamente ±45° con respecto a la horizontal; 2 soportes fueron colocados en los extremos de la base, en donde se colocaron baleros que facilitaron la rotación del eje del prototipo, disminuyendo la fricción. Por último, fueron colocados los motores en los extremos de la barra, así como el microcontrolador y el MPU650. Estos últimos fueron ubicados lo más centrado posible entre cada motor. El resultado final se aprecia en la Figura 5.

Una vez generado el prototipo se procedió a crear el modelo matemático representativo del mismo, esto con la finalidad de realizar simulación sobre el comportamiento que tendrá el prototipo bajo un control PID. Para crear el modelo de respuesta, se realizaron los siguientes pasos:

- Con el prototipo armado se sometió al mismo a una prueba de entrada escalón de voltaje de 0 al máximo permitido por los motores, para llevar al balancín entre sus posiciones extremas, esto se realizó muestreando cada $10\mu S$ durante 4 segundos
- Se realizó la medición del ángulo de inclinación del balancín durante la prueba.
- Se trazó una curva de respuesta del ángulo, lo que permitió aproximar el modelo a una respuesta exponencial por medio de la ecuación (1), en la Figura 6 se aprecia en azul la respuesta del sistema físico y en color rojo la gráfica de aproximación del modelo usado.

$$\emptyset(s) = \frac{2.4082}{0.3432s + 1} \qquad (1)$$

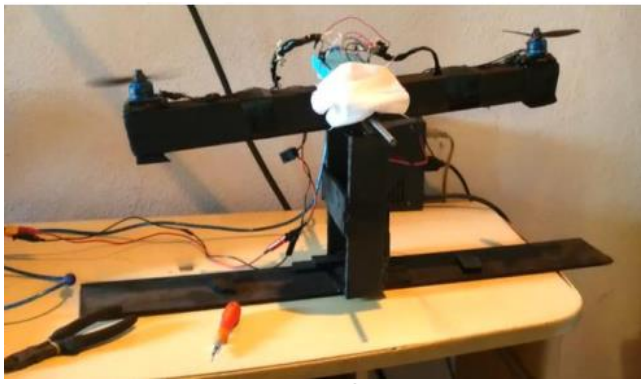


*Figura 5.- Prototipo de balancín con motores brushless.*

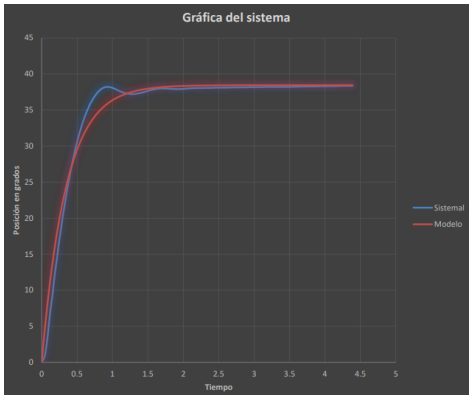



*Figura 6.- Respuesta del modelo matemático del prototipo 1*

Este modelo matemático obtenido, se emplea para visualizar mediante simulación el efecto que tendrá el control sobre el sistema. Posteriormente, se programa el microcontrolador con un control PID, puesto que el objetivo es proporcionar una herramienta para observar de manera tangible el efecto de las constantes de la acción de control en el sistema. El usuario puede modificar estos valores para obtener una mejor comprensión de sus efectos mediante un teclado.

**El segundo prototipo: Robot equilibrista**

El segundo prototipo consiste en un robot balancín de péndulo invertido llamado robot equilibrista. Para este prototipo se emplea el modelo matemático obtenido a partir de las ecuaciones de movimiento del sistema, el cual se ve en (2). Realizando consideraciones adicionales en la masa y longitud del robot, así como en el ángulo de desviación con respecto a la horizontal, se puede obtener la función de transferencia (3)

$$\begin{aligned} (I + ml^2)\ddot{\emptyset} - mgl\emptyset &= ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\emptyset} &= u \end{aligned} \qquad (2)$$

Donde $M$ es la masa del sistema motriz o carro, $m$ es la masa equivalente del péndulo, referenciada en el punto superior del robot equilibrista, $I$ es la inercia del sistema, $l$ la distancia entre el eje de movimiento y el extremo del robot, $x$ es el desplazamiento horizontal del robot, $\emptyset$ el ángulo de desviación con respecto a la vertical, $g$ la gravedad y $u$ la entrada del sistema.

$$\frac{\emptyset(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}} \qquad (3)$$

Donde $q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2]$

El modelo se simula en MATLAB para que el alumno, pueda ver en primera instancia lo que pasará en la práctica y el efecto que tendrá el control. Para la construcción física, el modelo 3D del robot equilibrista fue realizado mediante el software SOLIDWORKS, como se observa en la Figura 7.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

El robot cuenta con tres partes diseñadas las cuales corresponden a la base de soporte para los motores, la estructura para la electrónica y la tapadera de la estructura. En la Figura 8 se muestra el diagrama de conexión eléctrica dentro del prototipo, éste emplea un microcontrolador ATMega el cual será el cerebro del sistema, permitiendo agregar un control PID digital. El microcontrolador tomará la variable de salida del sistema mediante el módulo MPU6050, que otorga la lectura de la inclinación sobre la vertical, lo introducirá como una señal de error con respecto a la vertical y actuará sobre los motores que ejercerán un movimiento para la corrección de la posición.

Mediante botones colocados en la superficie del robot, se permitirá la modificación de las constantes del control PID para visualizar los efectos de estas en el comportamiento del robot, lo cual tiene como objetivo responder ante las fuerzas que intenten desestabilizar el sistema. Los actuadores (motores de corriente directa) reciben la señal mediante un puente H L298N y alimentados con una batería LiPo de 7.4v.

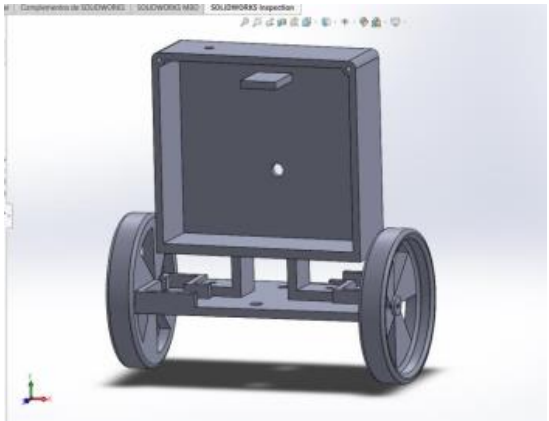


*Figura 7.- Diseño 3D del robot equilibrista*

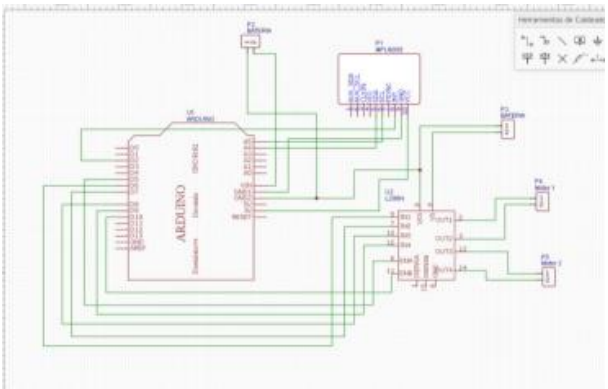


*Figura 8.- Diagrama eléctrico del robot equilibrista*

## V. Resultados

En la Figura 9 se presentan los prototipos generados, mediante esta propuesta metodológica, los cuales se desarrollaron de manera satisfactoria. En la realización de estos se emplean conocimientos de electrónica para la implementación de sensores y actuadores, conocimientos de programación para poder implementar el modelo y control dentro del microcontrolador. Con los prototipos se realizaron pruebas sencillas para mantenerlos en posiciones deseadas. Para el primer prototipo se muestra en la Figura 10 la gráfica de respuesta del balancín ante una perturbación para mantenerse en la horizontal, en ella se ve el efecto de la perturbación y su respuesta en el ángulo de inclinación para oponerse a esta y rectificar su posición. Mientras en la Figura 11 se puede apreciar una prueba para una inclinación de -25° con respecto a la horizontal.

Para el segundo prototipo, el robot equilibrista, se realizaron pruebas ejerciendo una perturbación sobre la vertical, para sacarlo de equilibrio, en la Figura 12, se puede observar la gráfica del ángulo de inclinación del prototipo con respecto a la vertical a entradas de perturbación. De color azul se muestra el ángulo de inclinación detectado por el giroscopio, mientras que de color rojo se observan los perfiles de aceleración que son detectados para la corrección de la posición. En la Figura 13 se muestra la prueba física.

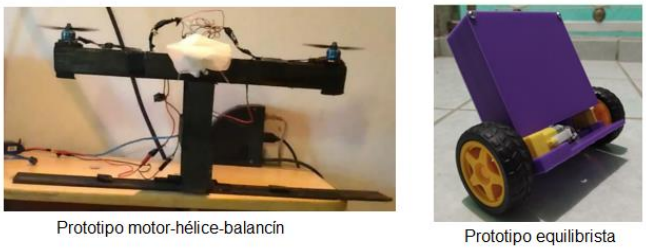



*Figura 9.- Prototipos desarrollados*

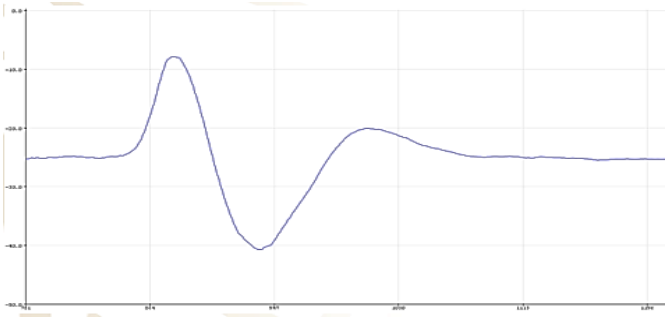


*Figura 10.- Movimiento del balancín ante una perturbación, gráfica ángulo de inclinación vs tiempo*

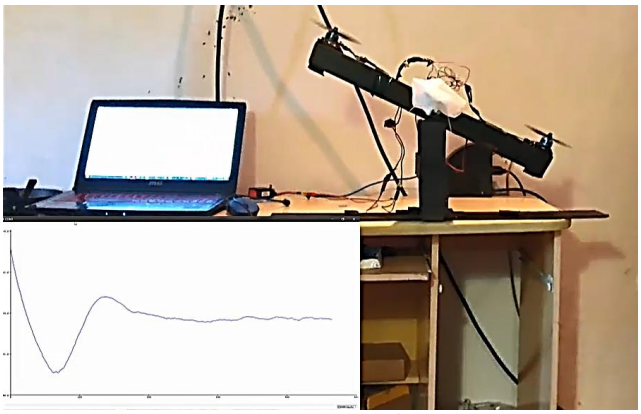


*Figura 11.- Prototipo 1 con referencia de -25°*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

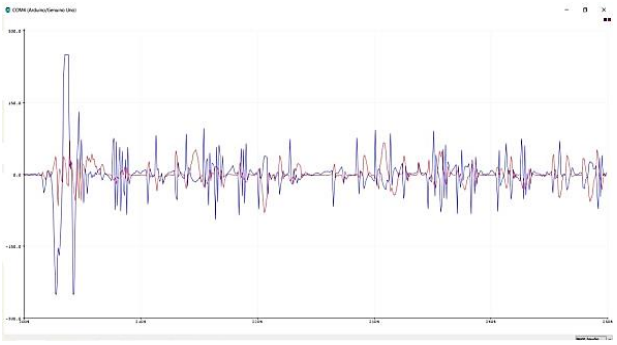


*Figura 12.- Gráfica desviación de la vertical, ángulo de inclinación vs tiempo*


*Figura 13.- Ejemplificación de la prueba física*

Variando las constantes se obtienen distintos resultados que además pueden ser visualizados de manera gráfica mediante la función de Serial Plotter del IDE de Arduino, con lo que se obtiene una opción extra para observar el proceso de control. Los valores que se ingresen a los prototipos afectan a la acción de control, siendo nula o efectiva, dependiendo de los valores de las constantes de las acciones de control, los cuales pueden ser variados por medio de botones en los prototipos. En el caso del prototipo con los motores brushless, además de variar las constantes de la acción de control, es posible cambiar el set point del dispositivo para que se logre una estabilización en diferentes ángulos de inclinación, y de esta manera apreciar de una manera un poco distinta la acción de control que se lleva a cabo.

## VI. Conclusión

Realizando este proyecto podemos primeramente mencionar que de un sistema puede obtenerse el modelo matemático mediante pruebas prácticas, o se puede obtener mediante consideraciones físicas y las leyes o teoremas que rigen a los sistemas, y mediante este se pueden realizar simulaciones que permitirán ver en primera instancia el comportamiento del sistema.

Al elaborar los prototipos se puede hacer una demostración más eficaz del efecto de las acciones de control empleadas en el mismo, así como el efecto del incremento o decremento en las constantes $k_p, T_i$ y $T_d$ que se ingresan al sistema. En el caso del robot equilibrista, su objetivo es mantener la posición vertical a pesar de fuerzas externas que afecten su equilibrio, por lo que su set point es fijo. Mientras que en el robot balancín el set point se puede modificar y se pueden ver más efectos en la respuesta.

Las pruebas físicas nos permiten visualizar efectos que en la teoría no se ven, esto debido a efectos como rozamiento, fricción, potencia, etc., por lo cual, es más visual ver el efecto de implementar un control.

Mediante la implementación de estos prototipos se vuelve posible apreciar diferencias entre lo teórico y lo práctico, que sirven para generar experiencia y en futuros proyectos tomar dichos detalles en cuenta al momento de realizar el control del sistema deseado.

## Referencias

[1] Pittí, K., Moreno, I., Muñoz, L., Serracín, J. R., Quintero, J., & Quiel, J. (2012). La robótica educativa, una herramienta para la enseñanzaaprendizaje de las ciencias y las tecnologías.

[2] Ander Gracia, M, Santiago Tainta, A, (2017). Diseño y construcción de un robot auto-balanceado mediante arduino. Trabajo fin de grado Ingeniería Eléctrica y Electrónica. ETS de Ingeniería Industrial, Informática y de Telecomunicaciones, Universidad Politécnica de Navarte, Junio 2017.

[3] Yamafuji, K., Miyakawa, Y., Kawamura, T., "Synchronous Steering Control of a Parallel Bicycle", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C, 55 (513), pp. 1229-1234 (1989).

[4] [2] Feng, Q., Yamafuji, K., "Design and simulation of control systems of an inverted pendulum", Robotica, 6 (3), pp. 235-241 (1988)

[5] Van der Blonk, K., "Modeling and Control of a Ball-Balancing Robot", Master Thesis, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science (EEMCS), University of Twente (2014).

[6] Cordero Mallado, E. (2016) Diseño y Construcción de un prototipo de sistema motor-hélice-balancín. Trabajo fin de grado en ingeniería aeroespacial. Departamento de ingeniería de sistemas y automática. Escuela técnica superior de ingeniería Universidad de Sevilla, Sevilla 2016.

[7] Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna. ISBN 9788420536781 Madrid: Pearson Education

[8] Pittí, Kathia, Curto Diego, Belén, Moreno Rodilla, Vidal, Experiencias Construccionistas Con Robótica Educativa En El Centro Internacional De Tecnologías Avanzadas Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información [en linea] 2010, 11 (Febrero-Sin mes) : [Fecha de consulta: 9 de julio de 2017]

[9] Escalante, M., Montañez, T., González, C., & García, M. (2010). Matemáticas basadas en Proyectos, Software de Animación, Robots, Lenguajes de Programación y Cámara Digital. In Memorias del Congreso Iberoamericano de Informática Educativa 2010 (pp. 727- 735.

[10] Alcantar-Calvillo J J. A., Arriaga-Leal C., Maciel-Maldonado F., Melgoza-Rivera P. Y. y Peñaloza-Mendoza G. R., Experiencia en la implementación de un manipulador robótico con arduino con fines de enseñanza. Memorias del XIX Congreso Mexicano de Robótica 2017 Universidad Autónoma de Sinaloa y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Prototipo de robot paralelo delta, conectado a una plataforma de IoT usando NodeMCU a través de ROS

J. E. Pérez-Ramírez[1] R. Álvarez-González[1] J. F. Guerrero-Castellanos [1] A. M. Sánchez-Gálvez[2]
1 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica,
18 sur y Av. San Claudio, Ciudad Universitaria, Puebla, Pue., 72570. México
jesus.perezra@alumno.buap.mx, ricardo.alvarez@correo.buap.mx, fermi.guerrero@correo.buap.mx
2 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Computación,
14 sur y Av. San Claudio, Ciudad Universitaria, Puebla, Pue., 72570. México
alba.sanchez@correo.buap.mx

***Resumen*— Se presenta un sistema cuya principal característica consiste en que el procesamiento que rige su control se encuentra conectado a él de manera remota. Es un prototipo de robot paralelo tipo Delta que se comunica de manera inalámbrica con un sistema que procesa su cinemática inversa, éste le proporciona los ángulos requeridos para alcanzar un punto específico dentro de su espacio de trabajo.**

## I. INTRODUCCIÓN

De manera general, los sistemas robóticos automatizados se ven involucrados cada vez mas en diversos sectores de la actividad humana; se han convertido en parte indispensable del mismo [1]; a consecuencia de esto, han surgido corrientes ideológicas y plataformas tecnológicas como el Internet de las cosas [2], la industria 4.0 [3] y las ciudades inteligentes [4] que contribuyen al desarrollo y ampliación de éstos. Además, fenómenos sociales y naturales son escenarios que han abierto la posibilidad de ampliar y crear nuevas aplicaciones donde la interacción humana sea reducida. Los motivos para asistir o sustituir las tareas humanas son extensos; desde hacer mas fácil y cómoda la vida humana hasta realizar trabajos que ponen en riesgo la salud o la vida; muchos de tipo industrial y también, como asistentes dentro del hogar.

De manera particular, los robots Delta han ganado terreno en el sector industrial desde la última década del siglo pasado, enfocados principalmente en tareas de tipo ”pick and place”, tienen capacidades como: Alta precisión, mover cargas pesadas, rigidez estructural y rapidez [5], estas características han abierto nuevos campos de aplicación estando presente en diversos proyectos de actualidad dentro y fuera del sector industrial como parte de sistemas más complejos. Esto ha motivado a que este trabajo no solo consista en la implementación de un prototipo robótico, sino también, en añadir la capacidad de poder conectarlo a una red inalámbrica con el fin de ser operado a distancia.

De esta manera, se obtiene la capacidad de trabajar en colaboración con otros sistemas (robots móviles, sistemas de inteligencia artificial, sistemas de visión por computadora, drones, entre otros) que complementándose, realicen tareas con alto grado de dificultad. Éstos pueden ser incorporados en diversas áreas de automatización, saliendo incluso del sector industrial de fabricación; almacenes y asistencia [6] son algunos ejemplos recientes donde la inclusión de los robots complementan la actividad humana.

## II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Tomando parte de un sistema más complejo, el prototipo presentado es un sistema controlado por teleoperación. Se desea que la posición del efector final del robot Delta, alcance un punto específico dentro de su espacio de trabajo, este punto es una coordenada que el usuario proporciona a través de una conexión inalámbrica como se observa en la figura 1. La descripción del funcionamiento de este


Fig. 1. Sistema con teleoperación

sistema se observa en el diagrama de la figura 2, se inicia cuando el usuario o teleoperador toma una coordenada del espacio de trabajo del robot Delta y la introduce en Matlab, posteriormente, la cinemática inversa procesa la coordenada deseada y como resultado se obtiene la posición angular de cada uno de los tres actuadores del robot Delta. Estos datos son transimitidos inalámbricamente desde el Nodo 1 hasta el Nodo 2, de esta manera los tres actuadores del robot Delta reciben la posición angular correspondiente colocando el efector final en la posición deseada.

Es importante mencionar que la conectividad se encuentra configurada con ROS ya que proporciona diversas herramientas para gestionar las conexiones tanto de los dispositivos conectados como la información y su flujo. Además, gracias a que todo elemento conectado es visualizado dentro de la red como un nodo, es posible conectar sistemas, sensores, programas de simulación, actuadores y dispositvos de diferente naturaleza, únicamente agregando las bibliotecas de ROS necesarias.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Finalmente, se resalta que este sistema realiza los procesamientos más complejos (calcular la cinemática inversa) de manera remota respecto al propio robot Delta, esto es, no se requiere que la unidad de procesamiento se encuentre en la misma ubicación que el prototipo. Esta cualidad resulta una ventaja cuando las condiciones requieran una alta eficiencia en consumo energético.

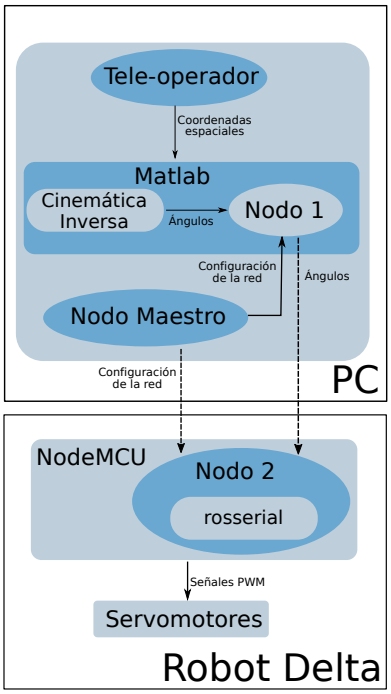



Fig. 2. Diagrama del sistema

## III. Robot Paralelo Delta

Los robots con arquitectura paralela han sido objeto de estudio desde hace varios años atrás como plataformas para la simulación de vuelos en el área aereoespacial e incluso como equipo para supervisar estándares de calidad [7]. Un diseño particular que se desprende de éstos es el robot paralelo tipo Delta que es una opción interesante en un contexto en el que los sistemas robóticos automátizados ganan terreno (en gran medida gracias a la inteligencia artificial y la conectividad) en un sector que hace años la mayoría era mano obrera.

Como se observa en la figura 3, el robot Delta se compone de dos bases; la base de mayor tamaño se encuentra fija, mientras que la menor es móvil dándole soporte al efector final (la función del efector final depende de la aplicación). Ambas bases conservan una relación paralela unidas por tres brazos articulados o cadenas cinemáticas equidistantes controladas cada una por un actuador [7].

### A. Notación

Las figuras 3 y 4 muestran el nombre de cada parámetro, así como sus dimensiones en relación con la tabla 1. Los dos eslabones de cada cadena cinemática utilizan los ángulos $\theta$ para describir su posición en el espacio, mientras que el ángulo $\phi$ posiciona cada cadena cinemática de manera equidistante respecto a la base superior del robot Delta.

Tabla 1: Parámetros y especificaciones físicas

| Pieza | Parámetro | Símbolo | Unidades (mm) |
|---|---|---|---|
| Base Superior | Radio base fija | r1 | 800 |
| Base Inferior | Radio base móvil | r2 | 400 |
| Brazo | Longitud | a | 100 |
| Antebrazo | Longitud | b | 200 |

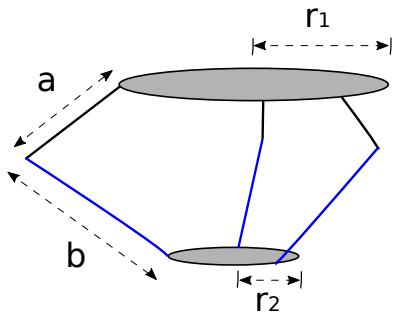



Fig. 3. Notación para el Robot Delta

### B. Cinemática Inversa

El enfoque del modelo matemático para este robot se realizó de manera geométrica como se expone en otras publicaciones [8]. En la figura 4 se muestra una cadena cinemática, en ésta se observan puntos clave; A, B, C, O y P. Estos puntos forman segmentos bien definidos ($\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CP}$, $\overline{OP}$) que, siguiendo la trayectoria que forman es posible observar que se crea un ciclo cerrado. Es posible notar que del punto O al punto P existen dos caminos a seguir, ver ecuación 1.

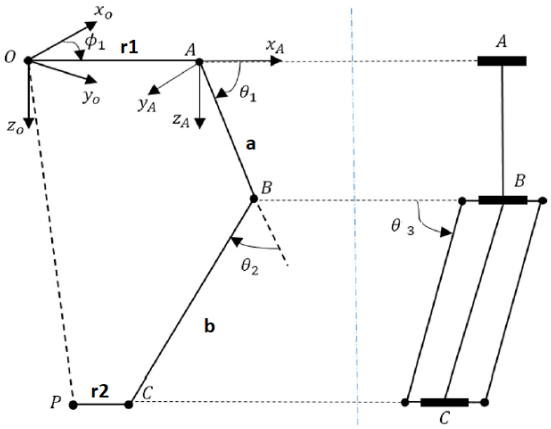



Fig. 4. Cadena cinemática vista frotal

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} = \overline{OP} \quad (1)$$

De la figura 4 se observan dos sistemas de referencia. El sistema de coordenadas con origen en $O$ es el sistema

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

principal del cual se rige todo el sistema, sin embargo, únicamente para facilitar el análisis geométrico se recurre a recorrer dicho origen al punto A. Por lo tanto, la trayectoria que describe el recorrido del punto A al punto C se muestra en la ecuación 2. La importancia de encontrar el punto C, radica en que conociendo este punto ($Cx \quad Cy \quad Cz$), es posible encontrar las expresiones matemáticas que dan solución a los valores de los ángulos $\theta_1$, $\theta_2$, y $\theta_3$. De esta manera se estaría resolviendo la cinemática inversa para una cadena cinemática1, este proceso se repite para cada una.

$$\overline{AB} \quad + \quad \overline{BC} \quad = \quad \overline{OP} \quad - \quad \overline{OA} \quad + \quad \overline{CP} \tag{2}$$

La ecuación 2 se puede reescribir con los parámetros geométricos del mecanismo como se muestra en la ecuaciones 3 y 4. Es importante mencionar que se debe añadir una matriz de rotación como se observa en la ecuación 5. Sin embargo, el valor de $\phi$ es diferente para cada una de las tres cadenas cinemáticas, puede tomar valores de $\phi = 0$, $\phi = 120$ y $\phi = 240$ grados respectivamente.

$$\begin{bmatrix} acos(\theta_1) \\ 0 \\ asin(\theta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bsin(\theta_3)cos(\theta_1+\theta_2) \\ bcos(\theta_3) \\ bsin(\theta_3)sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ -sin(phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Basándose de las ecuaciones 3 y 4, y además considerando el punto A como origen, es posible realizar las siguientes afirmaciones con el fin de encontrar una expresión con la cual sea posible calcular el punto C.

$$AB \quad + \quad BC = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acos(\theta_1) + bsin(\theta_3)cos(\theta_1+\theta_2) \\ bcos(\theta_3) \\ asin(\theta_1) + bsin(\theta_3)sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ -sin(phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ -sin(phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

De esta manera, de la ecuación 7 se tiene una expresión matemática con la cual es posible encontrar las coordenadas del punto C ya que, $\phi$, $P$, $r1$ y $r2$ son valores conocidos. Las siguientes ecuaciones describen la expresión matemática para encontrar los valores de $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$. Como se verá, cada una de éstas depende de algún valor del punto C; así se justifica la necesidad de obtener este punto como primer paso.

De la ecuación 5 se observa que es posible obtener el valor de $\theta_3$ de manera directa realizando un despeje del segundo renglón de la matriz, ver ecuación 8.

$$C_y = bcos(\theta_3) \quad \Longrightarrow \theta_3 = \arccos\left(\frac{C_y}{b}\right) \tag{8}$$

Mientras que para obtener $\theta_2$ se realiza la suma de cuadrados de todas las filas de la matriz de la ecuación 5; después de algunas operaciones matemáticas el resultado se expresa en la ecuación 9.

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{C_x + C_y + C_z + a^2 + b^2}{2ab\sin(\theta_3)}\right) \tag{9}$$

Para encontrar $\theta_1$ se utiliza el mismo procedimiento que con $\theta_2$, se realiza la suma de $C_x$, $C_y$ y $C_z$ como se muestra en la ecuación 10. Posteriormente, esta ecuación se resuelve para $\theta_1$. Cabe mencionar que el procedimiento matemático se realizó con la ayuda de Matlab.

$$C_x + C_y + C_z = acos(\theta_1) + bsin(\theta_3)cos(\theta_1 + \theta_2) + bcos(\theta_3) + asin(\theta_1) + bsin(\theta_3)sin(\theta_1+\theta_2) \tag{10}$$

De esta manera se tiene la cinemática inversa del robot Delta. Las tres ecuaciones para encontrar $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ son introducidas a Simulink donde se procesa el punto deseado para cada cadena cinemática obteniendo la posición angular de cada actuador como se muestra en la figura 5, los bloques nombrados "Cadena Cinemática" 1, 2 y 3 tienen a su salida t1, t2 y t3, estas variables representan a $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ respectivamente.
Es importante mencionar que el único ángulo actuado para cada cadena cinemática es t1, calcular t2 y t3 ayudaron a encontrar las expresiones matemáticas pero, en este trabajo, no se utilizan más.

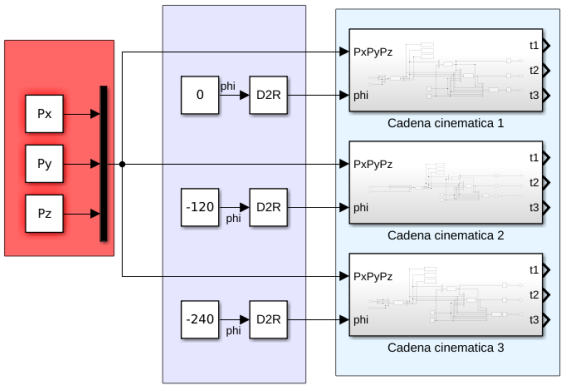



Fig. 5. Cinemática inversa en Simulink

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## IV. Configuración de la red ROS

ROS se define como un meta sistema operativo que proporciona herramiemtas para gestionar proyectos de robótica dentro de una red [9], permite tener control y administración de la misma y sus elementos, además gracias a que trabaja con nodos, es posible sumar o restar módulos de manera sencilla. El nodo principal o nodo maestro es el primero en ser iniciado y él se encarga de configurar los nodos secundarios. Como se observa en la figura 2, el Nodo Maestro se encuentra en la misma computadora que Matlab y por consecuencia el Nodo 1.

Para conectar el robot Delta a ROS fue necesario elegir una interfaz que proporcionará su integración a la red, la opción elegida fue la tarjeta NodeMCU ESP8266 la cuál presenta cualidades como: bajo consumo energético, bajo costo, contiene un módulo wifi integrado; reducido tamaño físico; algunos de sus puertos de propósito general admiten señales PWM (idóneas para el accionamiento de servomotores); su programación es posible realizarla a través del IDE Arduino; ya que es un sistema basado en código abierto existe una gran comunidad que da soporte a la documentación del mismo; es posible correr paqueterias de ROS dentro de ésta; entre otras [10].

La red que se implementó se ilustra en la figura 6. ROS trabaja con nodos y tópicos, los nodos son los elementos que emiten o reciben información mientras que los tópicos son los canales por los cuales viajan los datos. Se observa que el Nodo 1 se encuentra publicando (emitiendo) los ángulos $\theta_1$ a los tópicos /servo1, /servo2 y /servo3 respectivamente, el Nodo 2 se suscribe a cada uno de los tópicos para poder acceder a los ángulos.

Es así como los ángulos calulados por la cinemática inversa llegan de manera remota hasta los servomotores del robot Delta.

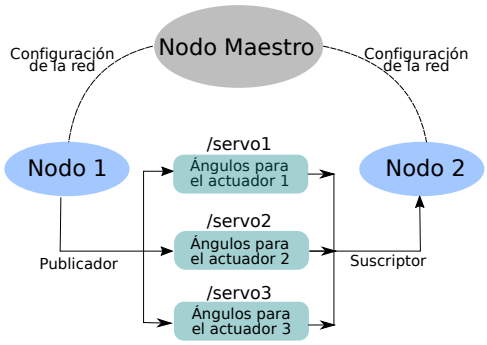



Fig. 6. Red ROS

### A. ROSSERIAL

En esta parte del proyecto el objetivo es configurar un nodo que sea capaz de tomar datos de la red (suscriptor) para un posterior procesamiento de los mismos, como se mostró en la figura 6, se trata del *Nodo 2*.

La tarjeta de NodeMCU ESP8266 no tienen la capacidad de soportar un sistema opertativo por el cuál sea posible hacer una instalación completa de ROS, sin embargo existe la posibilidad de acceder de manera límitada haciendo uso de paquetes y bibliotecas a través de un protocolo de comunicación conocido como *rosserial*.

Rosserial es un protocolo de comunicación de tipo serial cuyo objetivo es conectarse a una red ROS a través de un puerto serie o una toma de red [11]. Disponible para algunas tarjetas de desarrollo como Arduino, NodeMCU ESP8266, entre otras permite la conectividad de manera limitada, es decir, con un número reducido de nodos y un reducido tamaño del buffer de datos.

Para ocupar esta alternativa, se realizó la descarga, instalación y compilación de los paquetes *rosserial* [11], cabe mencionar que la versión de ROS utilizada es *ROS Melodic Morenia* en Ubuntu 18.04.4 LTS. Después de esto debe estar un directorio con el nombre *rosserial* dentro de la carpeta que guarda el espacio de trabajo de ROS, *catkin_ws*. De esta manera se encuentran los algoritmos configurados para generar un nodo publicador, suscriptor o ambos.

Posteriomente, la rutina para la tarjeta NodeMCU se describe con la ayuda del IDE de Arduino, en este algoritmo se colocan las cabeceras y funciones que complementan la configuración del Nodo 2, se determina que éste se suscribe a los tópicos /servo1, /servo2 y /servo3; se realiza la configuración de la conexión ethernet y además, se asignan las salidas de las señales PWM.

## V. Resultados

El sistema tiene un determinado protocolo de encendido y operación, en la figura 7 se muestra un diagrama que lo describe. De acuerdo a lo planteado en las secciones

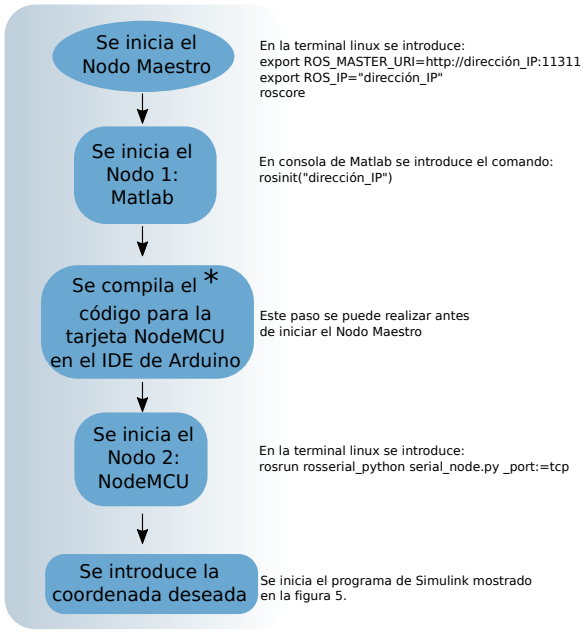



Fig. 7. Secuencia de inicio del sistema

anteriores y el esquema de la figura 7, se presenta el resultado del funcionamiento del sistema. En la figura 8 se observa que, con la ayuda de *Node Graph*, es posible

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

visualizar de manera gráfica la conexión de los nodos a través de los tópicos.

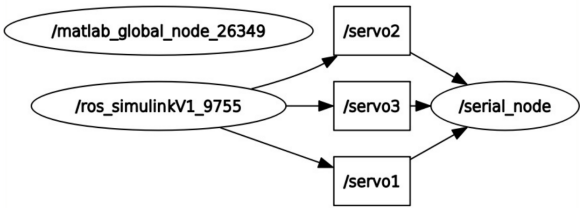



Fig. 8. Red ROS

Una característica importante es que el procesamiento mas demandante, el cálculo de la cinemática inversa, se está realizando en una localidad remota al prototipo, la operación del robot Delta esta a cargo de una tarjeta de reducido tamaño y bajo consumo energético, esta condición libera al prototipo de soportar un peso adicional y una carga energética que para algunas aplicaciones puede ser determinante. La implementación del robot Delta se muestra en la figura 9.

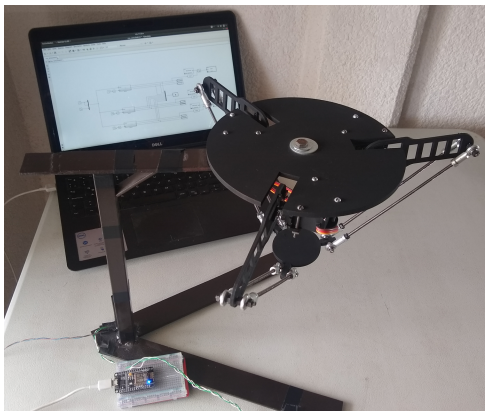


Fig. 9. Prototipo del robot Delta

Los servomotores utilizados para la construcción del prototipo tiene la matrícula MG995 con 15Kg-cm. El primer eslabón y ambas bases son de MDF con el fin de disminuir el peso. Además, ambos extremos del segundo eslabón están sujetos mediante rotulas esféricas.

## VI. CONCLUSIONES

- Realizar el control y procesamiento de manera remota representa una gran ventaja si la aplicación requiere que el robot delta se desplace en diferentes escenarios como parte de un sistema móvil.
- La tarjeta NodeMCU ESP8266 se encuentra limitada en dos aspectos importantes, en la cantidad de nodos y en el tamaño del buffer de datos, sin embargo, a pesar de que los tres ángulos transmitidos son de tipo Float, no presentó problema.
- La implementación se pudo haber desarrollado con cualquiera de las dos tarjetas de desarrollo, Arduino o NodeMCU ESP8266. Sin embargo, el costo marcó la diferencia ya que conseguir un módulo wifi para arduino resulta un gasto doble que comprar una tarjeta NodeMCU ESP8266.
- Se considera que el efector final del robot Delta se encuentra situado en el centro de la base móvil. Dependiendo de la tarea que se proponga realizar, es posible adaptar el adecuado.
- Si bien ROS es un sistema que no es recomendable para determinadas aplicaciones, la adaptación de prototipos se ve beneficiada con él, ya que permite conocer información variada tanto de los nodos como de los tópicos y sus mensajes.
- Es importante configurar el tipo de mensaje que se desea transmitir ya que para ambos nodos, publicador y suscriptor, debe ser el mismo. De lo contrario, no se realiza la comunicación.

## REFERENCIAS

[1] M. HAHELE *"Robots Conquer the World [Turning Point]"*, in IEEE Robotics & Automation Magazine, vol. 23, no. 1, pp. 120-118, March 2016, doi: 10.1109/MRA.2015.2512741.

[2] S. K. VISHWAKARMA, P. UPADHYAYA, B. KUMARI AND A. K. MISHRA, "SMART ENERGY EFFICIENT *Home Automation System Using IoT," 2019 4th International Conference on Internet of Things: Smart Innovation and Usages (IoT-SIU)*, Ghaziabad, India, 2019, pp. 1-4, doi: 10.1109/IoT-SIU.2019.8777607.

[3] S. SHAMIM, S. CANG, H. YU, Y. LI, L. Y. CHEN AND X. YAO, *"How firms in emerging economies can learn industry 4.0 by extracting knowledge from their foreign partners? A view point from strategic management perspective"*, 2019 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS), Kusatsu, Shiga, Japan, 2019, pp. 390-395, doi: 10.1109/ICAMechS.2019.8861622.

[4] A. FOUNOUN AND A. HAYAR, *"Evaluation of the concept of the smart city through local regulation and the importance of local initiative"*, 2018 IEEE International Smart Cities Conference (ISC2), Kansas City, MO, USA, 2018, pp. 1-6, doi: 10.1109/ISC2.2018.8656933.

[5] S. STAICU AND D. C. CARP-CIOCARDIA, *"Dynamic analysis of Clavel's Delta parallel robot"*, 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422), Taipei, Taiwan, 2003, pp. 4116-4121 vol.3, doi: 10.1109/ROBOT.2003.1242230.

[6] INTERNATIONAL FEDERATION OF ROBOTICS *The Impact of Robots on Productivity, Employment and Jobs*, published by International Federation of RoboticsFrankfurt, Germany. April 2017 updated April 2018

[7] LUNG-WEN TSAI, *ROBOT ANALYSIS, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulator*, Department of Mechanical Engineering and Institute for Systems Research, University or Maryland, A Wiley-Interscience Publication 1999, pp.116-117.

[8] LUNG-WEN TSAI, *"ROBOT ANALYSIS, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulator"*, Department of Mechanical Engineering and Institute for Systems Research, University or Maryland, A Wiley-Interscience Publication 1999, pp.134-142.

[9] LENTIN JOSEPH, *"Robot Operating System (ROS) for Absolute Beginners: Robotics Programming Made Easy"*, Apress, corrected publication 2018. pp. 132-135

[10] GITHUB, "ESP8226/ARDUINO", 2020 GitHub, Inc. Available: https://github.com/esp8266/Arduino

[11] LENTIN JOSEPH, *"Robot Operating System (ROS) for Absolute Beginners: Robotics Programming Made Easy"*, Apress, corrected publication 2018. pp. 228-233

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 3

## *Tópicos especiales*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Modelizado Matemático Cualitativo de Cáncer Gástrico

Leonardo F. Martínez[1], Diana Gamboa[1], Luis N. Coria[1], Paul A. Valle[1].

***Resumen*— El cáncer gástrico se ha posicionado como una de las principales causas de muerte a nivel mundial. La mayoría de estos tumores son adenocarcinomas desarrollados en los epitelios del estómago y originados por una infección en la mucosa vinculada con la bacteria H. Pylori. La efectividad de los tratamientos tradicionales es limitada, por ello se busca aplicar las inmunoterapias como tratamiento contra esta enfermedad, sin embargo, los mecanismos de evolución e interacción con el sistema inmunitario deben ser estudiados a detalle. Ramas emergentes de la ciencia como la Oncología Matemática a través del modelizado y análisis de modelos matemáticos, podrían aportar soluciones a esta problemática. En este trabajo se propone un modelo matemático de tres Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de primer orden que describen las interacciones entre una población de células cancerosas gástricas y dos poblaciones de células inmunitarias. Además, se considera que la bacteria H. Pylori y el canibalismo celular influyen en el crecimiento del tumor. Se analiza la dinámica local del modelo propuesto y se establece una condición suficiente para asegurar la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio libre de tumor. Esta condición se describe sobre el parámetro de tratamiento de inmunoterapia. Por último, se presentan algunas simulaciones numéricas y se discuten las implicaciones biológicas de los resultados.**

## I. Introducción

El cáncer gástrico, también conocido como cáncer de estómago, es una de las neoplasias malignas más comunes en el mundo. De acuerdo con estimaciones del Centro Internacional de Investigaciones sobre el Cáncer del 2018 [1], el cáncer gástrico fue el tercero con el mayor porcentaje de decesos ese año por detrás de los cánceres de pulmón y el colorrectal. El diagnóstico en etapas avanzadas o metastásicas es uno de los principales factores que influyen en la supervivencia de los pacientes con cáncer gástrico, generalmente debido a la ausencia de síntomas. La supervivencia de los afectados en etapas avanzadas rara vez supera los 12 meses [2].

La mayoría de los cánceres gástricos son adenocarcinomas desarrollados en los epitelios del estómago donde existe una proliferación descontrolada de células epiteliales. El adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal es la forma más frecuente de cáncer gástrico y este surge en el antro o en la unión antral-corpus del estómago. Comúnmente la tumorigénesis de los adenocarcinomas gástricos está asociada con una infección bacteriana crónica del epitelio gástrico vinculada con *Helicobacter Pylori* (H. Pylori) [3]. La infección prolongada por H. Pylori puede destruir la mucosa gástrica y desencadenar una serie de eventos que promueven la progresión a metaplasia intestinal, ocasionalmente a displasia y rara vez a carcinoma [2, 3]. Además, se teoriza que H. Pylori está relacionada con la proliferación y metástasis de las células cancerosas gástricas [2, 17, 18]. A pesar de que H. Pylori evoca una fuerte respuesta inflamatoria, es probable que el sistema inmunitario no sea capaz de eliminar la infección por causa de los mecanismos de evasión inmune del patógeno [4].

La eficacia de los tratamientos tradicionales contra el cáncer gástrico, como la cirugía, la quimioterapia y la radioterapia, sigue siendo limitada para muchos de los casos [5]. Aunque la etapa del tumor determina la efectividad y estrategia del tratamiento, la cirugía se considera como la única terapia curativa para pacientes con cáncer gástrico temprano [5]. Otros tratamientos como las inmunoterapias han logrado mejores resultados en pacientes con otros tipos de tumor. Actualmente, se están acumulando esfuerzos de la comunidad médica y científica para generar investigación en torno a las inmunoterapias con el fin de mejorar el pronóstico de los pacientes con cáncer gástrico avanzado [5, 6].

La inmunoterapia sirve como tratamiento para inducir, mejorar o suprimir una respuesta inmune [6]. De los tipos de inmunoterapias, la Inmunoterapia Adoptiva Celular (IAC) es una de las más viables para el tratamiento de tumores malignos [5]. Como un enfoque para mitigar la evasión y supresión inmune del tumor, en la IAC generalmente se extraen las células T del paciente y se entrenan vía *in-vitro* para activar células inmunes específicas capaces de reconocer células cancerosas [6]. Luego, las células T modificadas son inyectadas en el sitio del tumor del paciente para estimular la respuesta del sistema inmune. Aunque este tratamiento es algo efectivo, siguen existiendo interrogantes sobre el mejor modo de tratamiento y la necesidad de ensayos clínicos a gran escala para evaluar su eficacia [5, 6].

La investigación acerca del cáncer ha sido enfocada principalmente en el diseño de tratamientos y los mecanismos de supervivencia del tumor, como la evasión y supresión inmune, la angiogénesis, la metástasis y, recientemente, el canibalismo celular [7, 8, 9]. No obstante, se necesitan nuevas direcciones y métodos de investigación para lograr estrategias efectivas y aplicables al diagnóstico temprano, la detección, el tratamiento y los cuidados paliativos vinculados al tumor. Por lo tanto, resulta fundamental la comprensión profunda de la dinámica tumoral desde diferentes perspectivas y escalas biológicas. Ramas emergentes de la ciencia como la Oncología Matemática, son utilizadas para obtener información útil sobre el crecimiento tumoral y su respuesta

[1]Tecnológico Nacional de México / IT Tijuana. Posgrado en Ciencias de la Ingeniería, grupo de Investigación BioMath.
leonardo.martinez16@tectijuana.edu.mx
diana.gamboa@tectijuana.edu.mx
luis.coria@tectijuana.edu.mx
paul.valle@tectijuana.edu.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

a diversos tratamientos [10]. Bajo esa premisa se diseñan modelos matemáticos determinísticos con base en suposiciones que simplifiquen la complejidad del cáncer y, posteriormente, a través de un análisis matemático y/o simulaciones numéricas poder lograr una visión del pronóstico de la enfermedad.

Muchos de los modelos de crecimiento tumoral son cuidadosamente diseñados con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de primer orden a partir de datos experimentales para la cuantificación de parámetros y la personalización de tratamientos [11, 12, 13]. Otros modelos de EDOs han sido propuestos sin utilizar datos reales, con el objetivo de estudiar la complejidad del cáncer desde la perspectiva de la teoría de sistemas dinámicos, la teoría del caos, la teoría de control, etc. [14, 15, 16]. En conjunto, estos modelos son importantes porque permiten estudiar la dinámica cualitativa del crecimiento tumoral, analizar los parámetros críticos que tienen los efectos más significativos sobre su evolución y explorar diversos escenarios como la aplicación de un tratamiento o la combinación de varios [10], sin la necesidad de ensayos clínicos.

En este trabajo se propone un modelo matemático cualitativo de tres EDOs de primer orden que describen el crecimiento de un adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal y su interacción con el sistema inmunitario bajo tratamiento con IAC. El modelizado matemático permite simular y predecir el crecimiento de un tumor con base en las observaciones clínicas y un conjunto de suposiciones biológicas. En el modelo se consideran tres tipos de poblaciones celulares, las células cancerosas gástricas, las células presentadoras de antígenos tumorales (células dendríticas) y las células inmunitarias de la respuesta adaptativa (células T). Además, para la formulación del mismo se supone que la presencia prolongada de H. Pylori y el canibalismo celular tienen influencia en el crecimiento tumoral. También, se realiza el análisis de estabilidad local del punto de equilibrio libre de tumor. Para ilustrar la dinámica del modelo y los resultados matemáticos obtenidos, se presentan simulaciones numéricas utilizando un conjunto de valores para los parámetros, los cuales fueron estimados mediante un software de inteligencia artificial basado en algoritmos genéticos.

La organización de este trabajo procede de la siguiente manera. En la sección II se presentan las suposiciones biológicas empleadas para la formulación del modelo matemático. En la Sección III se analiza la estabilidad local del punto de equilibrio libre de tumor. En la Sección IV se muestran algunas simulaciones numéricas que ilustran los resultados matemáticos obtenidos. Finalmente, las conclusiones de este trabajo se presentan en la Sección V.

## II. El Modelo Matemático

La evolución tumoral es un proceso complejo, que involucra varios fenómenos en escalas moleculares, celulares y de tejidos, entre otras. Desde el punto de vista del modelizado matemático de poblaciones celulares, los oncólogos matemáticos están interesados en modelizar cómo los tumores crecen, invaden, hacen metástasis y cómo pueden ser manejados clínicamente. Los modelos de crecimiento tumoral tienen sus raíces históricas en los trabajos de Benjamin Gompertz en 1825, Collins en 1956 y Ludwig von Bertalanffy en 1957 [10]. Hasta ahora no existe un modelo universal que describa el crecimiento de células tumorales (sin la interacción de otras células), sin embargo, los modelos más utilizados se muestran en la Tabla I.

TABLA I
LEYES DE CRECIMIENTO COMÚNMENTE UTILIZADAS PARA POBLACIONES DE CÉLULAS CANCEROSAS [10].

| Ley de crecimiento | Ecuación diferencial |
|---|---|
| Exponencial | $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = aT$ |
| Logística | $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = aT\,(1 - bT)$ |
| Gompertz | $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = aT\,\ln(1/bT)$ |
| von Bertalanffy (crecimiento alométrico) | $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = aT\,[(bT)^c - 1]$ |

$T$ representa el número de células tumorales, $t$ es el tiempo, $a$, $b$ y $c$ son parámetros.

En un modelo de crecimiento tumoral es importante considerar la interacción de células del sistema inmunitario, es decir, una variedad de células con diferentes funciones tales como la presentación de antígenos tumorales hasta la destrucción de las células cancerosas. Por ello, los modelos de crecimiento tumoral son presentados como modelos de presa-depredador entre células cancerosas y efectoras. La relación presa-depredador fue desarrollada por Lotka en 1910 y posteriormente por Volterra en 1925 [10]. Con base en ello, en 1994 Kuznetsov et al. [11] aplicaron los conceptos de Lotka-Volterra considerando como presas a las células tumorales y depredadores a las células efectoras, dando lugar al siguiente sistema:

$$\dot{E} = s + p\frac{ET}{g+T} - mET - dE, \tag{1}$$

$$\dot{T} = aT(1 - bT) - nET, \tag{2}$$

donde $E(t)$ representa las células efectoras, $T(t)$ las células tumorales y $s$, $p$, $g$, $m$, $d$, $a$, $n$, $b$ son parámetros positivos. La población de células tumorales $T(t)$ tiene un crecimiento logístico donde $b^{-1}$ es la capacidad de carga máxima del tumor y $a$ la tasa de crecimiento tumoral. El término $nET$ describe la muerte de células tumorales en cada encuentro con las células efectoras. En la Ecuación (1) el término $s$ es el flujo constante de células efectoras, $d$ es la tasa de muerte natural y $-mET$ describe la inactivación de células efectoras al interaccionar con las células tumorales. El término $p\frac{ET}{g+T}$ representa la función de saturación de Michaelis-Menten que describe la respuesta inmune hacia el tumor [10, 11].

El modelo de Kuznetsov describe varias características importantes en la dinámica de los tumores inmunogénicos, como patrones de crecimiento celular oscilatorio y periodos de latencia tumoral. El estado de latencia sucede cuando el tumor permanece con poco o ningún aumento en la población de células tumorales durante un tiempo prolongado. Posteriormente, el tumor crece hasta aproximadamente $10^6$ células, lo que se considera peligroso de acuerdo con las unidades del modelo de Kuznetsov [10, 11].

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

El sistema de Ecuaciones (1)-(2) puede ser utilizado como base para construir uno con enfoque hacia los mecanismos biológicos que caracterizan al cáncer gástrico. Por lo tanto, se propone un modelo matemático con el fin de investigar la respuesta de un adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal y su interacción con el sistema inmunitario bajo un tratamiento de IAC. De esta forma, se estudian las propiedades cualitativas del modelo para establecer predicciones y condiciones en la eliminación del cáncer gástrico a través del tratamiento. Para el desarrollo del modelo se plantean algunas suposiciones biológicas que son explicadas a continuación.

### *II-A. Suposiciones Biológicas*

El modelo matemático presentado en este trabajo ha sido construido considerando las siguientes suposiciones biológicas:

1. Un adenocarcinoma gástrico presenta inmunogenicidad para inducir una respuesta inmunitaria. En ausencia de dicha respuesta, existe un crecimiento de la población de células cancerosas gástricas [4], descrito por la ley de crecimiento logístico [10].
2. Existe evidencia morfológica en [7, 8] de células de adenocarcinomas gástricos avanzados que canibalizan a neutrófilos (células del sistema inmunitario). No obstante, en otros tumores hay evidencia de canibalismo de células malignas hacia otras células inmunitarias [9]. En este sentido, se supone que las células cancerosas gástricas canibalizan a las células T como una forma de evadir la respuesta inmunitaria.
3. Existe una mayor proliferación de células cancerosas gástricas por la presencia prolongada de la bacteria H. Pylori [2, 17, 18].
4. Las principales células presentadoras de antígenos, las Células Dendríticas (CDs), permanecen en un estado homeostático, sin embargo, son activadas por el estímulo de sus receptores celulares al identificar a los antígenos tumorales de las células cancerosas gástricas [19]. La población de CDs crece logísticamente como respuesta a la presencia del cáncer derivado de su activación, considerando una constante de carga máxima durante la respuesta inmunitaria. Después de presentar los antígenos tumorales a las células T, las CDs maduras mueren por apoptosis [19].
5. Las células T se activan y son capaces de matar por lisis a las células cancerosas gástricas [10].
6. Existe una muerte natural de células T [10].
7. Eventualmente las células T se inactivan por tolerancia inmune [10, 19].
8. La cantidad de la población tumoral eliminada por IAC depende de la cantidad de células T suministradas.

### *II-B. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del Modelo*

En esta subsección se presenta el modelo matemático de adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal con IAC. Por $x(t)$ se denota a la población de células cancerosas de adenocarcinoma gástrico, por $y(t)$ a la población de CDs y por $z(t)$ a la población de células T.

La razón de cambio de las células cancerosas gástricas se define mediante la siguiente EDO:

$$\dot{x} = \alpha_x x\left(1 - \beta_x x\right) + \eta_x x + \delta_x xz - \gamma_x xz, \tag{3}$$

donde el primer término de la izquierda representa el crecimiento logístico de la población de células cancerosas en el cual $\beta_x$ es la capacidad de carga máxima y $\alpha_x$ la tasa de crecimiento de esta población. El segundo término $\eta_x x$ simboliza el incremento de la población de células tumorales por la estimulación de una población constante de H. Pylori adherida a la mucosa infectada. El tercer término $\delta_x xz$ representa el canibalismo de las células cancerosas hacia las células T, siendo un beneficio para la supervivencia del tumor en condiciones metastásicas. Por último, en el cuarto término $\gamma_x xz$ se considera la muerte de células cancerosas debido a una respuesta inmunitaria efectuada por las células T. Cabe resaltar que la respuesta inmunitaria se vuelve más fuerte en presencia del tratamiento de IAC.

La razón de cambio de las CDs se establece mediante la siguiente EDO:

$$\dot{y} = \alpha_y y\left(1 - \beta_y y\right) + \delta_y xy - \gamma_y yz, \tag{4}$$

donde el primer término de la izquierda representa el crecimiento logístico de CDs durante la respuesta inmunitaria causada por el término de activación $\delta_y xy$ de esta población al interaccionar con las células tumorales. El crecimiento logístico es asumido por simplicidad del sistema y limitar la cantidad máxima de CDs durante la respuesta inmunitaria. El tercer término $\gamma_y yz$ simboliza la muerte de las CDs maduras al presentar los antígenos tumorales a las células T.

La razón de cambio de las células T es descrita mediante la siguiente EDO:

$$\dot{z} = \delta_z yz - \gamma_z xz - \mu_z z + \alpha_z, \tag{5}$$

donde el primer término de la izquierda $\delta_z yz$ simboliza la activación de las células T por las CDs maduras. El segundo término $\gamma_z xz$ representa la reducción o inactivación de células T por cada interacción con las células cancerosas gástricas, lo cual disminuye su capacidad de matar en el futuro. El tercer término $\mu_z z$ representa la muerte natural de células T. El suministro externo, $\alpha_z$, es el parámetro de tratamiento de IAC. Las células T extraídas del sitio del tumor de un paciente son modificadas vía *in-vitro* y, posteriormente, son inyectadas en el sitio del tumor en cantidades grandes de aproximadamente $10^{11}$ células para un tratamiento exitoso [20].

El sistema de Ecuaciones (3)-(5) tiene las condiciones iniciales generales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$. Además, la dinámica del modelo se encuentra en el octante no negativo definido por

$$\mathbf{R}^3_{+,0} = \left\{x(t) \geq 0,\ y(t) \geq 0,\ z(t) \geq 0\right\},$$

bajo la propiedad de positividad para sistemas dinámicos establecida por De Leenheer *et al.* en [23]. La positividad del sistema implica que, dada cualquier condición inicial no negativa, todas las soluciones del sistema (3)-(5) serán positivamente invariantes en $\mathbf{R}^3_{+,0}$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Con el modelo propuesto se explora el caso de un adenocarcinoma gástrico avanzado de tipo intestinal y sus principales mecanismos de supervivencia. Para este sistema se establece que la población de células de cáncer gástrico tiene una dimensión de $10^{11}$ células (aprox. 100 g), donde el tumor se encuentra en un estado avanzado antes de ocasionar la muerte del paciente con $10^{12}$ células (aprox. 1 kg) [21]. Por lo tanto, la dimensión por unidad para las tres poblaciones celulares es $10^{11}$ células y la escala de tiempo es por meses.

Con la finalidad de simular la dinámica del modelo propuesto, fueron estimados los valores de los parámetros utilizando la herramienta Eureqa, software de inteligencia artificial basado en algoritmos genéticos [22]. La descripción, los valores y las unidades de los parámetros se muestran en la Tabla II. Se espera que el sistema (3)-(5) produzca resultados sobre la evolución del adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal, sus mecanismos de supervivencia y el efecto producido por el tratamiento de IAC.

## III. Puntos de Equilibrios y Estabilidad Local

Uno de los pasos más importantes para estudiar la dinámica del sistema de ecuaciones (3)-(5) es calcular sus puntos de equilibrio y analizar la estabilidad de sus soluciones alrededor de dichos puntos. En particular, el punto de equilibrio de interés es el denominado *libre de tumor* [10]. Los puntos de equilibrios son obtenidos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_x x\left(1-\beta_x x\right)+\eta_x x+\delta_x xz-\gamma_x xz=0, \tag{6}$$

$$\alpha_y y\left(1-\beta_y y\right)+\delta_y xy-\gamma_y yz=0, \tag{7}$$

$$\delta_z yz-\gamma_z xz-\mu_z z+\alpha_z=0. \tag{8}$$

Si se resuelve para cada una de las variables del sistema (6)-(8), se consiguen las siguientes expresiones:

$$x = 0 \text{ ó } x=\frac{\alpha_x+\eta_x}{\alpha_x\beta_x}-\left(\frac{\gamma_x-\delta_x}{\alpha_x\beta_x}\right)z, \tag{9}$$

$$y = 0 \text{ ó } y=\frac{1}{\beta_y}+\frac{\delta_y x-\gamma_y z}{\alpha_y\beta_y}, \tag{10}$$

$$z = \frac{\alpha_z}{\mu_z-\delta_z y+\gamma_z x}. \tag{11}$$

Al resolver para cada variable, se obtienen como resultado siete puntos de equilibrio denotados como $P_i=(x_i^*,y_i^*,z_i^*)$ donde $i=0,1,...,6$. Para $i=0,1,2$ se definen los puntos de equilibrio libres de tumor, para $i=3,4$ se establecen los equilibrios libres de CDs, y finalmente para $i=5,6$ se definen los puntos de equilibrio de persistencia tumoral o evasión inmunitaria del tumor. Por simplicidad no son incluidos los cálculos de obtención de estos equilibrios debido a su extensa composición algebraica. Numéricamente, con base en los valores de los parámetros presentados en la Tabla II, se encontraron puntos de equilibrio fuera del octante no negativo que no son biológicamente factibles. El análisis de estabilidad local, el cual se realiza al evaluar cada punto de equilibrio en la matriz Jacobiana del sistema (3)-(5) y posteriormente analizando los signos de sus valores propios, permite concluir que la mayoría de los equilibrios calculados son inestables. La expresión general de la matriz Jacobiana se muestra a continuación:

$$J(x,y,z)=\begin{bmatrix} A & 0 & -x\left(\gamma_x-\delta_x\right) \\ \delta_y y & B & -\gamma_y y \\ -\gamma_z z & \delta_z z & C \end{bmatrix}$$

donde $A=\alpha_x\left(1-2\beta_x x\right)-z\left(\gamma_x-\delta_x\right)+\eta_x$, $B=\alpha_y\left(1-2\beta_y y\right)+\delta_y x-\gamma_y z$ y $C=\delta_z y-\mu_z-\gamma_z x$.

Para investigar la estabilidad del equilibrio libre de tumor $P_0$ se consideran los siguientes escenarios. Se comienza con el análisis cuando no hay tratamiento de IAC, es decir, $\alpha_z=0$. Para este caso, el equilibrio libre de tumor es $P_0=(0,0,0)$, en el cual el sistema siempre se comportará como un nodo-silla.

En otro escenario, cuando hay un suministro de tratamiento, es decir, $\alpha_z>0$, el equilibrio libre de tumor está dado por $P_{\text{IAC}}=(0,0,\alpha_z/\mu_z)$. Al evaluar $P_{\text{IAC}}$ en la matriz Jacobiana del sistema, se obtienen los siguientes valores propios:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\left(\alpha_x+\eta_x\right)-\frac{\alpha_z}{\mu_z}\left(\gamma_x-\delta_x\right),\\ \lambda_2&=-\mu_z,\\ \lambda_3&=\alpha_y-\frac{\alpha_z\gamma_y}{\mu_z}.\end{aligned}$$

El equilibrio $P_{\text{IAC}}$ será local asintóticamente estable si $\lambda_1<0$ y $\lambda_3<0$. Para establecer una condición suficiente para la estabilidad asintótica local se debe cumplir:

$$\alpha_z>\max\left\{\frac{\mu_z\left(\alpha_x+\eta_x\right)}{\gamma_x-\delta_x},\frac{\alpha_y\mu_z}{\gamma_y}\right\}, \tag{12}$$

al asumir que la siguiente condición también se cumple

$$\gamma_x>\delta_x. \tag{13}$$

La condición (13) implicaría que la tasa de canibalismo en las células cancerosas es menor que su tasa de muerte por la respuesta inmunitaria. Intuitivamente, la estabilidad asintótica en el equilibrio $P_{\text{IAC}}$ implica que la administración del tratamiento de inmunoterapia es capaz de eliminar el tumor al converger en $x_0^*=0$.

Con base en el análisis de estabilidad realizado, se concluye el siguiente resultado.

**Resultado 1.** *Si las condiciones (12) y (13) se satisfacen. Entonces, el punto de equilibrio libre de tumor* $P_{IAC}=\left(0,0,\frac{\alpha_z}{\mu_z}\right)$ *es local asintóticamente estable.*

## IV. Simulaciones Numéricas

En esta sección se muestran simulaciones numéricas de la dinámica del modelo de adenocarcinoma gástrico de tipo intestinal. Los valores de los parámetros utilizados son presentados en la Tabla II, con los cuales las condiciones (12) y (13) se satisfacen.

En la Fig. 1 se presentan las soluciones del sistema (3)-(5) en los casos sin tratamiento ($\alpha_z=0$) y con tratamiento de IAC. Para el caso $\alpha_z=0$, las soluciones ilustran oscilaciones periódicas. La masa gástrica tumoral se cicla en un periodo

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLA II

DESCRIPCIÓN, VALORES, DIMENSIONES Y UNIDADES DE LOS PARÁMETROS.

| Parámetros | Descripción | Valor | Dimensión y Unidades |
|---|---|---|---|
| $\alpha_x$ | Tasa de crecimiento de la población de células cancerosas gástricas | 8.0504 | meses$^{-1}$ |
| $\beta_x$ | Capacidad de carga máxima de las células cancerosas gástricas | 0.1273 | células$^{-1}$ |
| $\eta_x$ | Tasa de proliferación de las células cancerosas gástricas por la estimulación de H. Pylori | 2.1979 | meses$^{-1}$ |
| $\delta_x$ | Tasa de canibalización celular de las células cancerosas gástricas hacia las células T | 0.1249 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\gamma_x$ | Tasa de eliminación de las células cancerosas gástricas por las células T | 3.5 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\alpha_y$ | Tasa de proliferación de las CDs inducidas por factores de crecimiento | 3.5976 | meses$^{-1}$ |
| $\beta_y$ | Capacidad de carga máxima de las CDs | 0.1461 | células$^{-1}$ |
| $\delta_y$ | Tasa de activación de las CDs al capturar antígenos tumorales de las células cancerosas gástricas | 0.1709 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\gamma_y$ | Tasa de apoptosis de las CDs al presentar los antígenos tumorales a las células T | 1.4818 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\delta_z$ | Tasa de activación de las células T por su interacción con las CDs | 1.5255 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\gamma_z$ | Tasa de inactivación de las células T por su interacción con las células cancerosas gástricas | 0.2498 | células$^{-1}$ por meses$^{-1}$ |
| $\mu_z$ | Tasa de muerte natural de las células T | 0.4171 | meses$^{-1}$ |
| $\alpha_z$ | Parámetro de tratamiento de IAC | Para ser estimado | $10^{11}$ células/mg de dosis |

de aproximadamente 9 meses [24]. Durante los primeros 2 o 3 meses, el tumor alcanza un valor cercano a su capacidad de carga máxima y luego desciende a un volumen que no se pudiera detectar en un estudio clínico, este proceso se conoce como latencia tumoral, en el cual el tumor permanece en un estado de remisión por un tiempo considerable [10, 11]. Después, entre los meses 9 y 10, el tumor crece debido al fenómeno de recurrencia tumoral, con implicaciones devastadoras en un individuo con cáncer gástrico temprano y avanzado [24, 25]. En general, las oscilaciones tumorales e inmunes a largo plazo muestran que las células cancerosas gástricas y las células del sistema inmunitario pueden coexistir durante bastante tiempo. Dinámicas similares han sido reportadas en otros trabajos experimentales y teóricos [10, 11].

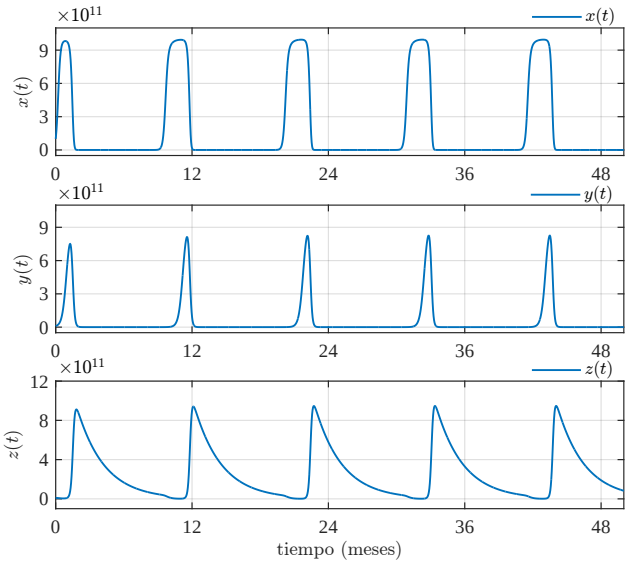



Fig. 1. Soluciones en el tiempo para las tres poblaciones celulares sin tratamiento de IAC.

Para el caso con tratamiento de IAC, donde $\alpha_z$ cumple con la condición (12), se tiene que

$$\alpha_z > 1.2665.$$

Por lo tanto, se propone $\alpha_z = 1.27$. En la Fig. 2, se observa que las soluciones convergen hacia el punto de equilibrio libre de tumor $P_{\text{IAC}}$. En la serie de tiempo de $x(t)$ se observa que la trayectoria de la población de células cancerosas converge a cero cercano a los dos meses con el tratamiento. En la serie de tiempo de $y(t)$, la respuesta de las CDs se ve reflejada solamente al momento de la respuesta inmune contra el tumor. En cambio, en la serie de tiempo de $z(t)$ se observa que las células T activadas crecen hasta converger en un estado homeostático, derivado de la inmunoterapia. En ambas Figuras, las unidades de tiempo en los tres paneles son en meses y la dimensión para las tres poblaciones celulares es $10^{11}$ células.

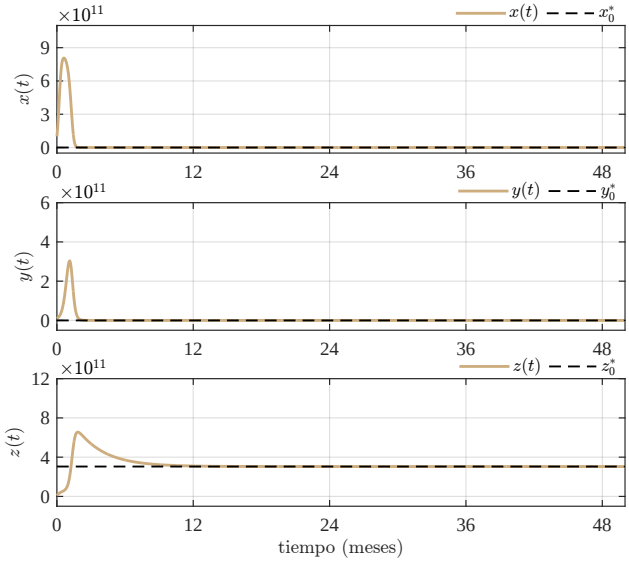



Fig. 2. Soluciones en el tiempo para las tres poblaciones celulares con tratamiento de IAC. Se observa que convergen al equilibrio ilustrado por la línea punteada.

## V. CONCLUSIONES

Los modelos matemáticos proporcionan una alternativa para comprender la dinámica entre la evolución tumoral, la respuesta inmunitaria y la aplicación de diversos tratamientos.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

En este trabajo se formula un modelo matemático cualitativo compuesto por tres EDOs de primer orden que describen las interacciones entre las células cancerosas gástricas, las células CDs y las células T efectoras cuando se aplica un tratamiento de inmunoterapia adoptiva celular.

En ausencia de tratamiento el modelo exhibe oscilaciones periódicas que permiten predecir el fenómeno conocido como latencia tumoral. En las simulaciones numéricas se observa que el periodo de latencia tumoral es aproximadamente 9 meses, lo cual coincide parcialmente con lo reportado en la literatura de pacientes que han sido sometidos a quimioterapia preoperatoria y una gastrectomía para disminuir su carga tumoral [24]. Sin embargo, el objetivo principal de este trabajo consiste en establecer una concentración suficiente de tratamiento que permita asegurar la eliminación de un adenocarcinoma gástrico en una etapa inicial.

Mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov, se establecieron condiciones suficientes para asegurar la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio libre de tumor $P_{\text{IAC}} = (0, 0, \alpha_z/\mu_z)$. La condición se obtuvo como una desigualdad sobre el parámetro de tratamiento $\alpha_z$ en función de otros parámetros del modelo, como se observa en el **Resultado 1**.

Las simulaciones numéricas ilustran que cuando la concentración de tratamiento cumple con la condición (12), la población de células cancerosas disminuye aproximadamente en dos meses. La condición (13) es importante porque si se busca erradicar el cáncer gástrico, la actividad caníbal de las células cancerosas gástricas debe ser menor en comparación con la respuesta inmunitaria contra el tumor. En la actualidad el fenómeno de canibalismo tumoral está generando mayor interés en la comunidad científica por su posible implicación en la supervivencia de algunos tumores malignos al evadir la respuesta inmunitaria.

Con los valores de los parámetros presentados en la Tabla II, el modelo logra exhibir órbitas periódicas en sus soluciones, sin embargo, como trabajo futuro se planea establecer valores que permitan describir una dinámica cuantitativa sobre la evolución del adenocarcinoma gástrico del tipo intestinal. Esto permitiría realizar un análisis de la dinámica global del sistema con el propósito de establecer un protocolo de administración para el tratamiento IAC que permita asegurar la eliminación de un adenocarcinoma gástrico en etapas más avanzadas. Experimentos *in silico* permitirán explorar diversos protocolos de administración de tratamiento con diferentes cargas tumorales para comprender mejor el efecto de la inmunoterapia contra el cáncer gástrico.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por el TecNM con el proyecto número 8063.20-P titulado "*Desarrollo de protocolos de administración de tratamientos contra el cáncer con base en el análisis de modelos matemáticos de EDOs*". El primer autor agradece a CONACyT por la beca de posgrado No. 731445 para la realización de este trabajo de investigación.

## REFERENCIAS

[1] International Agency for Research on Cancer (IARC), Cancer today. World Health Organization, 2019. [Online].

[2] L.E. Wroblewski, R.M. Peek, *Helicobacter pylori in gastric carcinogenesis: mechanisms*. GR Clinics, vol. 42, no. 2, pp. 285-298, 2013.

[3] S. Nagini, *Carcinoma of the stomach: A review of epidemiology, pathogenesis, molecular genetics and chemoprevention*. Wld. J. of GI Oncol., vol. 4, no. 7, pp. 156, 2012.

[4] K. Lee, H. Hwang, K.T. Nam, *Immune response and the tumor microenvironment: how they communicate to regulate gastric cancer*. Gut and Liver, vol. 8, no. 2, pp. 131, 2014.

[5] Z. Song, Y. Wu, J. Yang, D. Yang, X. Fang, *Progress in the treatment of advanced gastric cancer*. Tumor Biology, vol. 39, no. 7, pp. 1-7, 2017.

[6] L. Yang, Y. Wang, H. Wang, *Use of immunotherapy in the treatment of gastric cancer*. Oncol. Letters, vol. 18, no. 6, pp. 5681-5690, 2019.

[7] R.A. Caruso, A.O. Muda, A. Bersiga, L. Rigoli, C. Inferrera, *Morphological evidence of neutrophil-tumor cell phagocytosis (cannibalism) in human gastric adenocarcinomas*. Ultrastructural pathology, vol. 26, no. 5, pp. 315-321, 2002.

[8] V. Barresi, G. Branca, A. Ieni, L. Rigoli, G. Tuccari, R.A. Caruso, *Phagocytosis (cannibalism) of apoptotic neutrophils by tumor cells in gastric micropapillary carcinomas*. Wld. J. of GE, vol. 21, no. 18, pp. 5548, 2015.

[9] F. Lozupone, S. Fais, *Cancer Cell Cannibalism: A Primeval Option to Survive*. Curr. Mol. Med., vol. 15,

[10] A. Eladdadi, P. Kim, D. Mallet, Mathematical models of tumor-immune system dynamics. Springer, vol. 107, 2014.

[11] V.A. Kuznetsov, I.A. Makalkin, M.A. Taylor, A.S. Perelson, *Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: parameter estimation and global bifurcation analysis*. Bull. of Math. Bio., vol. 56, no. 2, pp. 295-321, 1994.

[12] L. de Pillis, W. Gu, A. Radunskaya, *Mixed immunotherapy and chemotherapy of tumors: modeling, applications and biological interpretations*. J. of Theor. Bio., vol. 238, no. 4, pp. 841-862, 2006.

[13] N. Kronik, Y. Kogan, M. Elishmereni, K. Halevi-Tobias, S. Vuk-Pavlović, Z. Agur, *Predicting outcomes of prostate cancer immunotherapy by personalized mathematical models*. PloS one, vol. 5, no. 12, 2010.

[14] F. Castiglione, B. Piccoli, *Optimal control in a model of dendritic cell transfection cancer immunotherapy*. Bull. of Math. Bio., vol. 68, no. 2, 2006.

[15] M. Itik, S.P. Banks, *Chaos in a three-dimensional cancer model*. Int. J. Bifurcat. and Chaos, vol. 20, no. 1, pp. 71-79, 2010.

[16] U. Ledzewicz, B. Amini, H. Schättler, *Dynamics and control of a mathematical model for metronomic chemotherapy*. Math. Biosci. & Eng., vol. 12, no. 6, pp. 1257, 2015.

[17] Y.C. Chen, Y. Wang, J.Y. Li, W.R. Xu, Y.L. Zhang, *H. Pylori stimulates proliferation of gastric cancer cells through activating mitogen-activated protein kinase cascade*. Wld. J. of GE, vol. 12, no. 37, pp. 5972, 2006.

[18] L.P. Liu, X.P. Sheng, T.K. Shuai, Y.X. Zhao, B. Li, Y.M. Li, *Helicobacter pylori promotes invasion and metastasis of gastric cancer by enhancing heparanase expression*. Wld. J. of GE, vol. 24, no. 40, pp. 4565-4577, 2018.

[19] F. Granucci, I. Zanoni, *The dendritic cell life cycle*. Cell cycle, vol. 8, no. 23, pp. 3816-3821, 2009.

[20] G. Karp, and J. Iwasa, W. Marshall, Karp's Cell and Molecular Biology. Wiley, ed. 9, 2020.

[21] J.V. Frangioni, *New technologies for human cancer imaging*. J. of Clin. Oncol., vol. 26, no. 24, pp. 4012-4021, 2008.

[22] Nutonian, Eureqa: The A.I.-Powered Modeling Engine. Nutonian Inc., 2020. [Online].

[23] P. De Leenheer, D. Aeyels, *Stability properties of equilibria of classes of cooperative systems*. IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 46, no. 12, pp. 1996-2001, 2001.

[24] I. Mokadem, W.P.M. Dijksterhuis, M. van Putten, L. Heuthorst, J.M. de Vos-Geelen, N.H. Mohammad, ..., R.H.A. Verhoeven, *Recurrence after preoperative chemotherapy and surgery for gastric adenocarcinoma: a multicenter study*. Gastric Cancer, vol. 22, no. 6, pp. 1263-1273, 2019.

[25] N. Shiraishi, K. Sato, K. Yasuda, M. Inomata, S. Kitano, *Multivariate prognostic study on large gastric cancer*. J. of Surg. Oncol., vol. 96, no. 1, pp. 14-18, 2007.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Estabilidad asintótica en un sistema de evolución tumoral bajo el tratamiento de quimioterapia metronómica

Miguel R. Garrido, Paul A. Valle[1]

***Resumen*—El cáncer es una enfermedad genética que se caracteriza por un proceso gradual y progresivo de modificaciones a nivel del genoma de las células, provocando la proliferación de sus clones mutados que perturban el equilibrio del funcionamiento del tejido afectado. En México, esta enfermedad se posiciona como la tercera causa de mortalidad a nivel nacional, no obstante, hay diversos casos en los que un tumor maligno presenta una sensibilidad heterogénea a los fármacos administrados para su control y eventual erradicación. De acuerdo con lo anterior, se analiza este complejo problema desde la perspectiva del modelizado matemático haciendo uso de un sistema de EDOs de primer orden propuesto por Ledzewicz et al. en el 2015. La importancia de este sistema radica en que describe el crecimiento tumoral como una consecuencia directa del proceso de vascularización y se propone como terapia de control la denominada quimioterapia metronómica. El análisis matemático de este sistema, con base en la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov, permite establecer condiciones suficientes para asegurar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio libre de tumor. Adicionalmente, se presentan simulaciones numéricas pertinentes que ilustran los resultados matemáticos obtenidos en el trabajo realizado y se utilizan como base para discutir las implicaciones biológicas de estos resultados.***

## I. INTRODUCCIÓN

El cáncer es una enfermedad genética, causante de una elevada tasa de mortalidad en el Mundo; es por esto, que en el último cuarto del siglo XX y principios del XXI, científicos de distintas áreas, han investigado para contribuir en el avance hacia la creación de nuevos fármacos contra esta afección y su administración eficaz y eficiente, llegando a estos últimos atributos con ayuda del modelizado matemático con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de primer orden.

México no ha sido la excepción, desde la década de 1960 el cáncer se ubicó entre las diez principales causas de muerte [1], siendo en 1960 y 1970 el sexto motivo de mortalidad ascendiendo diez años después al quinto puesto, para 1990 ocupó la segunda posición hasta 2004, periodo donde descendió un lugar mismo que ocupa hasta el 2014, año en el que representó el 12.2 % de las defunciones, únicamente por debajo de las enfermedades cardiacas (19.2 %) y la diabetes mellitus (14.8 %), así mismo la mortalidad por neoplasias malignas fue mayor en mujeres (13.97 %) que en hombres (10.74 %). El 43.7 % de las muertes correspondieron a población en edad productiva (15-64 años) y 54.4 % a población adulta mayor (65 años o más). Tumores como el de la próstata, tráquea, bronquios, pulmón y estómago son los que más afectan al género masculino representando 36.1 % de los fallecimientos, por su parte el cáncer de mama y cervicouterino constituyen el 25.7 % de las defunciones en lo que se refiere a población femenina, lo anterior de acuerdo con el Instituto Nacional de Estadística y Geografía [2].

Si bien, una célula es suficiente para que esta afección tenga lugar en determinadas partes del organismo (sin llegarse a dar casos en los que haya existencia de un tumor dentro de ella), que, a diferencia de otras patologías, su campo de acción abarca a un gran número de estas. Sólo cerca de un tercio de la población la presenta, a pesar de que el cuerpo humano tiene aproximadamente trillones de células, de las cuales, billones se duplican, manteniéndose en cada una de estas, la ínfima probabilidad de estar sujetas a un proceso gradual progresivo de cambios en el contenido de sus cromosomas, que por el gran número de duplicaciones, probabilísticamente la aparición de casos concernientes a esta enfermedad aumentaría, sin embargo, no sucede así en la realidad, puesto que el cáncer es una patología que involucra modificaciones dinámicas en el genoma, en el que la célula sana en primera instancia, debe pasar por una transformación gradual evolutiva a nivel de sus genes para que finalmente torne en derivados altamente malignos, que se dividen sin tener límite, debido a la presencia de la telomerasa, que impide que los telómeros de los cromosomas lleguen a su longitud crítica, dando como resultado la posibilidad nula de que las neoplasias cesen su duplicación y envejecimiento, evidenciando estas, mutaciones puntuales acumulativas en su código genético, mismas que les proveen de ventajas selectivas, como la proliferación, invasividad, pérdida de diferenciación y apoptosis, llegando así a formar una sociedad denominada tumor, que evoluciona bajo los preceptos Darwinianos en el que los clones mutados prevalecen para asegurar su supervivencia [3].

Las Biomatemáticas es una disciplina de la ciencia que involucra tanto conocimientos de las matemáticas como de la biología con la finalidad de explicar una gran variedad de procesos biológicos o fisiológicos con el auxilio del llamado modelo matemático ajustado, siendo este una herramienta que puede ser empleada para predecir la evolución en el tiempo de una enfermedad en escenarios difíciles o imposibles de explorar en un paciente o evento real.

La temática concerniente al cáncer es preponderantemente embarullada a causa de ser es un sistema complejo cuyo comportamiento global se desprende de la interacción entre los compartimentos que integran el microambiente del tumor que a su vez, poseen distinta naturaleza y propiedades distintivas que dan lugar a diversos escenarios que pueden ser

[1] Tecnológico Nacional de México / IT Tijuana. Posgrado en Ciencias de la Ingeniería, grupo de Investigación BioMath. e-mail: miguel.gonzalezg18@tectijuana.edu.mx, paul.valle@tectijuana.edu.mx.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

constatados en la amplitud de situaciones y sus espectros, en el que el primer caso tiene lugar cuando la masa maligna es quimioterapéuticamente sensible de forma homogénea, convirtiéndose en el caso con menor grado de dificultad a tratar, sin embargo, existen otros como cuando el tumor está compuesto por subpoblaciones cuya sensibilidad al tratamiento es distinta, anulando a la estrategia de Máxima Dosis Tolerada (MDT), dando posibilidad para introducir nuevos tratamientos como lo es la quimioterapia metronómica, que consiste en pequeñas dosis del fármaco en determinados intervalos de tiempo, mostrando efectos ventajosos en el tratamiento contra esta enfermedad, como lo es su efecto citotóxico y angiogénico, además de incorporar propiedades estimulantes al sistema inmunológico, no obstante es necesario encontrar directrices que proporcionen pautas contundentes para conocer y evaluar los parámetros relacionados en cuanto a la administración del fármaco y su impacto en el comportamiento (erradicación) de la neoplasia, mismos que serán proporcionados a partir de cálculos mediante la utilización de un sistema de EDOs de primer orden tomando como parteaguas el modelo matemático propuesto por Ledzewick, Amini y Schattler [4] en conjunción con la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov, cuya importancia radica en el que el análisis es útil para conocer la dinámica del sistema bajo estudio en el largo plazo, así como también para establecer condiciones suficientes que permitan asegurar la estabilidad asintótica local o global, según sea el caso, del conjunto compacto invariante más grande del sistema estudiado [5,6].

## II. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA DE QUIMIOTERAPIA METRONÓMICA CONTRA EL CÁNCER

Un modelo matemático mínimamente parametrizado para la quimioterapia metronómica es un concepto nuevo en la medicina. Ledzewicz *et al*. [4], lo formulan a partir del modelo de crecimiento tumoral bajo señalización angiogénica desarrollado por Hahnfeldt *et al*. [7] y el modelo clásico para las interacciones del sistema inmunitario con el tumor ideado por Stepanova [8] el siguiente sistema de EDOs de primer orden para estudiar el efecto de la mencionada terapia sobre el crecimiento tumoral:

$$\dot{p} = \xi p \ln\left(\frac{q}{p}\right) - \theta p r - \varphi_1 p u, \tag{1}$$

$$\dot{q} = bp - \left(\mu + dp^{2/3}\right)q - \varphi_2 q u, \tag{2}$$

$$\dot{r} = \alpha(p - \beta p^2)r + \gamma - \delta r + \varphi_3 r u, \tag{3}$$

Las variables de interés son las siguientes: la $p(t)$ que denota el volumen del tumor primario, la $q(t)$ es la capacidad de carga de su vasculatura y $r(t)$ es una cantidad no dimensional normalizada relacionada con la actividad de varios tipos de células T durante la reacción inmune, se refiere a esta como la densidad inmunocompetente celular. Los demás coeficientes son parámetros con valores no negativos.

La Ec. (2) describe las interacciones entre el tumor y su vasculatura que consiste en un equilibrio entre términos estimulantes e inhibidores. Aquellos que pertenecen a la primera categoría son proporcionales al volumen del tumor primario que actúan localmente, lo que se refleja en su rápida eliminación, por su parte, el accionar de los segundos se encuentra bajo un esquema sistemático. Aquí el término de estimulación es proporcional al volumen del tumor, representándose por el producto entre $bp$, luego el término de inhibición es representado por $dp^{2/3}q$, donde $d$ es una constante que simboliza el factor de inhibición. La relación funcional $p^{2/3}q$ refleja una correlación entre la capacidad de carga $q$ y la superficie del tumor a través de la cual necesitan ser liberados los inhibidores. La constante $\mu$ denota la tasa natural de muerte para células relacionadas con la capacidad de carga, cuyo valor resulta ínfimo.

La Ec. (3) resume las principales dependencias recíprocas del tumor con el sistema inmunitario del organismo vivo. El parámetro γ representa la tasa combinada del influjo de células T generadas por distintos órganos. El coeficiente δ es simplemente la tasa natural de muerte de estas células T. El primer término de esta ecuación modeliza la proliferación de linfocitos para tumores pequeños, que a su vez es estimulada por el antígeno tumoral y se considera que el efecto es directamente proporcional al volumen tumoral.

Los tumores grandes suprimen la actividad del sistema inmunitario, las principales razones se encuentran en una inadecuada estimulación de las fuerzas inmunes, así como una supresión generalizada de linfocitos a la actividad del tumor [8]. Por lo tanto, el modelo original incluye estas características mediante la inclusión del término negativo de $\beta p^2$. Así $1/\beta$ corresponde a un umbral más allá del cual el sistema inmune se vuelve deprimido por el tumor en crecimiento. Los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ se utilizan para calibrar estas interacciones y colectivamente describen la influencia neta de la dependencia de la actividad del sistema inmunitario con el estado de progreso del tumor.

La Ec. (1) describe el crecimiento del tumor primario bajo la ley de Gompertz modificada. El término negativo $\theta pr$ modeliza los efectos beneficiosos de la reacción del sistema inmune, donde $\theta$ denota la velocidad a la que se eliminan las células cancerosas por la actividad de las células T. El modelo sufre modificaciones debido al empleo del tratamiento de la quimioterapia metronómica, mediante la incorporación de los términos $\varphi_1\, pu$ y $\varphi_1 qu$ a (1) y (2), respectivamente, a causa del efecto citotóxico y las propiedades antiangiogénicas [4].

En la temática concerniente al sistema inmunitario, cabe señalar que la quimioterapia metronómica repercute de manera positiva, actuando tanto por mecanismos directos como indirectos, por ejemplo, agota a las células Treg e inhibe las MDSC (células supresoras derivadas de mieloides). También, mejora la función de las células dendríticas, cuyo efecto se ve reflejado en el aumento de la actividad del sistema inmunitario. Además, mejora la inmunogenicidad del tumor, mediante el incremento del antígeno asociado a la masa cancerosa y el choque térmico de proteínas [9]. Resumiéndose lo anterior en el término de $\varphi_3 ru$ que describe el efecto inmunoestimulante del tratamiento médico. Los valores de los parámetros del sistema (1)-(3) se muestran en la Tabla I

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Tabla I. VARIABLES Y VALORES DE PARÁMETROS DE INTERÉS PARA LAS SIMULACIONES, RECUPERADO DE [4].

| Variables | Interpretación | Valores | Dimensión |
|---|---|---|---|
| $p$ | Volumen del tumor | | $10^6$ células |
| $q$ | Capacidad de carga de la vasculatura | | $10^6$ células |
| $r$ | Densidad inmunocompetente celular | | Orden de magnitud no dimensional |
| $u$ | Concentración del agente citotóxico | | mg de dosis / $10^6$ células |
| $\alpha$ | Tasa de proliferación del sistema inmune estimulado por el tumor | 0.0529 | 1 / ($10^6$ células × unidad de tiempo) |
| $\beta$ | Inverso del umbral de supresión tumoral | 0.00291 | 1 / ($10^6$ células) |
| $\gamma$ | Entrada constante en el sistema inmune | 0.03 | 1 / unidad de tiempo |
| $\delta$ | Tasa de muerte para las células de la vasculatura | 0.3743 | 1 / unidad de tiempo |
| $\theta$ | Tasa de eliminación de las células cancerosas | 0.1 | 1 / unidad de tiempo |
| $\xi$ | Parámetro de crecimiento del tumor | 0.0347 | 1 / unidad de tiempo |
| $b$ | Parámetro de la estimulación inducida al tumor por la vasculatura | 5 | 1 / unidad de tiempo |
| $d$ | Parámetro de la inhibición inducida al tumor por la vasculatura | 0.0667 | 1 / (($10^6$ células)$^{2/3}$ × unidad de tiempo) |
| $\mu$ | Pérdida del soporte vascular por causas naturales | 0 | $10^6$ células / unidad de tiempo |
| $\varphi_1$ | Parámetro de muerte citotóxica | 0.005 | $10^6$ células / (mg de dosis × unidad de tiempo) |
| $\varphi_2$ | Parámetro de eliminación antiangiogénica | 0.06 | $10^6$ células / (mg de dosis × unidad de tiempo) |
| $\varphi_3$ | Parámetro inmunoestimulante | 0.01 | $10^6$ células / (mg de dosis × unidad de tiempo) |

## III. ANÁLISIS MATEMÁTICO

### A. *Existencia de los puntos de equilibrio*

Para obtener las expresiones que determinan los puntos de equilibrio del sistema (1)-(3) se igualan sus respectivas ecuaciones a cero, quedando de la siguiente manera

$$p\xi \ln\left(\frac{q}{p}\right) - \theta pr - \varphi_1 pu = 0, \tag{4}$$

$$bp - \left(\mu + dp^{2/3}\right)q - \varphi_2 qu = 0, \tag{5}$$

$$\alpha(p - \beta p^2)r + \gamma - \delta r + \varphi_3 ru = 0, \tag{6}$$

y al realizar las operaciones algebraicas correspondientes se obtiene lo siguiente

$$\left\{p = qe^{-(\theta r + \varphi_1 u)/\xi}\right\} \cup \{p = 0\}, \tag{7}$$

$$q = bp/\left(\mu + dp^{2/3} + \varphi_2 u\right), \tag{8}$$

$$r = \gamma/[\delta - \varphi_3 u - \alpha(p - \beta p^2)]. \tag{9}$$

Ahora, al considerar el punto de equilibrio libre de tumor y de vasculatura, es decir $p = q = 0$, se reescribe (9) como se indica a continuación:

$$r = \gamma/(\delta - \varphi_3 u),$$

y a partir de la anterior se obtiene la siguiente condición

$$u < \delta/\varphi_3. \tag{10}$$

### B. *Condiciones de estabilidad asintótica*

Los cálculos de la sección anterior permiten establecer el punto de equilibrio libre de tumor y de vasculatura como se indica a continuación

$$(p^*, q^*, r^*) = \left(0, 0, \frac{\gamma}{\delta - \varphi_3 u}\right). \tag{11}$$

Para analizar la estabilidad local de tal punto de equilibrio, se calcula la matriz Jacobiana de las ecuaciones que integran el modelo de Ledzewicz *et al.* descrito por las Ecuaciones (1)-(3), la cual es denota por $J$ como se indica a continuación

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{bmatrix},$$

donde $J_1 = \xi \ln(q/p) - \xi - r\theta - \varphi_1 u$, $J_2 = \xi p/q$, $J_3 = -p\theta$, $J_4 = b + 2dq/\left(3\sqrt[3]{p}\right)$, $J_5 = -\left(\mu + dp^{2/3} + \varphi_2 u\right)$, $J_6 = 0$, $J_7 = \alpha(1 - 2\beta p)r$, $J_8 = 0$ y $J_9 = \alpha(p - \beta p^2) - \delta + \varphi_3 u$.

La estabilidad local del punto de equilibrio libre de tumor y de vasculatura no se puede evaluar mediante el método indirecto de Lyapunov debido a las indeterminaciones en los elementos $J_1$ y $J_4$ de la matriz jacobiana. Schättler *et al*. presentan en [10] un análisis de estabilidad por el criterio de Routh-Hurtwitz de los equilibrios del sistema (1)-(3) para el caso en que $p, q > 0$, adicionalmente discuten la estabilidad del equilibrio libre de tumor (11), sin embargo, no proporcionan condiciones suficientes de estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov. Por lo anterior, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de tumor y de vasculatura

$$h(p, q) = p + \Phi q, \Phi > 0,$$

de la cual, al calcular su derivada se tiene que

$$L_f h(p, q) = \dot{p} + \Phi \dot{q},$$

y al aplicar la desigualdad de logaritmos

$$\ln x \leq x - 1,$$

con el objetivo de simplificar (1) se obtiene

$$\xi p \ln\left(\frac{q}{p}\right) - \theta pr - \varphi_1 pu \leq \xi q - \xi p - \theta pr - \varphi_1 pu,$$

por lo tanto, se determina una cota superior para la derivada $L_f h(p, q)$ cómo se indica a continuación

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

$$L_f h \leq -(\xi + \varphi_1 u - \Phi b)p - (\Phi\varphi_2 u + \Phi\mu - \xi)q$$
$$- \theta pr - \Phi d p^{2/3} q,$$

con base en la expresión anterior se formulan las siguientes desigualdades

$$u > (\Phi b - \xi)/\varphi_1, \quad (12)$$

$$u > (\xi - \Phi\mu)/(\Phi\varphi_2), \quad (13)$$

ahora, al considerar la condición (10) se formulan los siguientes límites sobre el parámetro de tratamiento de quimioterapia metronómica $u$

$$max\left\{\frac{\Phi b - \xi}{\varphi_1}, \frac{\xi - \Phi\mu}{\Phi\varphi_2}\right\} < u < \frac{\delta}{\varphi_3}. \quad (14)$$

A su vez, se delimitará el valor del coeficiente $\Phi$, primero, se despeja $\Phi$ de los numeradores de las desigualdades (12) y (13) y se formulan las siguientes condiciones

$$\Phi b - \xi > 0,$$
$$\xi - \Phi\mu > 0,$$

y a partir de las anteriores se formulan los siguientes límites sobre $\Phi$

$$\frac{\xi}{b} < \Phi < \frac{\xi}{\mu},$$

asumiendo que

$$b > \mu. \quad (15)$$

Por lo tanto, tanto el límite inferior como el superior de $\Phi$ se reescriben de la siguiente forma

$$\frac{\xi}{b} < \frac{\varphi_3\xi}{\varphi_2\delta + \varphi_3\mu} < \Phi < \left(\frac{\varphi_1\delta}{\varphi_3} + \xi\right)\frac{1}{b} < \frac{\xi}{\mu}, \quad (16)$$

al considerar la combinación de las desigualdades (10), (12) y (13). De acuerdo con (16), se propone un valor para $\Phi$ determinado por la siguiente expresión

$$\Phi = \left[\frac{\varphi_3\xi}{\varphi_2\delta + \varphi_3\mu} + \left(\frac{\varphi_1\delta}{\varphi_3} + \xi\right)\frac{1}{b}\right]\frac{1}{2}, \quad (17)$$

de forma que este valor asegurará que el conjunto de valores de $u$ sea no vacío.

Ahora, con el propósito de estimar un valor para un punto de equilibrio distinto al libre de tumor del sistema (1)-(3), al aplicar la desigualdad de los logaritmos se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{p} = \xi q - (\xi + \varphi_1 u)p, \quad (18)$$

$$\dot{q} = bp - \left(\mu + dp^{2/3} + \varphi_2 u\right)q. \quad (19)$$

omitiendo la respuesta inmune de este sistema de crecimiento tumoral con su vasculatura. Ahora, al igualar a cero (18) y (19) y realizar las operaciones algebraicas correspondientes para despejar $q$ se llega a lo siguiente

$$q = p(\xi + \varphi_1 u)/\xi,$$
$$q = bp/\left[\varphi_2 u + \left(\mu + dp^{2/3}\right)\right],$$

y a partir de las anteriores se obtiene la igualdad

$$p(\xi + \varphi_1 u)\frac{1}{\xi} = \frac{bp}{\mu + dp^{2/3} + \varphi_2 u},$$

de la cual se obtiene el siguiente valor para $p$

$$p = \left[\frac{(b-\mu)\xi - \varphi_1\varphi_2 u^2 - (\varphi_1\mu + \varphi_2\xi)u}{d(\xi + \varphi_1 u)}\right]^{3/2} \quad (20)$$

y de (20) se calcula la siguiente expresión cuadrática en función de $u$

$$f(u) = -\varphi_1\varphi_2 u^2 - (\varphi_1\mu + \varphi_2\xi)u + (b-\mu)\xi,$$

cuyas soluciones $f(u) = 0$ están dadas por

$$u_{1,2} = U_a \pm U_b,$$

donde

$$U_a = -\frac{\varphi_1\mu + \varphi_2\xi}{2\varphi_1\varphi_2},$$

$$U_b = \frac{\sqrt{(\varphi_1\mu + \varphi_2\xi)^2 + 4(\varphi_1\varphi_2)(b-\mu)\xi}}{2\varphi_1\varphi_2}.$$

Para emitir un veredicto acerca de cuál de las dos soluciones acotará por abajo y cual por arriba el valor de la $u$ se asume mediante la condición (15), que el radicando de $U_b$ es positivo. Por lo tanto, cuando

$$u \geq U_a + U_b,$$

se concluye que el único punto de equilibrio del sistema (18)-(19) es el libre de tumor, es decir,

$$(p^*, q^*) = (0,0),$$

y los resultados mostrados en esta sección permiten establecer lo siguiente.

**Resultado: Eliminación del tumor por la quimioterapia metronómica**. *Si las condiciones (15) y (16) se cumplen y el parámetro de tratamiento de quimioterapia metronómica u satisface la siguiente condición*

$$max\left\{\frac{\Phi b - \xi}{\varphi_1}, \frac{\xi - \Phi\mu}{\Phi\varphi_2}, U_a + U_b\right\} < u < \frac{\delta}{\varphi_3}, \quad (21)$$

*entonces, el punto de equilibrio libre de tumor* $(p^*, q^*, r^*) = \left(0,0,\frac{\gamma}{\delta - \varphi_3 u}\right)$ *del sistema (1)-(3) es único y global asintóticamente estable en* $R^3_{+,0}$.

Lo anterior implica que, para toda condición inicial no negativa, las soluciones se dirigirán hacia al punto de equilibrio libre de tumor y sin vasculatura.

## IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, se presentan las soluciones correspondientes del modelo de Ledzewicz *et al*. [4] para los casos sin tratamiento y con tratamiento de cuando se satisfacen las condiciones (15), (16) y (21)

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

para la **Eliminación del tumor por la quimioterapia metronómica**.

En las Figuras 1 y 2 se ilustran las soluciones para las tres variables del sistema, es decir, $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ con las condiciones iniciales que se indican a continuación:

$$p(0) = 400, \qquad q(0) = 550, \qquad r(0) = 0.01,$$

estas se toman a partir de lo reportado por Ledzewicz *et al.* en [4] y representan una alta concentración de células tumorales con una gran vasculatura, escenario que sin tratamiento ($u = 0$) tendría consecuencias fatales en el individuo afectado, tal como se observa en la Figura 1.

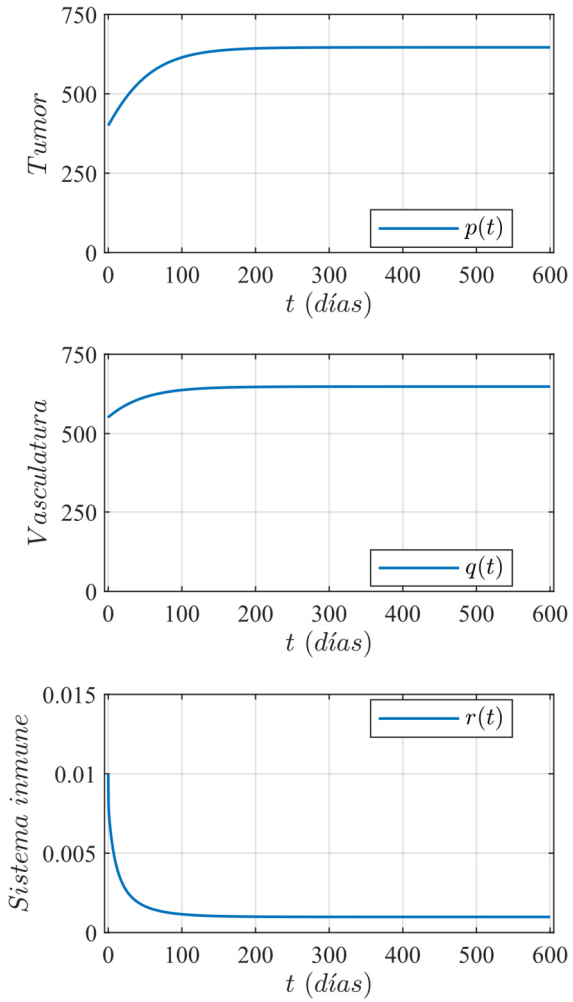



Figura 1. Soluciones del sistema de quimioterapia metronómica (1)-(3) cuando no se considera la aplicación del tratamiento, es decir, $u = 0$. Se observa que las soluciones convergen hacia un equilibrio con alta carga tumoral y vasculatura, además la concentración de células del sistema inmunológico disminuye en forma exponencial.

Ahora, cuando se considera la aplicación del tratamiento de quimioterapia metronómica ($u > 0$), específicamente cuando se cumple la condición (21), se observa en la Fig. 2 que las soluciones convergen hacia el equilibrio libre de tumor (11) dado por la siguiente expresión

$$(p^*, q^*, r^*) = \left(0,0,\frac{\gamma}{\delta - \varphi_3 u}\right) = (0,0,0.21083).$$

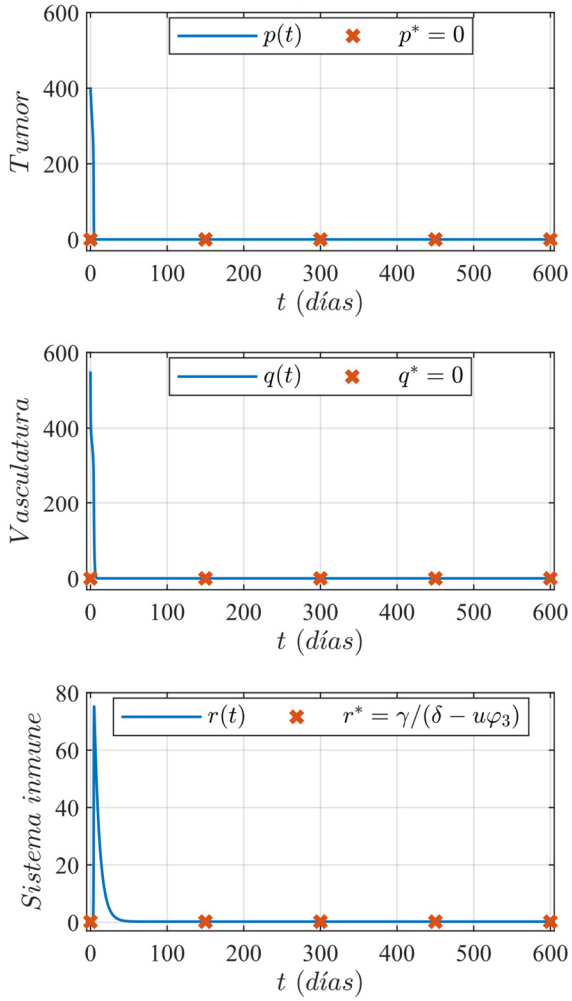



Figura 2. Estabilidad asintótica global del punto de equilibrio libre de tumor $(p^*, q^*, r^*) = (0,0,\gamma/(\delta - \varphi_3 u))$. Las $\times$ indican la ubicación en la gráfica del equilibrio correspondiente a cada variable. Se ilustra la eliminación del tumor con base en la aplicación del tratamiento de quimioterapia metronómica. El parámetro de tratamiento toma el valor de $u = 23.2002$ lo que satisface la condición (21), para esto se asigna $\Phi = 0.0299$ utilizando el valor propuesto en (17) para cumplir con la condición (16). De esta forma, se asegura que el equilibrio libre de tumor es único y global asintóticamente estable en $R^3_{+,0}$.

La eliminación del tumor es algo esperado en las simulaciones numéricas dado que las condiciones (15), (16), (17) y (21) se satisfacen como se describirá a continuación, primero, se observa que (15) se cumple para los valores de la Tabla I, para (16) se satisfacen el conjunto de desigualdades asumiendo un valor ínfimamente pequeño para $\mu$, con los cual se escribe lo siguiente

$$0.0069 < 0.0155 < \Phi < 0.0444,$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

por lo tanto, partiendo de (17), el valor de $\Phi$ es

$$\Phi = \left[\frac{\varphi_3 \xi}{\delta\varphi_2 + \varphi_3\mu} + \left(\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_3} + \xi\right)\frac{1}{b}\right]\frac{1}{2} = 0.0299,$$

lo anterior permite obtener los valores para (21)

$$max\left\{\frac{\Phi b - \xi}{\varphi_1}, \frac{\xi - \Phi\mu}{\Phi\varphi_2}, U_a + U_b\right\} = 22.9705,$$

y

$$\delta/\varphi_3 = 37.4300,$$

con los cuales se establece, finalmente, el valor para el tratamiento de quimioterapia metronómica

$$u = 22.9705 \times 1.01 = 23.2002,$$

este valor asegurará la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio libre de tumor. La escala de tiempo, de acuerdo con [4] y [10], se toma en relación con el ciclo de células tumorales en ratones y es en términos de 0.11 días.

## V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se establecieron condiciones que permitieron asegurar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio libre de tumor del modelo matemático de evolución tumoral bajo el tratamiento de quimioterapia metronómica formulado por Ledzewicz *et al*. en [4].

A través de una función de Lyapunov se logró establecer un conjunto de condiciones, en particular (16) y (21). Al cumplir estas condiciones se aseguró la **Eliminación del tumor por la quimioterapia metronómica**, resultado que se ilustra en la Figura 2 mediante las simulaciones numéricas de las variables $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ en el que convergen hacia el punto dado descrito en (11). Cabe destacar que las condiciones establecidas en este trabajo no han sido reportadas en la literatura correspondiente al análisis de este modelo, vea [4,6,10].

Respecto al análisis de estabilidad local mediante para el punto de equilibrio libre de tumor se vio imposibilitado por las indeterminaciones en dos de sus términos. Este problema ha sido analizado recientemente con una combinación hibrida numérico-analítica de la singularidad en el equilibrio por Jenner *et al*. en [11] donde lo autores obtienen resultados biológicamente factibles sobre la aplicación de un tratamiento para el control de la evolución tumoral. Sin embargo, el análisis mostrado en este trabajo permite establecer condiciones tanto para la unicidad del equilibrio libre de tumor como para asegurar su estabilidad asintótica global. Lo anterior se logra al estimar una cota superior sobre la dinámica de la ley de crecimiento de Gompertz con la desigualdad de los logaritmos.

Otra particularidad importante de este modelo se encontró en la aplicación del tratamiento de quimioterapia metronómica, debido a que, si no se cumplen las condiciones necesarias, las soluciones $r(t)$ de la densidad inmunocompetente divergen exponencialmente, para lo cual se formuló un conjunto de límites inferior y superior para el tratamiento $u$, de tal forma que se pueda asegurar que la aplicación del tratamiento eliminará la población tumoral sin afectar negativamente la población de células efectoras. Esto se logra con la condición (21).

Bajo las directrices del presente trabajo se planea el desarrollo e implementación de un controlador difuso para el parámetro $u$ para hacer un estudio comparativo del comportamiento de las variables de interés en distintos escenarios.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece a CONACyT por la beca 715124 otorgada para la realización de su tesis de maestría. Este trabajo fue apoyado por el Proyecto TecNM 8063.20-P 'Desarrollo de protocolos de administración de tratamientos contra el cáncer con base en el análisis de modelos matemáticos de EDOs'.

## REFERENCIAS

[1] Kuri-Morales, P. (2011). La transición en salud y su impacto en la demanda de servicios. Gaceta Médica de México, 147, 451-454.

[2] Reynoso N. y Torres J. (2017). Epidemiología del cáncer en México: carga global y proyecciones 2000-2020. Revista Latinoamericana de Medicina Conductual, 8(1), 9-15.

[3] Menchón S. (2007). Modelado de las diversas etapas del crecimiento del cáncer y de algunas terapias antitumorales (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.

[4] Ledzewicz, U., Amini, B., and Schättler, H. (2015). Dynamics and control of a mathematical model for metronomic chemotherapy. Mathematical Biosciences and Engineering, 12(6), 1257-1265.

[5] Khalil, H. K., Nonlinear systems, Prentice-Hall, 3rd edn., 2002.

[6] d´Onofrio A. y Gandolfi A. (2004). Tumour eradication by antiangiogenic therapy: analysis and extensions of the model by Hahnfeldt et. Al. (1999). Mathematical biosciences, 191, 159-184.

[7] Hahnfeldt, P., Panigrahy, D., Folkman, J., and Hlatky, L. (1999). Tumor development under angiogenic signaling: a dynamical theory of tumor growth, treatment response, and postvascular dormancy. Cancer research, 59(19), 4770-4775.

[8] Finn, O. J. (2012). Immuno-oncology: understanding the function and dysfunction of the immune system in cancer. Annals of oncology, 23.

[9] Hao, Y. B., Yi, S. Y., Ruan, J., Zhao, L., and Nan, K. J. (2014). New insights into metronomic chemotherapy-induced immunoregulation. Cancer letters, 354(2), 220-226.

[10] Schättler, H., Ledzewicz, U., and Amini, B. (2015). Dynamical properties of a minimally parameterized mathematical model for metronomic chemotherapy. Journal of Mathematical Biology, 72(5), 1255–1280.

[11] Jenner, A. L., Kim, P. S., and Frascoli, F. (2019). Oncolytic virotherapy for tumours following a Gompertz growth law. Journal of theoretical biology, 480, 129-140.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Modelizado de la evolución de las bacterias acidolácticas durante la fermentación de leche fresca

Emmanuel Rodríguez[1], Yolocuauhtli Salazar[2], Paul A. Valle[3]

***Resumen*— En este trabajo se formula un modelo matemático compuesto por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describe la dinámica entre la concentración de biomasa, la variación de pH, y la producción de ácido láctico por una cepa de bacterias acidolácticas (BAL) durante un proceso de fermentación bajo condiciones específicas de cultivo para producir leche fermentada tipo jocoque. El modelo matemático se construyó con base en datos experimentales obtenidos de una fermentación por lotes de leche en polvo al 10% incubada a una temperatura de 37°C durante 48 horas. Las soluciones del modelo matemático describen la información obtenida por los datos experimentales con un coeficiente de determinación ($R^2$) de 0.90 para la biomasa, 0.97 para el pH y 0.92 para la producción de acidez. Se aplicó la teoría de positividad de sistemas no lineales y el método de localización de conjuntos compactos invariantes para analizar la dinámica global del sistema y determinar sus límites ínfimos y supremos. De esta manera, se espera que el modelo se convierta en una herramienta de apoyo para la estandarización de la producción de leche fermentada y que la predicción del comportamiento de dichas variables permita asegurar la calidad de productos lácteos fermentados.**

## I. Introducción

Las bacterias acidolácticas (BAL) son un grupo de bacterias que comparten ciertas características fisiológicas y que producen ácido láctico como principal metabolito de fermentación [1]. El microbiólogo danés Orla-Jensen (1919) afirmó que "Las verdaderas bacterias del ácido láctico forman un gran grupo de cocos y bacilos Gram positivos inmóviles, sin esporas, que en la fermentación del azúcar forman principalmente ácido láctico" [2]. Son ampliamente utilizadas en la industria alimentaria por su capacidad de acidificar y preservar alimentos. Debido a sus propiedades metabólicas aportan notablemente características sensoriales, como son sabor, olor, textura, propiedades terapéuticas y valor nutricional a la producción de alimentos [3]. Debido a sus requerimientos nutritivos, la leche es el medio predilecto para su crecimiento. Por este motivo, las BAL se emplean como cultivos iniciadores para la preparación y preservación de lácteos como leche acidificada, yogurt, mantequilla, crema y queso [4].

En la industria, la mayor parte de las fermentaciones se efectúan en un cultivo por lote o discontinuo. Por lo tanto, las bacterias no pueden crecer de forma exponencial por tiempo indefinido, ya que las bacterias agotan los nutrientes al desarrollarse, cambia la composición química del medio (pH) y se acumulan compuestos tóxicos. A lo largo de este proceso, las BAL tienen 4 fases de crecimiento: latencia, exponencial, estacionaria y muerte [5]. Durante su reproducción, se produce ácido láctico el cual provoca que el pH del medio disminuya y esto causa que las condiciones se vuelvan selectivas para las BAL. Este es el principal fundamento para la inhibición de microorganismos patógenos. El número total de células en una fermentación suelen representarse en una escala logarítmica y normalmente, al final de este proceso se pueden alcanzar valores de $10^8$ a $10^9$ UFC/ml (Unidades Formadoras de Células por mililitro). Existen diversos factores ambientales que influyen en el crecimiento de las BAL, como la temperatura, el pH, la actividad del agua, la osmolaridad, etc. Además de los requerimientos nutricionales, la temperatura es uno de los factores que tienen mayor efecto sobre el crecimiento de dichos microorganismos. Hay una temperatura óptima en la cual su tasa de crecimiento es más alta y depende de las características del microorganismo utilizado. La gran mayoría son mesófilos, por lo tanto, su temperatura óptima se encuentra entre los 30 y 40°C. Generalmente, las BAL crecen en medios ligeramente ácidos, con un pH inicial de 6.4 y con un desarrollo óptimo entre 5.5 y 6.2. Su crecimiento termina cuando el pH alcanza valores entre 4 y 3.6, dependiendo de especies y cepas [3].

Los modelos matemáticos ayudan a predecir la seguridad y calidad de los alimentos sobre condiciones que varían con el tiempo. Diversos modelos matemáticos se han desarrollado para describir la dinámica celular de microorganismos. Esto se considera una herramienta para cuantificar y predecir el comportamiento microbiano sobre la influencia de diferentes factores ambientales [6]. Usualmente, los modelos cinéticos aplicados en microbiología están constituidos por modelos primarios y modelos secundarios. Un modelo primario describe la relación entre el tamaño de la población microbiana y el tiempo, mientras que el secundario describe la relación entre los parámetros del modelo primario y las condiciones del medio [7]. Así mismo, estos modelos se pueden clasificar en estructurados, aquellos que toman en cuenta el estado fisicoquímico de las bacterias como una variable; y no estructurados, aquellos que solo consideran la biomasa por su concentración [8]. El modelo primario de Gompertz [9] es uno de los más utilizados en la literatura, éste se basa en una relación exponencial entre la tasa de crecimiento y la densidad de una población. Otros modelos importantes son el de Richards [10], Stannard et al. [11], Schnute [12] y Baranyi & Roberts [13]. Estos modelos están basados en la ecuación logística, la cual es comúnmente utilizada para describir el crecimiento de las BAL y tienen como principales parámetros la tasa de crecimiento, el tiempo de la fase de latencia y la

[1] Tecnológico Nacional de México / IT Durango. Maestría en Ingeniería. e-mail: 10040780@itdurango.edu.mx.
[2] Tecnológico Nacional de México / IT Durango. Maestría en Ingeniería. e-mail: ysalazar@itdurango.edu.mx.
[3] Tecnológico Nacional de México / IT Tijuana. Posgrado en Ciencias de la Ingeniería, grupo de Investigación BioMath. e-mail: paul.valle@tectijuana.edu.mx.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

biomasa máxima. Sin embargo, estos modelos sólo describen la cantidad de biomasa en función del tiempo como modelos primarios y no representan de forma cualitativa o cuantitativa la dinámica que tienen otras variables importantes que intervienen en el proceso de fermentación. A diferencia de los modelos citados anteriormente, Vázquez & Murado [14] propusieron un modelo, basado en la ecuación logística reparametrizada, que describe la cinética de crecimiento y expresa la producción de ácido láctico por *Lactococcus lactis* y *Pediococcus acidilactici* en una fermentación por lotes.

Hoy en día, los alimentos funcionales con bacterias acidolácticas presentan un mayor consumo y por lo tanto se ha incrementado la comercialización de estos productos. En leches fermentadas se evalúa la cantidad de biomasa bacteriana, la acidez titulable (representada por el ácido láctico) y el pH como parámetros para determinar la calidad de la fermentación [15]. Por este motivo se decide formular un modelo matemático de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden que describa la dinámica de dichas variables, así como la interacción que hay entre ellas.

## II. Datos experimentales

Los datos experimentales (Tabla 1) se obtuvieron de un proceso de fermentación por lotes para producir leche fermentada tipo jocoque. Como medio de cultivo se utilizó leche en polvo reconstituida al 10% y se incubó una cepa de BAL durante 48 horas a una temperatura de 37°C. La cantidad de biomasa se midió mediante el conteo en placa y se expresó en UFC/ml en escala logarítmica, la lectura del pH se realizó con un medidor de pH marca Mettler y el ácido láctico con el método de acidez titulable con una solución de NaOH al 0.1N. Las variables para la cepa se midieron por triplicado cada 6 horas.

Tabla 1. Datos experimentales

| Tiempo (horas) | Biomasa (UFC/ml) | Potencial Hidrógeno (pH) | Ácido láctico (g/ml) |
|---|---|---|---|
| 0 | 7.5797 | 6.44 | 1.9 |
| 6 | 7.6532 | 6.21 | 2.2 |
| 12 | 7.6334 | 5.69 | 3.4 |
| 18 | 7.8921 | 5.46 | 4.8 |
| 24 | 8.6532 | 4.97 | 6.5 |
| 30 | 8.8864 | 5.00 | 6.6 |
| 36 | 9.5051 | 4.92 | 6.6 |
| 42 | 9.6627 | 4.74 | 7.4 |
| 48 | 8.6532 | 4.62 | 8.2 |

## III. Modelizado Matemático

Se implementó la herramienta Eureqa [16] que es un software de inteligencia artificial basado en algoritmos genéticos para desarrollar el modelo de EDOs. Primero, se realizaron regresiones de las variables estudiadas para describir, en función del tiempo, los datos que no pudieron ser medidos durante el proceso de fermentación. El sistema (1) – (3) muestra las funciones obtenidas para la biomasa, el pH y el ácido láctico respectivamente:

$$x(t) = 7.57 + 8.19x10^{-5}t^3 - 3.13x10^{-8}t^5, \quad (1)$$

$$y(t) = 6.44 - 0.0647t + 0.00056t^2, \quad (2)$$

$$z(t) = 1.89 + 0.179t - 0.00106t^2, \quad (3)$$

donde $x(t)$ representa la concentración de biomasa (UFC/ml); $y(t)$, el potencial de hidrógeno (pH); y $z(t)$, la concentración de acidez (g/ml).

Posteriormente, con las funciones (1) – (3), y con base en la teoría de positividad de sistemas dinámicos, se formuló un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describe la dinámica entre las variables y la interacción que tienen entre ellas durante el proceso de fermentación. Este sistema está descrito por las ecuaciones (4) – (6):

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 - \gamma xy^2 - \tau xz^2, \quad (4)$$

$$\dot{y} = \delta y - \vartheta y^2 - \rho yz, \quad (5)$$

$$\dot{z} = \sigma z - \varphi z^2 - \omega xz. \quad (6)$$

En la Tabla 2 se muestran los valores correspondientes a los parámetros de las ecuaciones (4) – (6).

Tabla 2. Parámetros del sistema (4)-(6).

| Parámetro | Valor |
|---|---|
| $\alpha$ | $8.96 \times 10^{-2}$ |
| $\beta$ | $3.12704 \times 10^{-4}$ |
| $\gamma$ | $2.1899 \times 10^{-3}$ |
| $\tau$ | $6.49 \times 10^{-4}$ |
| $\delta$ | $1.76 \times 10^{-2}$ |
| $\vartheta$ | $4.4 \times 10^{-3}$ |
| $\rho$ | $2.47 \times 10^{-4}$ |
| $\sigma$ | $6.7 \times 10^{-2}$ |
| $\varphi$ | $6.55 \times 10^{-3}$ |
| $\omega$ | $1.5 \times 10^{-4}$ |

## IV. Positividad del sistema

De acuerdo con Leenheer y Aeyels [17], el siguiente enunciado proporciona una condición suficiente y necesaria para establecer la positividad de un sistema dinámico no lineal e invariante en el tiempo de la forma $\dot{x} = f(x)$:

$$P \; \forall \, x \in \partial R^n_{+,0} \mid x = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Con base en esto, se evaluó el sistema (4) – (6), respectivamente, en $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Los resultados se muestran a continuación:

$$\dot{x}|_{x=0} = \alpha(0) - \beta(0)^2 - \gamma(0)y^2 - \tau(0)z^2 = 0,$$

$$\dot{y}|_{y=0} = \delta(0) - \vartheta(0)^2 - \rho(0)z = 0,$$

$$\dot{z}|_{z=0} = \sigma z(0) - \varphi(0)^2 - \omega x(0) = 0.$$

Por lo tanto, se establece que la dinámica del sistema, para condiciones iniciales no negativas, se localiza acotada en el octante positivo

$$R^3_{+,0} = \{x(t), y(t), z(t) \geq 0\},$$

es decir, cualquier semitrayectoria del sistema (4) – (6) será positivamente invariante en $R^3_{+,0}$ para toda de $t \in [0, \infty)$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## V. Dominio de localización

Se aplicó el método de Localización de Conjuntos Compactos Invariantes (LCCI) [18], [19],[20] para analizar la dinámica global del sistema y calcular los límites de un dominio acotado, para este caso en $R^3_{+,0}$.

Primero, se propone la función localizadora

$$h_1(x) = x,$$

al calcular su derivada de Lie se obtiene

$$L_f h_1 = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x y^2 - \tau x z^2,$$

a partir de la cual se define el conjunto

$$S(h_1) = \{L_f h_1 = 0\},$$

y se puede escribir de la siguiente forma

$$S(h_1) = \left\{x = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} y^2 - \frac{\tau}{\beta} z^2\right\} \cup \{x = 0\},$$

por lo que, los límites de $x(t)$ se definen en el siguiente conjunto

$$K(h_1) = \left\{0 \leq x(t) \leq x_{sup} = \frac{\alpha}{\beta}\right\}.$$

La segunda función localizadora está dada por

$$h_2(y) = y,$$

entonces, su derivada de Lie se presenta a continuación

$$L_f h_2 = \delta y - \vartheta y^2 - \rho y z,$$

y se define el conjunto

$$S(h_2) = \{L_f h_2 = 0\},$$

el cual se escribe como

$$S(h_2) = \left\{y = \frac{\delta}{\vartheta} - \frac{\rho}{\vartheta} z\right\} \cup \{y = 0\},$$

por lo tanto, los límites de $y(t)$ se definen en el siguiente conjunto

$$K(h_2) = \left\{0 \leq y(t) \leq y_{sup} = \frac{\delta}{\vartheta}\right\}.$$

La tercera función localizadora está dada por

$$h_3(z) = z,$$

la cual, al calcular su derivada de Lie se obtiene

$$L_f h_3 = \sigma z - \varphi z^2 - \omega x z,$$

con base en lo anterior se define el conjunto

$$S(h_3) = \{L_f h_3 = 0\},$$

y se obtiene lo siguiente

$$S(h_3) = \left\{z = \frac{\sigma}{\varphi} - \frac{\omega}{\varphi} x\right\} \cup \{z = 0\},$$

los límites de $z(t)$ se definen en el conjunto

$$K(h_3) = \left\{0 \leq z(t) \leq z_{sup} = \frac{\sigma}{\varphi}\right\}.$$

Entonces, con base en los resultados de esta sección se establece lo siguiente:

**Resultado. Dominio de localización.** *Todos los conjuntos compactos invariantes del sistema (4) – (6) se encuentran ubicados en el dominio de localización definido a continuación:*

$$K_{xyz} = K(h_1) \cap K(h_2) \cap K(h_3).$$

## VI. Simulaciones numéricas

Se realizaron simulaciones numéricas para ilustrar las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de las funciones (1) – (3), de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (4) – (6) y de los datos experimentales.

En la Fig. 1 se ilustran las soluciones de las funciones (1) – (3) y los datos experimentales en el intervalo de tiempo $t \in [0,48]$. Se puede apreciar que la función $x(t)$ describe todas las fases de crecimiento de las BAL, como se indica en la literatura. La fase de latencia duró aproximadamente 18 horas y después de este tiempo se presentó el crecimiento exponencial. La fase estacionaria fue muy corta para esta cepa, se encontró en el intervalo de las 36 a las 42 horas y posteriormente entró a la fase de muerte. Durante el crecimiento de las BAL se produjo el ácido láctico, descrito por la función $z(t)$, el cual provocó la disminución de pH del medio, descrito por la función $y(t)$. Cuando el pH alcanzó un valor de 5.5, comenzó el crecimiento de biomasa y éste cesó cuando el pH llegó a 4.5.

Debido a que el sistema (4) – (6) es no lineal, no tiene una solución analítica, por lo que se utilizó el método de Euler para generar una solución numérica. Para realizar las simulaciones, se establecieron las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = 7.5797,$$

$$y(0) = 6.44,$$

$$z(0) = 1.9,$$

valores que representan las condiciones iniciales del experimento. La Fig. 2 muestra, respectivamente, las soluciones en el tiempo obtenidas de las ecuaciones (4) – (6). Las simulaciones se realizaron en el intervalo de tiempo definido por $t \in [0,200]$.

## VII. Análisis estadístico

Con el objetivo de validar el modelo propuesto, se hizo un análisis estadístico para determinar la exactitud de las funciones (1) – (3) y el sistema (4) – (6) con respecto a los datos experimentales. El estadístico utilizado fue el coeficiente de determinación o $R^2$, este coeficiente mide el grado de precisión con el que un modelo (el cual puede ser lineal o no lineal) se ajusta a los datos observados. Su resultado oscila entre 0 y 1, cuanto más se acerca este resultado a 1, mayor es la capacidad explicativa del modelo. Su cálculo se hace con base en las diferencias que hay entre los datos experimentales y las predicciones del modelo.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

A continuación, se presenta la fórmula utilizada para calcular la $R^2$, vea [21] en la sección 10-8.1.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}},$$

donde $SS_{res}$ representa la varianza residual y $SS_{tot}$, la varianza total.

La varianza residual se calcula de la siguiente manera

$$SS_{res} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x_k - x_k(t))^2}{n},$$

mientras que la varianza total está dada por

$$SS_{tot} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n},$$

donde $n$ es el número de muestras observadas durante el experimento, $x_k$ es el $k$-ésimo dato experimental, $x_k(t)$ es la predicción del modelo correspondiente a $x_k$ y $\bar{x}$ es el promedio de los datos experimentales.

Las Tablas 3 y 4 muestran, respectivamente, las predicciones de las funciones (1) – (3) y el sistema (4) – (6). Las predicciones se hicieron para las primeras 48 horas en intervalos de 6 horas, para que coincidieran con las lecturas de los datos experimentales y de esta forma calcular la $R^2$ para cada variable.

TABLA 3. PREDICCIONES DE LAS FUNCIONES (1) - (3).

| $n$ | $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $z(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 7.5700 | 6.4400 | 1.9000 |
| 2 | 6 | 7.5875 | 6.0714 | 2.7122 |
| 3 | 12 | 7.7038 | 5.7432 | 3.6527 |
| 4 | 18 | 7.9887 | 5.4554 | 4.6554 |
| 5 | 24 | 8.4533 | 5.2079 | 5.6542 |
| 6 | 30 | 9.0211 | 5.0008 | 6.5830 |
| 7 | 36 | 9.4985 | 4.8341 | 7.3757 |
| 8 | 42 | 9.5459 | 4.7077 | 7.9663 |
| 9 | 48 | 8.6481 | 4.6217 | 8.2886 |

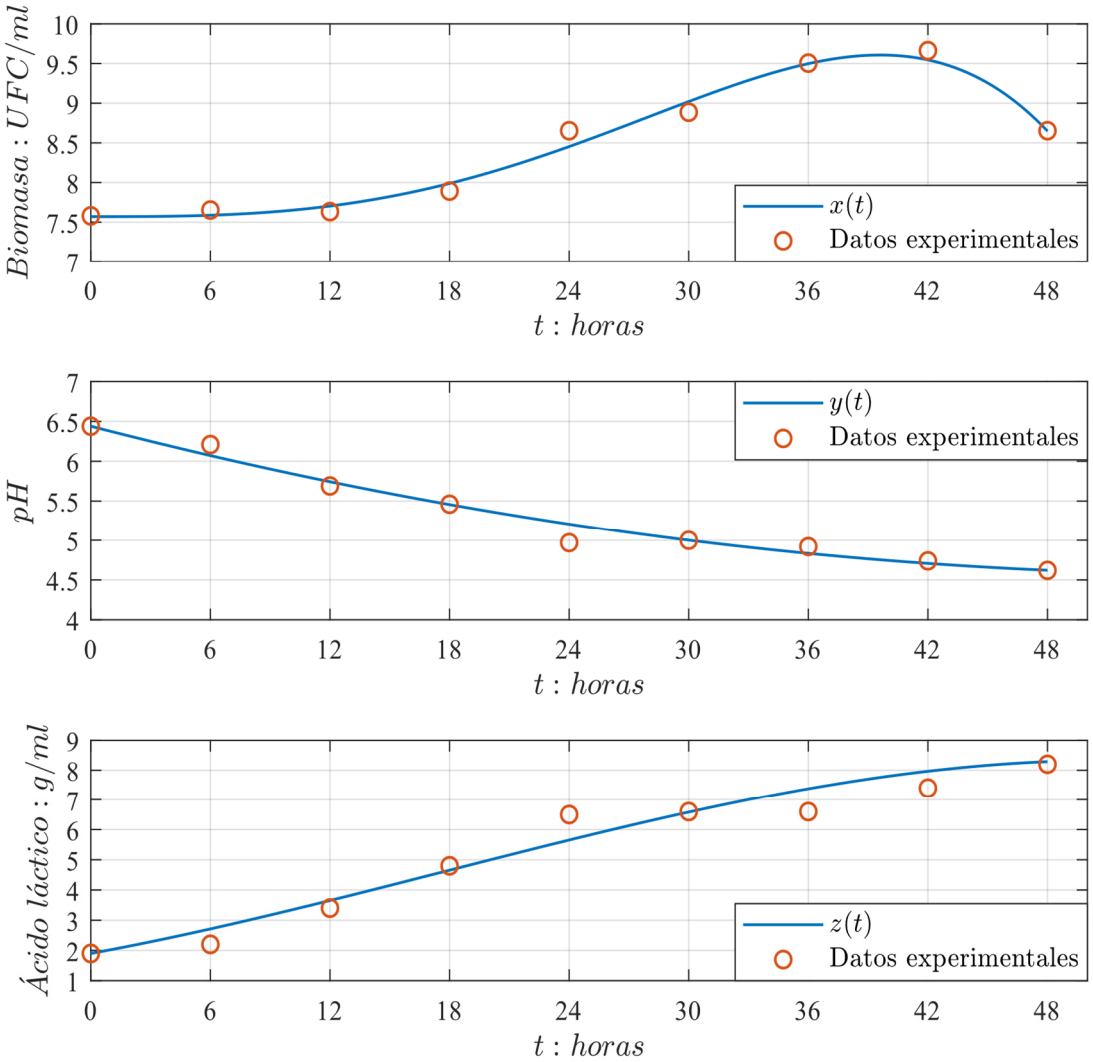



**Figura 1. Funciones (1)-(3) y su comparación con los datos experimentales de la Biomasa [$x(t)$], el pH [$y(t)$] y el Ácido láctico [$z(t)$].**

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

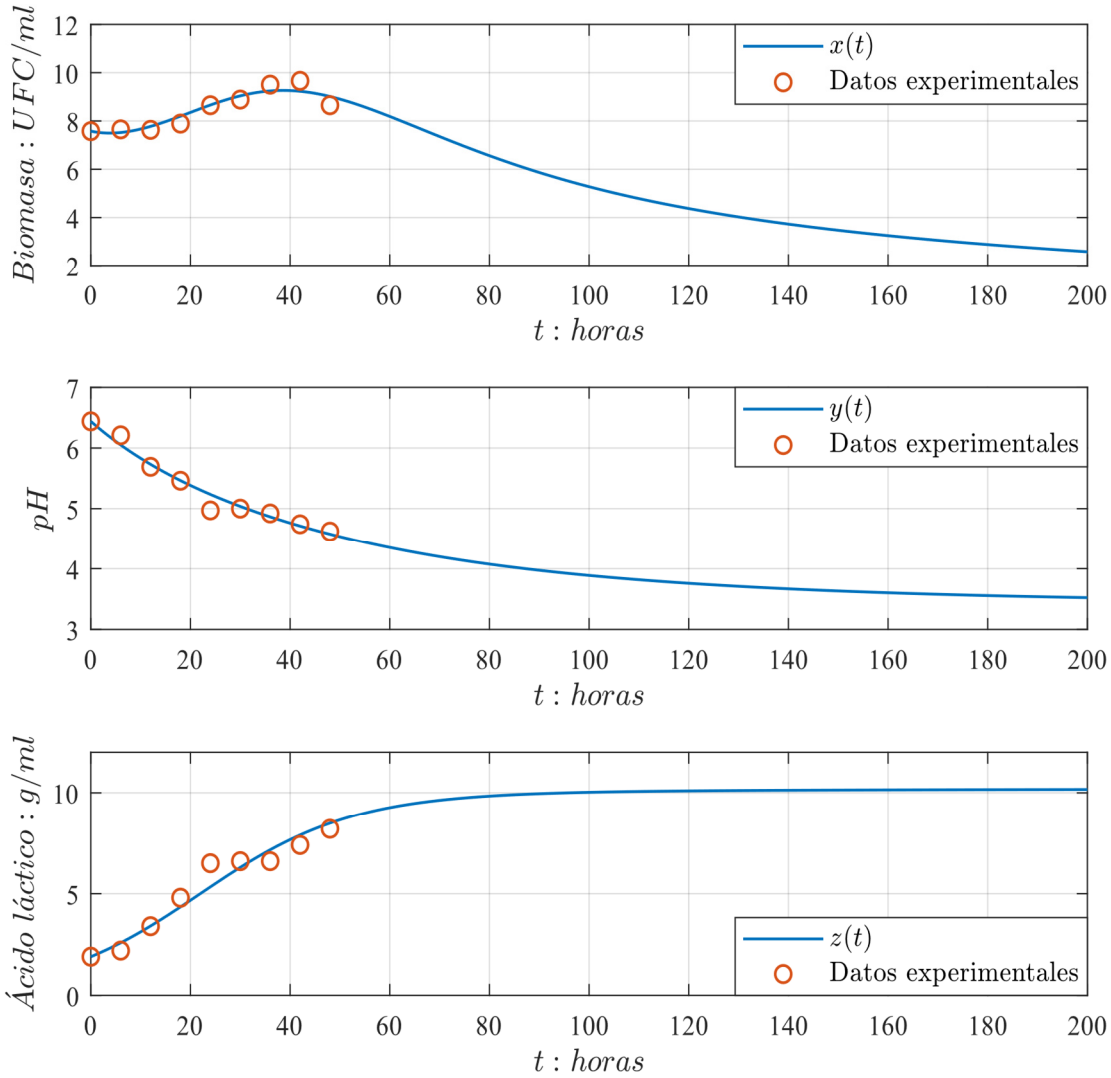



**Figura 2. Soluciones del sistema (4)-(6) y su comparación con los datos experimentales de la Biomasa [$x(t)$], el pH [$y(t)$] y el Ácido láctico [$z(t)$].**

TABLA 4. PREDICCIONES DEL SISTEMA (4) - (6).

| $n$ | $T$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $z(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 7.5797 | 6.4400 | 1.9000 |
| 2 | 6 | 7.5231 | 6.0504 | 2.5843 |
| 3 | 12 | 7.7763 | 5.7312 | 3.4117 |
| 4 | 18 | 8.1987 | 5.4636 | 4.3484 |
| 5 | 24 | 8.6611 | 5.2351 | 5.3335 |
| 6 | 30 | 9.0407 | 5.0371 | 6.2926 |
| 7 | 36 | 9.2439 | 4.8637 | 7.1593 |
| 8 | 42 | 9.2302 | 4.7110 | 7.8920 |
| 9 | 48 | 9.0144 | 4.5758 | 8.4780 |

Con las predicciones de las Tablas 3 y 4, se calcularon los coeficientes de determinación para las funciones (1) – (3) y el sistema (4) – (6). Los resultados se muestran, respectivamente, en las Tablas 5 y 6, se observa que la $R^2$ fue superior a 0.90 para cada variable, lo cual indica un buen ajuste del modelo propuesto con respecto de los datos experimentales.

TABLA 5. COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN PARA EL SISTEMA DE FUNCIONES (1) – (3).

| Solución | $R^2$ |
|---|---|
| $x(t)$ | 0.98 |
| $y(t)$ | 0.97 |
| $z(t)$ | 0.95 |

TABLA 6. COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN PARA EL SISTEMA DE ECUACIONES (4) – (6)

| Solución | $R^2$ |
|---|---|
| $x(t)$ | 0.90 |
| $y(t)$ | 0.97 |
| $z(t)$ | 0.94 |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## VIII. Conclusiones y discusiones

El sistema de funciones presenta un coeficiente de determinación mayor a 95%, lo que representa un ajuste de la función a los datos experimentales. A partir de estas funciones se generó un modelo matemático de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describe los datos experimentales con coeficientes de determinación superiores al 90%. El ajuste de la ecuación (5) que representa la interacción entre el pH y la concentración de ácido láctico, presenta el mayor $R^2$, 97%.

Además, la estructura y la dinámica de las soluciones de las ecuaciones (4) – (6) es consistente con la literatura, en cuanto a su comportamiento debido a que la fase exponencial de crecimiento de biomasa (24 horas) coincide con la disminución del pH por debajo de 5.5. Adicionalmente, la fase de muerte con la estabilización del pH y la concentración de ácido láctico [3].

En las simulaciones numéricas se logra ilustrar la positividad del sistema debido que las soluciones cumplen con $x(t), y(t), z(t) \geq 0$ para $t \in [0, \infty)$. Adicionalmente, mediante el método de LCCI se lograron definir los límites ínfimos y supremos de un dominio de localización, dentro del cual se ubican todos los conjuntos compactos invariantes que pueda presentar el sistema, además de que permite establecer límites superiores para las soluciones no divergentes del de las ecuaciones (4) – (6).

La finalidad del modelo es brindar a la industria de alimentos una herramienta que ayude a predecir la concentración de biomasa, la variación del pH y la producción de acidez siempre que se produzca una fermentación de leche bajo ciertas condiciones específicas. Además, se espera que el modelo matemático permita determinar a priori cuáles serán los resultados del producto obtenido si alguna de las variables que intervienen en el modelo se modifican. Esta situación ayuda a mejorar los procesos de elaboración de productos alimenticios donde se utilicen bacterias acidolácticas.

Como trabajo futuro, se pretenden explorar distintas estrategias de control que permitan mantener las variables de interés en los valores deseados y tener una estandarización del producto que cumpla con las normas de calidad de fermentación. Sin olvidar, que los modelos matemáticos simplifican el sistema biológico lo que representa un compromiso en la utilización de estos.

## Agradecimientos

El primer autor agradece a CONACyT por la beca otorgada para la realización de su tesis de maestría. Los autores agradecen la colaboración de la M.C. Blanca García Caballero por proporcionar los datos experimentales para llevar a cabo este proyecto. Este trabajo fue apoyado por el Proyecto TecNM 8063.20-P 'Desarrollo de protocolos de administración de tratamientos contra el cáncer con base en el análisis de modelos matemáticos de EDOs'.

## Referencias

[1] A. Sheeladevi and N. Ramanathan, "Lactic Acid Production Using Lactic Acid Bacteria under Optimized Conditions," Int. J. Pharm. Biol. Arch., vol. 2, no. 6, pp. 1681–1691, 2012.

[2] L. Axelsson and S. AHRNE, "Food and medicine," Appl. Microb. Syst., vol. 81, no. 5, pp. 367–368, 2000.

[3] R. Parra Huertas, "Review. bacterias acido lacticas: papel funcional en los alimentos," Biotecnol. en el Sect. Agropecu. y Agroindustrial BSAA, vol. 8, no. 1, pp. 93–105, 2010.

[4] J. Ramirez, P. Rosas, M. Velázquez, J. Ulloa, and F. Arce, "Bacterias Lácticas: Importancia en alimentos y sus efectos en la salud," Fuente Año 2, vol. 7, no. 9, pp. 1–16, 2011.

[5] M. Mandigan, J. Martinko, K. Bender, D. Buckley, and D. Stahl, Brock. Biología de los microorganismos, 14th ed. Madrid, 2015.

[6] E. Valbuena, J. Barreiro, E. Sánchez, G. Castro, W. Bríñez, and A. Tovar, "Modelos cinéticos aplicados al crecimiento de Lactococcus lactis subsp. lactis en leche," Rev. Cient. la Fac. Ciencias Vet. la Univ. del Zulia, vol. XV, 2005.

[7] A. Garre Pérez, J. A. Egea Larrosa, and P. S. Fernández Escámez, "Modelos matemáticos para la descripción del crecimiento de microorganismos patógenos en alimentos," Anuario de Jóvenes Investigadores, vol. 9, pp. 160–163, 2016.

[8] M. Almudena, "Desarrollo de Modelos Cinéticos para Bioprocesos : Aplicación a la Producción de Xantano," Madrid, 1999.

[9] B. Gompertz, "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies," Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences, vol. 115, no. 1666. pp. 513–583, 1825.

[10] F. J. Richards, "A Flexible Growth Function for Empirical Use," J. Exp. Bot., vol. 10, no. 2, pp. 290–301, Jun. 1959.

[11] C. J. Stannard, A. P. Williams, and P. A. Gibbs, "Temperature/growth relationships for psychrotrophic food-spoilage bacteria," Food Microbiol., vol. 2, no. 2, pp. 115–122, 1985.

[12] J. Schenute, "A versatile growth model with statistically stable parameters," Can. J. Fish. Aquat. Sci., vol. 38, no. 9, pp. 1128–1140, 1981.

[13] J. Baranyi, T. A. Roberts, and P. McClure, "A non-autonomous differential equation to model bacterial growth," Food Microbiol., vol. 10, no. 1, pp. 43–59, 1993.

[14] J. Vázquez and M. Murado, "Unstructured mathematical model for biomass, lactic acid and bacteriocin production by lactic acid in batch fermentation," J. Chem. Technol. Biotechnol., vol. 96, no. June 2007, pp. 91–96, 2008.

[15] "NORMA Oficial Mexicana NOM-243-SSA1-2010, Productos y servicios." [Online]. Available: http://dof.gob.mx/normasOficiales/4156/salud2a/salud2a.htm. [Accessed: 10-Jul-2020].

[16] Eureqa, Nutonian Inc. [Online] Available: http://52.45.171.32/products/eureqa/trial-onprem/

[17] De Leenheer, P. and Aeyels, D., Stability properties of equilibria of classes of cooperative systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, No. 12, pp. 1996-2001, 2001, doi: https://doi.org/10.1109/9.975508.

[18] Krishchenko, A. P. (2005). Localization of invariant compact sets of dynamical systems. Differential Equations, 41(12), 1669-1676.

[19] Krishchenko, A. P., & Starkov, K. E. (2006). Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. Physics Letters A, 353(5), 383-388.

[20] Valle Paul, Coria Luis N., Yolocuauhtli Salazar. Tumor clearance analysis on a cancer chemo-immunotherapy mathematical model. Bulletin of Mathematical Biology 81.10 (2019): 4144-4173. doi: 10.1007/s11538-019-00636-7

[21] D. Montgomery y G. Runger, Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería, Cd. México: Limusa Wiley, 2003.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Type-1 diabetes mathematical analysis based on Free Fatty Acids in the presence of insuline

Ana P. Sotelo[1], Paul J. Campos[1], Paul A. Valle[1] and Diana Gamboa[1].

***Abstract*— This work is devoted to investigate a six-dimensional mathematical model of first-order ordinary differential equations with the presence of growth hormone. The analysis of the time-behavior dynamics of all state variables is discussed by applying the localization of compact invariant sets method; considering a treatment based on both growth hormone and insulin effects. To the best of our knowledge, this method has not been applied to explore the global dynamic of this phenomenon, and only local asymptotic stability for this particular model has been reported. The mathematical process enhances a reliable strategy to a leading path for preliminary analysis related to other types of *in-silico* test considerations. Moreover, a closed-loop asymptotic stability analysis by Lyapunov theory is achieved by considering two possible control inputs that could modify the concentration level of insulin and growth hormone. Finally, a discussion about biological implications and numerical simulations are presented.**

## I. INTRODUCTION

Recent reports indicate that global diabetes prevalence in 2019 was estimated to be 9.3%, which is about 463 million people, and increasing to 10.2%, which is about 578 million by 2030 and 10.9%, 700 million, by 2045 [1]. On the other hand, the causes of diabetes are unknown [2]; some experts believe that diabetes is an inherited disease; however, the genetics are not clearly understood [3]. Diabetes does not always run in families, and in some cases, it develops unknown pathologies. In a biological scheme, the body tags cells that produce insulin as foreign cells, and tries to destroy them; this process is known as auto-immune response [4]. Mathematical models that describe glucose homeostasis, different aspects of diabetes, and its consequences are overgrowing, providing new insights about the biological mechanism behavior, helping in the management of diabetes [5]. These models have the goal of contribute in developing an effective treatment based on a mathematical analysis [6]. Some different models of diabetes mellitus have been studied by the Localization of Compact Invariant Set method [7], [8], concluding that $\beta$-cells are a variable key for a possible behavior prediction of insulin concentration levels and glucose. Furthermore, mathematical models with $\beta$-cells are studied in a closed-loop scenario based on nonlinear control theory, giving bases for possible control inputs, and complementing the models with a potential treatment. In addition, this work investigates a nonlinear model of diabetes mellitus based on first-order Ordinary Differential Equations (ODEs) that links the interaction of $\beta$-cell mass, insulin, glucose, receptors dynamics, free fatty acids and growth hormone [9], [10], [11], [12]. This analysis is focus on the growth hormone under the hypothesis that it has a direct impact on a leading treatment, and may contribute to a deeper understanding of the biological interactions between $\beta$-cells and insulin in the presence of glucose. Likewise, a closed-loop analysis is achieved by adding two control inputs at the base model; these entries are placed under some biological considerations. For instance, insulin and growth hormone levels can be modified by external treatment.

This paper is organized as follows: Section II presents the mathematical model. On section III, the mathematical background necessary to solve the problem of the Localization of Compact Invariant Sets. Further, this section presents the analysis of necessary conditions for asymptotic stability based on considering two possible control inputs in closed-loop scheme. Finally, on section IV, conclusions of this work are presented.

## II. TYPE-1 DIABETES MELLITUS MATHEMATICAL MODEL

The mathematical model that describes the dynamical behavior between $\beta$-cell mass ($x_1$), insulin ($x_2$), glucose ($x_3$), insulin receptors ($x_4$) and free fatty acids (FFA, $x_5$) is proposed by Boutayeb *et al.* in [13], and complemented by Alalil *et al.* in [14], introducing the existence of a growth hormone (GH, $x_6$) that interacts with glucose and FFA, resulting in a mathematical model of first-ODEs given as follows:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(-g + hx_3 - ix_3^2), \tag{1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_1x_3^2}{(1+x_4)(e+x_3^2)} - fx_2 - fx_2x_4, \tag{2}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a - (b + cx_2x_4)x_3 + m_1(x_5 - F_b) + cx_6, \tag{3}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = j(1 - x_4) - kx_2x_4 - lx_4, \tag{4}$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -m_2(x_5 - F_b) + m_3(x_3 - G_b) + y(x_6 - GH_b), \tag{5}$$

$$\frac{dx_6}{dt} = p - wx_6 - s(x_5 - F_b) - zx_4. \tag{6}$$

Furthermore, in this scenario we assume that $x_3$ is the concentration of glucose that increases by a rate $a$ which

[1]Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana.
paola.sotelo@tectijuana.edu.mx
paul.campos@tectijuana.edu.mx
paul.valle@tectijuana.edu.mx
diana.gamboa@tectijuana.edu.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

implies glucose production by the liver and kidneys, and decreases by a rate $bx_3$; where $b$ is independent of insulin; while $cx_2x_3x_4$ represents the glucose uptake due to insulin sensitivity $c$. Additionally, the concentration of glucose increases by a rate $m_1(x_5 - F_b)$; where $m_1$ is the effect of FFA on glucose uptake. The Insulin dynamics is governed by $x_2$ and the insulin receptors dynamics are expressed by $x_4$, and they have the same mathematical expression used by Hernandez *et al.* [12]; while the dynamics of $\beta$-cell mass has a similar mathematical expression as presented on Topp *et al.* [11]. Parameters $h$ and $i$ are associated with the glucose level dependency in which $\beta$-cells are struggling to hold on mass insulin population concentration and insulin proliferation rate to overcome the presence of glucose, see [15], [16]. The concentration of FFA increases by a rate $m_3(x_3 - G_b)$ which represents the excessive glucose used in lipogenesis, and decreases by $m_2(x_5 - F_b)$; while the variable $x_6$ which represents GH. In [17], authors discuss the effects of growth hormone on glucose metabolism and insulin resistance in humans; while in [18] is discussed that adults with untreated GH deficiency can develop reduced insulin sensitivity as a result of an increase in abdominal fat; however, GH treatment may also increases the risk of developing diabetes and causes insulin resistance [19]. Therefore, the GH has a promising path to a forward potential treatment [20]. The description, value, and units of each parameter associated with this model are summarized in Table I.

## III. Mathematical Analysis

*1) Mathematical Preliminaries:* The method of Localization of compact Invariant Set (LCIS) is used to define a domain where all compact invariant sets of differential equations system are located. This method is useful in cases that are necessary to understand the long-time behavior of the dynamical system. Furthermore, considered a nonlinear system represented as follows:

$$\dot{x} = f(x), \tag{7}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$ is a differentiable vector field. Let $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ be a function such that $h$ is not the first integral of the system (7). The function $h$ is exploited in the solution of the localization problem of compact invariant sets and it is called a localizing function. By $h|_U$ is denotes the restriction of $h$ on a set $U \subset \mathbb{R}^n$. $S(h)$ denotes the set $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_f h(x) = 0\}$, where $L_f h(x)$ is the Lie derivative in the vector field of $f(x)$. In order to determine the localizing set, it is necessary to define $h_{\inf}(U) := \inf\{h(x) \mid x \in U \cap S(h)\}$ and $h_{\sup}(U) := \sup\{h(x) \mid x \in U \cap S(h)\}$. Therefore, for any $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ all compact invariant sets of the system (7) located in $U$ are contained in the set $K(U; h)$ defined as $\{x \in U \mid h_{\inf}(U) \leq h(x) \leq h_{\sup}(U)\}$, as well as if $U \cap S(h) = \emptyset$ then, there are no compact invariant sets located in $U$ [21], [22].

*2) Mathematical Development:* In this section is computed the domain of attraction that contains all compact invariant sets of system $(1) - (6)$, allowing to determine the minimum and maximum concentration of the system variables. Each bound is defined by inequalities depending on the system's parameters, giving a global understanding about the ultimate densities of cells population in long time intervals. Additionally, a Bounded Positive Invariant Domain (BPID) can be achieved for the system $(1) - (6)$, when all upper bounds are crossing each other, as a result of applying the LCIS method.

Thus, the maximum concentration of insulin receptors can be obtained by the following localizing function:

$$h_1 = x_4, \tag{8}$$

then $S(h_1) = \{L_f h_1 = 0\} = \{(j + l)x_4 = j - kx_2x_4\}$, defining the maximum concentration of insulin receptors by:

$$K_1(h_1) = \left\{ x_4 \leq x_{4\max} := \frac{j}{j + l} \right\}. \tag{9}$$

The carrying capacity of the GH, see [23], that increases due to somatotropic cells ($p$) can be defined by the following localizing function:

$$h_2 = x_6, \tag{10}$$

defining the set $S(h_2) = \{L_f h_2 = 0\} = \{wx_6 = p - sx_5 + sF_b - zx_4\}$; which implies the maximum population of the GH by:

$$K_2(h_2) = \left\{ x_6 \leq \frac{p + sF_b}{w} \right\}. \tag{11}$$

The localization function for $\beta$-cell mass and FFA implies a free positive parameter $q$, defining the localizing function as:

$$h_3 = x_3 + qx_5, \tag{12}$$

while its Lie Derivative is define by $L_f h_3 = \dot{x}_3 + q\dot{x}_5$, and after substituting the corresponding state variables and some algebraic manipulation gives the following set:

$$S(h_3) = \left\{ \begin{array}{c} x_3 = \frac{1}{b - qm_3}(a - cx_2x_3x_4 + \\ (m_1 - qm_2)x_5 + A_1 + (c + qy)x_6) \end{array} \right\},$$

with $A_1 = -m_1F_b + qm_2F_b - qm_3G_b - qyGH_b$. This implies that:

$$h_3 \quad | \quad {}_{S(h_3)} = \frac{1}{b - qm_3}(a - cx_2x_3x_4 + (m_1 - qm_2)x_5 + A_1 + (c + qy)x_6) + qx_5,$$

under the condition that:

$$q < \frac{b}{m_3},$$

obtaining the formula:

$$h_3 \,|_{S(h_3)} \leq \left( \frac{m_1 - qm_2}{b - qm_3} + q \right) x_5 + A_2,$$

with $A_2 = \dfrac{a + qm_2F_b}{b - qm_3} + \dfrac{(c + qy)x_6}{b - qm_3}$. Since the GH has a maximum known value, the parameter $A_2$ can be considered

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE I

PARAMETER DESCRIPTIONS, VALUES, AND UNITS.

| Parameter | Description | Value | Units |
|---|---|---|---|
| $a$ | glucose production rate by liver when G = 0 | 864 | $mg/dl\ days$ |
| $b$ | glucose clearance rate independent of insulin | 1.44 | $days^{-1}$ |
| $c$ | insulin induced glucose uptake rate | 0.85 | $ml/\mu U\ days$ |
| $d$ | $\beta$-cell maximum insulin secretory rate | 43.2 | $\mu u/ml\ days\ mg$ |
| $e$ | gives inflection point of sigmoidal function | 20000 | $mg^2/dl^2$ |
| $f$ | whole body insulin clearance rate | 216 | $days^{-1}$ |
| $j$ | insulin receptor recycling rate | 2.64 | $days^{-1}$ |
| $k$ | insulin dependent receptor endocytosis rate | 0.02 | $ml/\mu U\ days$ |
| $l$ | insulin independent receptor endocytosis rate | 0.24 | $days^{-1}$ |
| $g$ | $\beta$-cell natural death rate | 0.06 | $days^{-1}$ |
| $h$ | determines $\beta$-cell glucose tolerance range in high level glucose basal | $0.572e-3$ | $ml/m\ g\ days$ |
| $i$ | determines $\beta$-cell glucose tolerance range in low level glucose basal | $0.252e-5$ | $dl^2/mg^2\ days$ |
| $m_1$ | constant rate associated to the effect of FFA on glucose uptake | 0.0864 | $1/days\ \mu\ mol$ |
| $m_2$ | constant rate for FFA production | 43.2 | $days^{-1}$ |
| $m_3$ | constant rate for Glucose production | 97.92 | $ml^{-1}$ |
| $F_b$ | basal value of Free Fatty Acids | 380 | $mg/dl$ |
| $G_b$ | basal value of glucose | 98 | $mg/dl$ |
| $p$ | GH production rate by somatotropic cells | 363 | $ml\mu g/min$ |
| $w$ | GH clearance rate by te liver | 136 | $ml/min$ |
| $s$ | of uptake of GH by Fat cells | 0.1 | $ngl/dml\mu mol$ |
| $z$ | rate of uptake of GH by receptor cells | 2 | $ngl/dml$ |
| $y$ | constant rate for GH production | 200 | $ml\mu mol/ldng$ |
| $GH_b$ | basal value of growth hormone | 5 | $ng/ml$ |

as a constant, if and only if, $x_6 = x_{6\,\max}$. This consideration gives the following formula:

$$h_3 \mid_{S(h_3)} \leq \left( \frac{-q^2 m_3 - (m_2 - b)q + m_1}{b - q m_3} \right) x_5 + A_2.$$

Now, considering the following condition:

$$q^2 m_3 + (m_2 - b)q - m_1 > 0,$$

and solving for $q$, a complementing condition for the free parameter $q$ can be defined by the next inequality:

$$q > \frac{b - m_2}{2m_3} + \frac{\sqrt{(m_2 - b)^2 + 4m_1 m_3}}{2m_3},$$

hence, $q$ is defined by

$$\frac{b - m_2}{2m_3} + \frac{\sqrt{(m_2 - b)^2 + 4m_1 m_3}}{2m_3} < q < \frac{b}{m_3}. \quad (13)$$

Therefore, the upper bound for the function $h_3$ defined by the set $K_3(h_3)$ under the restriction of $K_2(h_2)$, it is defined as:

$$K_3(h_3) = \left\{ h_3 \leq \frac{a + q m_2 F_b}{b - q m_3} + \frac{(c + qy) x_{6max}}{b - q m_3} \right\}. \quad (14)$$

Additionally, a fourth localizing function $h_4 = x_1 + x_4$ is proposed, $S(h_4) = \{\dot{x}_1 + \dot{x}_4 = 0\}$, giving the set:

$$S(h_4) = \{x_1(-g + h x_3 - i x_3^2) - (j + l)x_4 + j - k x_2 x_4 = 0\},$$

and solving for $x_1$, the set $S(h_4)$ gives the following formula:

$$h_4 \mid_{S(h_4)} = \frac{-(j + l)x_4 + j - k x_2 x_4}{g - h x_3 + i x_3^2} + x_4.$$

Due to the fact that, all the state variables posses nonlinear dynamics with biological implications, the mathematical analysis implies that all the dynamics of the system are in the positive orthant, see [24], and the minimum value for each state variable is zero or close to zero. Therefore, the maximum capacity of the insulin receptors, set $K_4(h_4)$, exist in the intersection of $x_{3\,\min} \cap K_1(h_1)$, and it is given by:

$$K_4(h_4) = \left\{ x_1 + x_4 \leq \frac{j}{g - h x_{3\,\min} + i x_{3\,\min}^2} + x_{4\,\max} \right\},$$

concluding to:

$$K_4(h_4) = \left\{ x_1 + x_4 \leq \frac{j}{g} + x_{4\,\max} \right\}. \quad (15)$$

Finally, the maximum concentration of insulin is defined by the localizing function $h_5 = x_2$, where the set $S(h_5)$ is as follows:

$$S(h_5) = \left\{ f x_2 = \frac{d x_1 x_3^2}{(1 + x_4)(e + x_3^2)} - f x_2 x_4 \right\},$$

whereas, the set $K_5(h_5)$ exist when $S(h_5) \cap K_4(h_4) \cap K_3(h_3) \cap x_{6max}$, leading to define the maximum concentration of insulin as follows:

$$K_5(h_5) = \left\{ x_2 \leq x_{2\,\max} := \frac{d x_{1\,\max} x_{3\,\max}^2}{f(1 + x_{4\,\min})(e + x_{3\,\min}^2)} \right\},$$

and under the biological implications, it can be simplified as

$$K_5(h_5) = \left\{ x_2 \leq x_{2\,\max} := \frac{d x_{1\,\max} x_{3\,\max}^2}{f e} \right\}. \quad (16)$$

Therefore, as a result of the proposed mathematical analysis, it can establish the following Theorem:

*Theorem 1:* The Localization of all compact invariant sets is achieved by applying localizing functions defined by the variables of the system (1)-(6), to closed a bounded domain with upper bounds. The domain of interest is obtained from

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

the set $K = x_{1\max} \cap x_{2\max} \cap x_{3\max} \cap x_{4\max} \cap x_{5\max} \cap x_{6\max}$, if and only if, the condition for $q$ , defined by (13), is satisfied under the restriction of $\mathbb{R}^6_{0,+}$.

The system satisfies the positiveness of the domain, only for parameters given in Table I. The system posses LCCI, but lacks a function that guarantees attractiveness to one equilibrium point. In a general scheme, the system has three equilibrium points, as reported in [14]; however, just two of them are asymptotically stable, see Table II.

TABLE II
SUMMARY ASYMPTOTIC STABILITY BY LYAPUNOV FOR THREE EQUILIBRIUM POINT WITH BIOLOGICAL IMPLICATIONS

| E.P | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Asym.Stable |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_0$ | 0 | 0 | 680 | 0.92 | 1681 | 1.7 | yes |
| $P_1$ | 855 | 12.67 | 82 | 0.84 | 333 | 2.7 | yes |
| $P_2$ | 211.6 | 6.14 | 145 | 0.8 | 475 | 2.6 | no |

In accordance with Table II, the equilibrium point $P_0$ has biological implications since the $\beta$-cell mass is zero implying a high value of glucose, about $\left(680\frac{mg}{dl}\right)$, indicating a dangerous hyperglycemia as happens to those people with Type-1 diabetes at a late diagnosis. This pathological point is also associated with a high level of FFA $\left(1681\frac{\mu mol}{l}\right)$ and a relatively low value of GH $\left(1.7\frac{ng}{ml}\right)$ which is in agreement with known biological statements since under physiological conditions, high levels of glucose and FFA inhibits secretion of growth hormone [25]. The equilibrium point $P_1$, shows that glucose, $\left(82\frac{mg}{dl}\right)$, is in the range of a non-diabetic person, whereas $\beta$-cells are functioning normally and consequently, insulin is also in the physiological range $\left(12.67\frac{\mu U}{ml}\right)$. Similarly, FFA and GH correspond to a normal physiological state. Insulin receptors, $x_4$, are considered as a constant rate associated with the insulin population with dimensional value. Also, considering the case where no diabetes is presented, *i.e.*, people with the following cell concentration levels: $x_1 = 850mg$,[26], [27]; $x_2 = 10\frac{\mu U}{ml}$,[28]; $x_3 = 100\frac{mg}{dl}$,[27];$x_5 = 380\frac{\mu mol}{ml}$ [29]; $x_6 < 5\frac{ng}{ml}$ for men and $x_6 < 10\frac{ng}{ml}$ for women [30]. Consequently, the third equilibrium point indicates low values of $\beta$-cell mass $(211mg)$, insulin $\left(6.14\frac{\mu U}{ml}\right)$, and consequently a value of glucose $\left(145\frac{mg}{dl}\right)$; exceeding the threshold needed for a non-diabetic individual. Also, the unstable point indicates the value of glucose higher than the value needed in a non-diabetic person. This intermediate equilibrium point refers to a prediabetic stage; mathematically, it indicates that the evolution of diabetes may be avoided or delayed, providing effective action on risk factors like obesity/overweight, unhealthy diet, physical inactivity, and smoking. The method of LCCI provides a closed approach in how GH impacts the dynamical behavior of $\beta$-cells, insulin, glucose, and consequently, in the evolution of Type-1 diabetes.

*3) Control inputs and closed-loop proposal:* Into this model, GH implies the feasibility of a promising path for a potential treatment altogether with Insulin [20], opening the possibility of two control inputs $u_1$, $u_2$, and apply control theory techniques, either open-loop or close-loop. In this particular case, closed-loop stability analysis by the Lyapunov criteria is analyzed. Then, the proposed system with two control inputs is as follows:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(-g + hx_3 - ix_3^2), \tag{17}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_1x_3^2}{(1+x_4)(e+x_3^2)} - fx_2 - fx_2x_4 + u_1, \tag{18}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a - (b + cx_2x_4)x_3 + m_1(x_5 - F_b) + cx_6, \tag{19}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = j(1 - x_4) - kx_2x_4 - lx_4, \tag{20}$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -m_2(x_5 - F_b) + m_3(x_3 - G_b) + y(x_6 - GH_b), \tag{21}$$

$$\frac{dx_6}{dt} = p - wx_6 - s(x_5 - F_b) - zx_4 + u_2. \tag{22}$$

Now, to determine conditions for each control entry, we consider the following candidate Lyapunov function:

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{q_1}{2}x_3^2 + \frac{q_2}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}x_5^2 + \frac{1}{2}x_6^2; \tag{23}$$

where $q_1$, $q_2$ are free positive parameters; while its derivative is $\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + q_1x_3\dot{x}_3 + q_2x_4\dot{x}_4 + x_5\dot{x}_5 + x_6\dot{x}_6$, and after substituting all the state variables, $\dot{V}$ is defined as:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -gx_1 + hx_1x_3 - ix_1x_3^2 + \frac{dx_1x_2x_3^2}{(1+x_4)(e+x_3^2)} \\ & -fx_2^2 - fx_2^2x_4 + u_1x_2 + q_1ax_3 - q_1bx_3^2 \\ & -q_1cx_2x_3^2x_4 + q_1m_1x_3x_5 - q_1m_1F_bx_3 \\ & +q_1cx_3x_6 + jx_4 - (j+l)x_4^2 - kx_2x_4^2 \\ & -q_2m_2x_5^2 + q_2m_2F_bx_5 + q_2m_3x_3x_5 \\ & -q_2m_3G_bx_5 + (p - sF_b)x_6 - wx_6^2 \\ & -sx_5x_6 - zx_4x_6 + u_2x_6,\end{aligned}$$

hence, the control entries are defined as:

$$u_1 = \frac{-dx_1x_3^2}{(1+x_4)(e+x_3^2)}, \tag{24}$$

$$u_2 = -q_1cx_3; \tag{25}$$

substituting (24) and (25) into $\dot{V}$, and after some algebraic manipulation, we have:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -gx_1^2 - x_1^2\left[i\left(x_3 - \frac{h}{2i}\right)^2 - \frac{h^2}{4i}\right] \\ & -(j+l)\left(x_4 - \frac{j}{2(j+l)}\right)^2 \\ & +\frac{j^2}{4(j+l)} - q_2m_2\left(x_5 - \frac{A}{2m_2}\right)^2 \\ & +\frac{q_2A^2}{4m_2} - q_1bx_3^2 + q_1\left(a - m_1F_b\right)x_3 \\ & -fx_2^2x_4 - q_1cx_2x_3^2x_4 - kx_2x_4^2 \\ & +(p - sF_b)x_6 - wx_6^2 - sx_5x_6 - zx_4x_6,\end{aligned}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

where $A = m_2F_b - m_3G_b + \left(m_3 + \frac{q_1m_1}{q_2}\right)x_3$ is proposed for a better writing; and also, under the following considerations:

$$\frac{q_1b}{q_2} > \frac{\left(m_3 + \frac{q_1m_1}{q_2}\right)^2}{4m_2}; \tag{26}$$

$$g > \frac{h^2}{4i}; \tag{27}$$

therefore, $\dot{V}$ is given by:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\left(g - \frac{h^2}{4i}\right)x_1^2 - i\left(x_3 - \frac{h}{2i}\right)^2 x_1^2 \\ &\quad -(j+l)\left(x_4 - \frac{j}{2(j+l)}\right)^2 + \frac{j^2}{4(j+l)} - fx_2^2 \\ &\quad -q_2m_2\left(x_5 - \frac{A}{2m_2}\right)^2 + \frac{q_2A^2}{4m_2} \\ &\quad -B\left(x_3 + \frac{C}{2B}\right)^2 + \frac{C^2}{4B} + \frac{q_2(m_2F_b - m_3G_b)^2}{4m_2} \\ &\quad -w\left(x_6 - \frac{(p - sF_b)}{2w}\right)^2 - D,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}B &= q_1b - \frac{q_2\left(m_3 + \frac{q_1m_1}{q_2}\right)^2}{4m_2}; \\ C &= q_2\frac{(m_2F_b - m_3G_b)\left(m_3 + \frac{q_1m_1}{q_2}\right)}{4m_2} + q_1\left(a - m_1F_b\right); \\ D &= fx_2^2x_4 + q_1cx_2x_3^2x_4 + sx_5x_6 + zx_4x_6; \\ E &= \frac{j^2}{4(j+l)} + \frac{q_2A^2}{4m_2} + \frac{C^2}{4B} + \frac{q_2(m_2F_b - m_3G_b)^2}{4m_2} \\ &\quad + \frac{(p - sF_b)^2}{4w};\end{aligned}$$

hence, Lyapunov asymptotic stability can be guarantee if the following inequality is also satisfied

$$\begin{aligned}&\left(g - \frac{h^2}{4i}\right)x_1^2 + +fx_2^2 + B\left(x_3 + \frac{C}{2B}\right)^2 \\ &+(j+l)\left(x_4 - \frac{j}{2(j+l)}\right)^2 + q_2m_2\left(x_5 - \frac{A}{2m_2}\right)^2 \\ &+w\left(x_6 - \frac{(p - sF_b)}{2w}\right)^2 < E.\end{aligned} \tag{28}$$

To demonstrate the results given throughout this analysis, in Figure 1 is presented the maximum level of insulin concentration with its optimal desired level, under the effects of the control entry (24); while in Figure 2 is presented the dynamical behavior of GH concentration with its optimal desired level, and its dynamical behavior under the effects of the control entry (25). Therefore, through the entries $u_1$ and $u_2$ may be possible to carry a person diagnosed as diabetic to the diagnosis of non-diabetic person; *i.e.*, a person with concentration levels as thus presented in $P_2$ to thus concentration levels of $P_0$; giving as a result the healthy state, even with a little positive variation within the vicinity of stable physiological state, as can be seen in Figure 2 for the GH level. Thus, the closed-loop analysis offers a broad preamble to develop a further mathematical analysis that may involve nonlinear control law design.

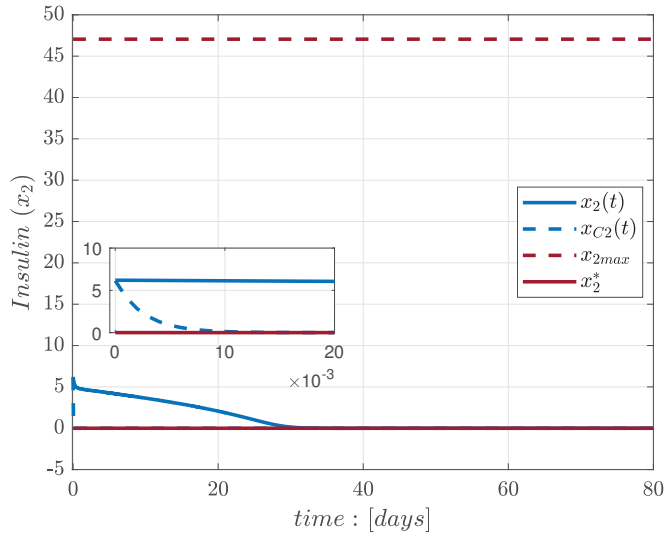



Fig. 1. Insulin time-behavior $(x_2)$ is given by the set $K_5(h_5)$ that contains $x_{2max}$, holding the equilibrium point $(x_2^*)$. Additionally, insulin behavior under the action of $u_1$, denoted as $(x_{C2})$, triggering the concentration level of insulin to its desired amount.

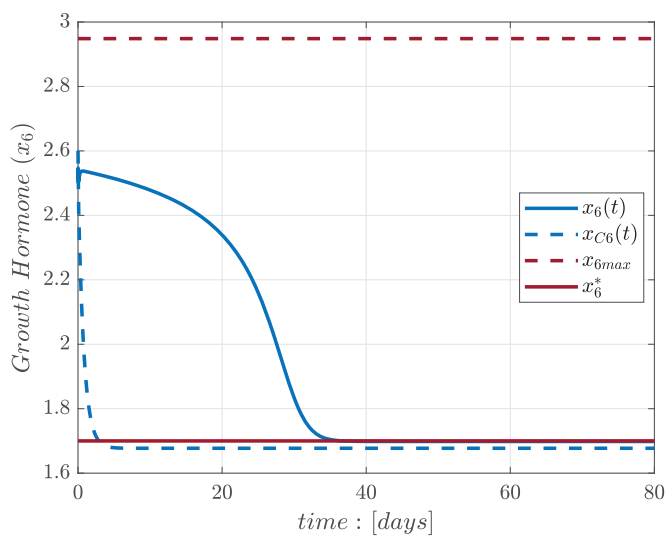



Fig. 2. Growth hormone time-behavior $(x_6)$ is given by the set $K_2(h_2)$ that contains $x_{6max}$, holding the equilibrium point$(x_6^*)$. Furthermore, growth hormone under the action of $u_2$, denoted as $x_{C6}$.

## IV. CONCLUSIONS

In this paper, we study the effect of obesity in people with a genetic predisposition to diabetes. Equilibrium analysis and stability analysis are summarized: a stable trivial pathological equilibrium point $P_0$, a stable physiological equilibrium point $P_1$, and a saddle point $P_2$. A simulation is carried out

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

to understand the model behavior under the BPID defined by the set $K$ which contains the upper bounds $x_{1\max} \cap x_{2\max} \cap x_{3\max} \cap x_{4\max} \cap x_{5\max} \cap x_{6\max}$, if and only if, the condition for $q$, as presented in (13), is satisfied under the restriction of $\mathbb{R}^6_{0,+}$. Furthermore, it is proposed a closed-loop analysis by considering two control inputs $u_1$ and $u_2$. We are not concluding that control inputs can control diabetes, instead, we are leaving the possibility of being able to have a possible cure through possible control inputs, and it would be necessary to look at how biologically can be achieved. Thus, opening the possibility to design nonlinear control laws that may help to provide a treatment towards the cure of diabetes or to a better understanding of the evolution of this disease. Moreover, a wider knowledge of how $\beta$-cells interact in the continuous proliferation of insulin into the organism; it can contribute to a low level of glucose through the time.

## ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by TecNM project 8398.20-P, *Diseño de controladores y observadores no lineales en modelos relacionados a Diabetes Mellitus Insulinodependiente.*

## REFERENCES

[1] A. Sinclair, P. Saeedi, A. Kaundal, S. Karuranga, B. Malanda, and R. Williams, "Diabetes and global ageing among 65–99-year-old adults: Findings from the international diabetes federation diabetes atlas," *Diabetes Research and Clinical Practice*, p. 108078, 2020.

[2] M.-P. Maria Elizabeth, O.-C. Clara, M. Del Carmen *et al.*, "Pancreatic $\beta$-cells and type 2 diabetes development," *Current Diabetes Reviews*, vol. 13, no. 2, pp. 108–121, 2017.

[3] M. S. Udler, "Type 2 diabetes: multiple genes, multiple diseases," *Current diabetes reports*, vol. 19, no. 8, p. 55, 2019.

[4] A. D. Association *et al.*, "2. classification and diagnosis of diabetes: standards of medical care in diabetes—2019," *Diabetes care*, vol. 42, no. Supplement 1, pp. S13–S28, 2019.

[5] S. Rathee *et al.*, "Ode models for the management of diabetes: A review," *International Journal of Diabetes in Developing Countries*, vol. 37, no. 1, pp. 4–15, 2017.

[6] B. Shtylla, M. Gee, S. Shabahang, L. Eldevik, and L. DePillis, "A mathematical model for dc vaccine treatment of type i diabetes," *Frontiers in Physiology*, vol. 10, p. 1107, 2019.

[7] D. Gamboa, C. E. Vázquez, and P. J. Campos, "Nonlinear analysis for a type-1 diabetes model with focus on t-cells and pancreatic $\beta$-cells behavior," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 25, no. 2, p. 23, 2020.

[8] D. Gamboa, L. N. Coria, J. R. Cárdenas, R. Ramírez, and P. A. Valle, "Hardware implementation of a non-linear observer for a diabetes mellitus type 1 mathematical model," *Computación y Sistemas*, vol. 23, no. 4, 2019.

[9] W. Boutayeb, M. E. Lamlili, A. Boutayeb, and M. Derouich, "Mathematical modelling and simulation of $\beta$-cell mass, insulin and glucose dynamics: Effect of genetic predisposition to diabetes," *Journal of Biomedical Science and Engineering*, vol. 2014, 2014.

[10] A. Roy and R. S. Parker, "Dynamic modeling of free fatty acid, glucose, and insulin: An extended" minimal model"," *Diabetes technology & therapeutics*, vol. 8, no. 6, pp. 617–626, 2006.

[11] B. Topp, K. Promislow, G. Devries, R. M. Miura, and D. T. Finegood, "A model of b-cell mass, insulin, and glucose kinetics: pathways to diabetes," *Journal of theoretical biology*, vol. 206, no. 4, p. 605, 2000.

[12] R. D. Hernandez, D. J. Lyles, D. B. Rubin, T. B. Voden, S. A. Wirkus *et al.*, "A model of []-cell mass, insulin, glucose, and receptor dynamics with applications to diabetes," 2001.

[13] W. Boutayeb, M. E. Lamlili, A. Boutayeb, and M. Derouich, "The impact of obesity on predisposed people to type 2 diabetes: Mathematical model," in *International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*. Springer, 2015, pp. 613–622.

[14] H. Alali, W. Boutayeb, A. Boutayeb, and N. Merabet, "A mathematical model on the effect of growth hormone on glucose homeostasis," 2019.

[15] D. T. Finegood, L. Scaglia, and S. Bonner-Weir, "Dynamics of $\beta$-cell mass in the growing rat pancreas: estimation with a simple mathematical model," *Diabetes*, vol. 44, no. 3, pp. 249–256, 1995.

[16] R. N. Bergman, L. S. Phillips, C. Cobelli *et al.*, "Physiologic evaluation of factors controlling glucose tolerance in man: measurement of insulin sensitivity and beta-cell glucose sensitivity from the response to intravenous glucose." *The Journal of clinical investigation*, vol. 68, no. 6, pp. 1456–1467, 1981.

[17] S.-H. Kim and M.-J. Park, "Effects of growth hormone on glucose metabolism and insulin resistance in human," *Annals of Pediatric Endocrinology & Metabolism*, vol. 22, no. 3, p. 145, 2017.

[18] M. Lutski, I. Zucker, Z. Zadik, C. Libruder, O. Blumenfeld, T. Shohat, and Z. Laron, "Prevalence of diabetes among children treated with growth hormone in israel," *Diabetic Medicine*, vol. 36, no. 10, pp. 1276–1281, 2019.

[19] C. C. van Bunderen, N. C. van Varsseveld, E. M. Erfurth, J. C. Ket, and M. L. Drent, "Efficacy and safety of growth hormone treatment in adults with growth hormone deficiency: a systematic review of studies on morbidity," *Clinical endocrinology*, vol. 81, no. 1, pp. 1–14, 2014.

[20] A. V. Schally, X. Zhang, R. Cai, J. M. Hare, R. Granata, and M. Bartoli, "Actions and potential therapeutic applications of growth hormone–releasing hormone agonists," *Endocrinology*, vol. 160, no. 7, pp. 1600–1612, 2019.

[21] A. P. Krishchenko, "Localization of invariant compact sets of dynamical systems," *Differential Equations*, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676, 2005.

[22] A. P. Krishchenko and K. E. Starkov, "Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with applications to the lanford system," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 16, no. 11, pp. 3249–3256, 2006.

[23] J. Gibney, M.-L. Healy, and P. H. Sonksen, "The growth hormone/insulin-like growth factor-i axis in exercise and sport," *Endocrine reviews*, vol. 28, no. 6, pp. 603–624, 2007.

[24] P. De Leenheer and D. Aeyels, "Stabilization of positive linear systems," *Systems & control letters*, vol. 44, no. 4, pp. 259–271, 2001.

[25] N. C. Olarescu, K. Gunawardane, T. K. Hansen, N. Møller, and J. O. L. Jørgensen, "Normal physiology of growth hormone in adults," in *Endotext [Internet]*. MDText. com, Inc., 2019.

[26] G. C. Weir and S. Bonner-Weir, "Islet $\beta$ cell mass in diabetes and how it relates to function, birth, and death," *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 1281, no. 1, p. 92, 2013.

[27] A. V. Matveyenko and P. Butler, "Relationship between $\beta$-cell mass and diabetes onset," *Diabetes, Obesity and Metabolism*, vol. 10, pp. 23–31, 2008.

[28] T. Nowicki, "The insulin activity model based on insulin profiles," *Journal of Computer Sciences Institute*, vol. 13, 2019.

[29] M. Hawkins, J. Tonelli, P. Kishore, D. Stein, E. Ragucci, A. Gitig, and K. Reddy, "Contribution of elevated free fatty acid levels to the lack of glucose effectiveness in type 2 diabetes," *Diabetes*, vol. 52, no. 11, pp. 2748–2758, 2003.

[30] M. M. Weber, M. B. Gordon, C. Höybye, J. O. L. Jørgensen, G. Puras, V. Popovic-Brkic, M. E. Molitch, V. Ostrow, N. Holot, A. Pietropoli *et al.*, "Growth hormone replacement in adults: Real-world data from two large studies in us and europe," *Growth Hormone & IGF Research*, vol. 50, pp. 71–82, 2020.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 4

## *Humanoides y drones*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Analysis of a Humanoid Robot Walking in an Arbitrary Direction on an Sloping Surface

Jesus E. Fierro[1], J. Alfonso Pamanes[2], J. Alejandro Aquino[3] and E. Javier Ollervides[4]

***Abstract* — When a humanoid robot walks on a sloping plane in an arbitrary direction, the right leg flexion is different to that of the left leg. In this way, the orientation of the torso is gotten to preserve the equilibrium of the humanoid during the walking. In such a case, the specification of the required 3D motions of the pelvis and feet becomes a quite complex issue. To solve this problem, in this paper a general and simplified formulation is proposed and applied to obtain a cycloidal walking pattern for a humanoid robot. Simulations of walking are achieved for several study cases that show the efficacy of the proposed approach.**

## I. Introduction

The scientific research focused on the study of the mechanical behavior, control and programming of humanoid robots has increased the past few decades. As a result, more and more performant experimental and commercial prototypes have been developed [1-3]. In spite of the amazing performance achieved by the recent prototypes, a number of subjects should be studied in order to yet improve the performance of humanoids in certain applications like trotting, dancing, climbing or playing a sport.

Since the earliest studies about the motion of humanoids, the attention of researchers was focused on the kinematics and kinetics of the biped walking. In a precursory research about this subject, M. Vukobratovic and D. Juricic [4] studied the stability of the human walking. As a result, they introduced the notion of the *zero moment point* (ZMP). After such a work, multiple approaches were proposed to synthesize walking patterns for humanoid robots based on the behaviour of the ZMP [5-11].

In all the works cited in the precedent paragraph related to the kinematics of walking it is considered that the robot is moving on a horizontal plane. Clearly, when the slope of this plane changes, the parameters of the walking patterns must be adjusted in order to keep the ZMP inside the support polygon of the robot.

When the walking of a humanoid robot occurs on a horizontal plane, or on an inclined plane in the direction of maximum slope, the flexion of both legs is similar. In such a case the desired walking pattern of the robot can be specified by employing relatively simple motion equations for the pelvis and the oscillating foot. However, if the walking of the robot on a sloping surface happens is in an arbitrary direction, the legs flexion cannot be similar because asymmetric poses of the torso should be stablished such that the robot remain balanced. These scenarios are appreciated in Fig. 1 for both cases: symmetric and asymmetric poses of the torso with respect to the sagittal plane of the robot.

In one of the earliest studies of biped walking on sloping planes, a control scheme for an eight degree of freedom (*dof*) robot was proposed [12]. Such a system recognizes the change of slope of the walking plane and it modifies the walking pattern by taking into account the current angle. In other work [13], a simulation study was carried out for a robot that switches the working mode from biped to quadruped (or vice versa) when it goes up or goes down by the sloping surface. In the last two references only the motion of the robot on the sagittal plane was considered. Conversely, a 3D cycloidal walking pattern was applied in [14] to a humanoid robot with 12 *dof* in legs for walking on a sloping surface. In all these works it is assumed that the walking of the robot is achieved in direction with the maximum slope of the plane and therefore only similar legs flexion are employed during the motion.

In the present paper a general and simplified formulation is proposed in order to specify the desired walking pattern of humanoids when walking on sloping planes in an arbitrary direction. This approach is applied to the Bioloid humanoid robot employing a cycloidal walking pattern. Simulations are achieved for several study cases that show the efficacy of the proposed approach.

## II. Cycloidal Walking of the Humanoid Bioloid

The analysis considered in this paper is based on a cycloidal motion of a humanoid on a sloping surface. Nevertheless, as a background for the subject, the basic notions related with such a walking pattern are presented in this Section for a displacement of the robot on a horizontal plane. A more comprehensive study about a cycloidal walking is presented in [15]. The extension of such a study

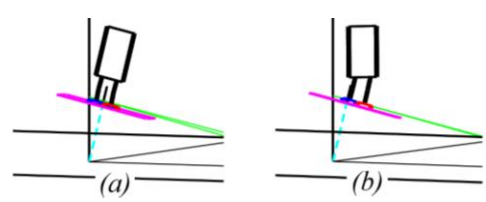



Figure 1. Front view of symmetric and asymmetric poses of the torso of a humanoid with respect to the sagittal plane when walking on a sloping plane in an arbitrary direction (*a*) unbalanced posture, (*b*) balanced posture.

* Research supported by the Tecnologico Nacional de México (TecNM) and CONACyT of Mexico.
The authors are with the TecNM campus Instituto Tecnologico de la Laguna, Torreon, Coah. C.P. 27000, Mexico.
J. A. Pamanes, corresponding author (phone 521.871.273.2430; fax 521.871.705.1326; (e-mail: japamanesg@correo.itlalaguna.edu.mx)
J.E. Fierro (e-mail: jexfp1@gmail.com)
J.A. Aquino (e-mail: alejandroaquino.24@hotmail.com)
E.J. Ollervides (e-mail: javierollervides@yahoo.com )

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

for walking on a sloping surface in an arbitrary direction will be presented in Section III.

The considered walking pattern is applied to the Bioloid humanoid robot, whose kinematic scheme and the world frame $\Sigma_W$ employed as a reference, are shown in Fig. 2. The orthonormal frames $\Sigma_h$ attached to the pelvis and $\Sigma_f$ attached to the oscillating (or *free*) foot can be also appreciated in this Figure. In the walking pattern of this robot the desired poses for both the pelvis and the oscillating foot are specified with respect to the world frame $\Sigma_W$ as time functions. The walking surface is lying in the $\mathbf{x_W}$-$\mathbf{y_W}$ plane and the walking direction is $\mathbf{x_W}$. It will be assumed that the walking surface is horizontal.

The points for position specification of the walking are $O_h$ for the *pelvis* and $O_f$ for the free *foot*. Clearly, $O_f$ permutes from one foot to the other at each step. $O_h$ and $O_f$ are displayed in Fig. 2. Both positions are given in Cartesian coordinates with respect to $\Sigma_W$. The Bryant angles $\lambda$, $\mu$ and $\nu$ are employed for orientation of frames $\Sigma_C$ and $\Sigma_f$. Such angles correspond to successive rotations applied in the sequence ***x-y-z*** to a frame that initially matches $\Sigma_W$ in order to obtain the desired orientation with respect to $\Sigma_W$.

The equations that describe the position and orientation of the pelvis and the feet as time functions are those proposed in [15]. Some walking parameters employed for linear motion in such functions are appreciated in Fig. 3 and the whole list of parameters is given in Appendix A. By applying this functions for positions of $O_h$ and $O_f$ the paths of such points are obtained during a specified walking. Paths followed by $O_h$ and $O_f$, for a certain walking, are displayed in figures 3 and 4 to illustrate them.

The walking process is divided into 3 stages: stage 1 or *starting*, stage 2 or *cruising* and stage 3 or *stopping*. In stage 1, the pelvis accelerates from zero velocity by following a starting semi-cycloidal motion until cruising speed (*Vmax*). This stage occurs in a period $T_1$ during the first step. The component $x$ of position for both feet when the walking begins are such that $x = 0$. $n_p$ steps are achieved in cruising stage; each step in is completed in a period $T_2$. Finally, in stage 3 the pelvis speed decreases from *Vmax* to zero by using a stopping semi-cycloidal motion in a time $T_3$ corresponding to the last step. A single step at any stage has one single support phase (SSP) and one double support phase (DSP). In a straight-line waking, both feet finish their motion having the same $x$ coordinate. A plot that shows the behavior proposed for the pelvis speed is presented in Fig 5.

## III. Describing a Sloping Surface for Walking

Consider an orthonormal frame $\Sigma_P$ attached to an arbitrary sloping plane $\boldsymbol{QRS}$, as shown in Fig. 6, whose origin $O_P$ has coordinates $x_{OP}$, $y_{OP}$ and $z_{OP}$ in the world frame $\Sigma_W$.

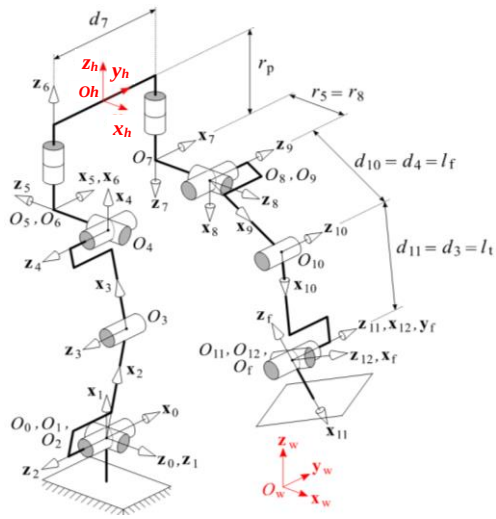



Figure 2. Kinematic scheme of legs of the Bioloid humanoid. Frames assigned by employing the modified convention of Denavit-Hartenberg [16].

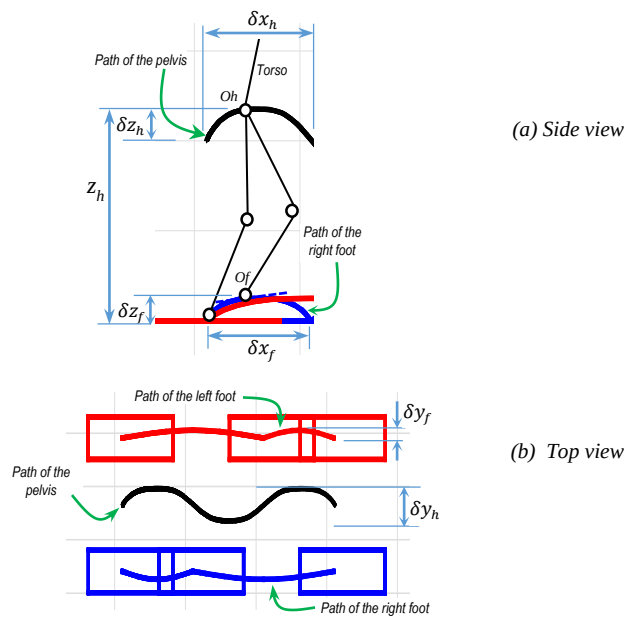



Figure 3. Paths and parameters for linear motion of pelvis and feet with a gait based on cycloidal motions.

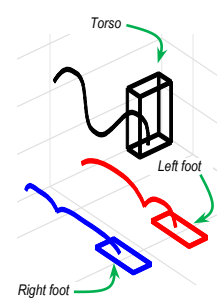



Figure 4. Paths of pelvis and feet during a gait based on cycloidal motions.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

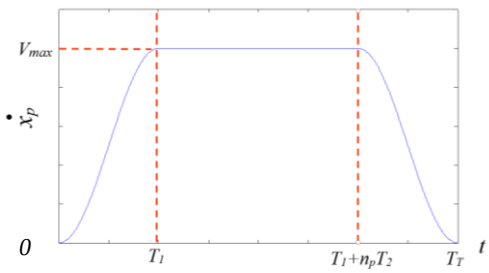



Figure 5. History of the pelvis speed in a cycloidal walking pattern.

The plane is defined in $\Sigma_W$ by the following Equation:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ , \tag{1}$$

where the coefficients $A$, $B$ and $C$ are such that

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \tag{2}$$

and D is given by:

$$D = -A\, x_{OP} - B\, y_{OP} - C\, z_{OP} \tag{3}$$

The frame $\Sigma_P$ is defined such that $\boldsymbol{z_P}$ is normal to the plane, and $O_P$ is located by a vector $\boldsymbol{r}$, also normal to the plane. Therefore,

$$\boldsymbol{r} = r\ \boldsymbol{z_P} \tag{4}$$

Clearly, the vector $\boldsymbol{z_P}$ of $\Sigma_P$ is given by:

$$\boldsymbol{z_P} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \tag{5}$$

Note that the norm $r$ of $\boldsymbol{r}$ can be arbitrarily specified to put the plane away or close from the origin of the frame $\Sigma_W$.

It can be also observed that $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{S}$ are points of the plane that lie also in the axes $\boldsymbol{x_W}$, $\boldsymbol{y_W}$ and $\boldsymbol{z_W}$, respectively. Thus, the coordinates of such points in $\Sigma_W$ are $(x_Q, 0, 0)$, $(0, y_R, 0)$ and $(0, 0, z_S)$, respectively. By substituting these coordinates in Eq. (1), $x_Q, y_R$ and $z_S$ are obtained as

$$x_Q = -\frac{D}{A} \tag{6-a}$$

$$y_R = -\frac{D}{B} \tag{6-b}$$

$$z_S = -\frac{D}{C} \tag{6-c}$$

On the other hand, $\boldsymbol{x_P}$ is defined as parallel to the edge $\boldsymbol{QR}$ such that

$$\boldsymbol{x_P} = \frac{1}{d_{\boldsymbol{QR}}} \begin{bmatrix} -x_Q \\ y_R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

where

$$d_{\boldsymbol{QR}} = \sqrt{{x_Q}^2 + {y_R}^2} \tag{8}$$

Accordingly, the frame $\Sigma_P$ is completed by computing $\boldsymbol{y_P}$ as:

$$\boldsymbol{y_P} = \boldsymbol{z_P} \times \boldsymbol{x_P} \tag{9}$$

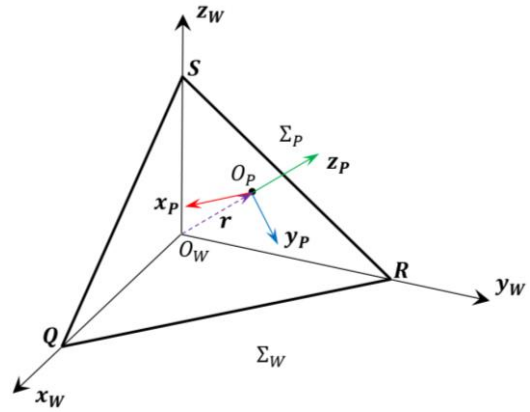



Figure 6. Orthonormal frame $\Sigma_P$ attached to a sloping plane.

Now, the pose of $\Sigma_P$ can be described with respect to the frame $\Sigma_W$ by the following homogeneous matrix:

$${}^W_PT = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_P} & \boldsymbol{y_P} & \boldsymbol{z_P} & \boldsymbol{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \tag{10}$$

where $\boldsymbol{x_P}$, $\boldsymbol{y_P}$, $\boldsymbol{z_P}$ and $\boldsymbol{r}$ are defined by (7), (9), (5) and (4), respectively. So, writing these vectors in terms of its orthogonal components with respect to $\Sigma_W$, the matrix ${}^W_PT$ is given by:

$${}^W_PT = \begin{bmatrix} x_{px} & y_{px} & z_{px} & r_x \\ x_{py} & y_{py} & z_{py} & r_y \\ x_{pz} & y_{pz} & z_{pz} & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

On the other hand, consider a supplementary frame $\Sigma_C$ defined by a rotation of $\Sigma_P$ with respect to $\boldsymbol{z_P}$ at an angle $\delta$ and then by a translation stablished by the vector $\boldsymbol{r_C}$ whose components in $\Sigma_P$ are $x_{OC}$, $y_{OC}$ and $z_{OC}$. The pose finally obtained by $\Sigma_C$ with respect to $\Sigma_P$ is shown in Fig. 7. The homogeneous matrix describing the pose of $\Sigma_C$ with respect to $\Sigma_P$ is

$${}^P_CT = \begin{bmatrix} c\delta & -s\delta & 0 & x_{OC} \\ s\delta & c\delta & 0 & y_{OC} \\ 0 & 0 & 1 & z_{OC} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

where $s\delta \equiv sin\delta$ and $c\delta \equiv cos\delta$.

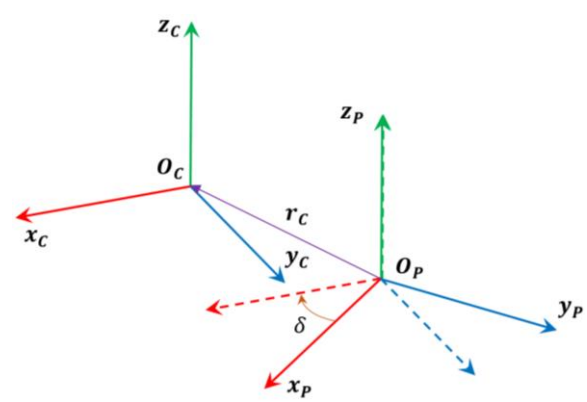



Figure 7. Pose of the supplementary orthonormal frame $\Sigma_C$ with respect to $\Sigma_P$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Consequently, the pose of $\Sigma_C$ with respect to $\Sigma_W$ is obtained by

$$ {}^{W}_{C}T = {}^{W}_{P}T\,{}^{P}_{C}T \tag{13} $$

Therefore

$$ {}^{W}_{C}T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14} $$

where:

$$ \begin{aligned} t_{11} &= x_{px}c\delta + y_{px}\,s\delta \\ t_{12} &= -x_{px}\,s\delta + y_{px}\,c\delta \\ t_{13} &= z_{px} \\ t_{14} &= x_{px}x_{Oc} + y_{px}\,y_{Oc} + z_{px}z_{Oc} + r_x \\ t_{21} &= x_{py}c\delta + y_{py}\,s\delta \\ t_{22} &= -x_{py}s\delta + y_{py}\,c\delta \\ t_{23} &= z_{py} \\ t_{24} &= x_{py}x_{Oc} + y_{py}\,y_{Oc} + z_{py}z_{Oc} + r_y \\ t_{31} &= x_{pz}c\delta + y_{pz}\,s\delta \\ t_{32} &= -x_{pz}s\delta + y_{pz}\,c\delta \\ t_{33} &= z_{pz} \\ t_{34} &= x_{pz}x_{Oc} + y_{pz}\,y_{Oc} + z_{pz}z_{Oc} + r_z \end{aligned} $$

As a result of the precedent analysis, the frame $\Sigma_C$ is described with respect to $\Sigma_W$ by the matrix ${}^{W}_{C}T$, which is determined by the parameters $A, B, C, r, x_{OP}, y_{OP}, z_{OP}, \delta$, $x_{OC}$, $y_{OC}$ and $z_{OC}$.These parameters specify the pose of the walking plane, the start point and the direction of walking of the humanoid. That is, such parameters specify the desired pose of a hypothetic *carpet* where the humanoid will walk on the sloping plane. When the frame $\Sigma_C$ has been defined, the gait of the humanoid should be specified with respect to this frame by applying some walking pattern as usually applied to a horizontal walking surface.

## IV. Study Cases

Three study cases are presented here to illustrate the application of the formulation developed in the precedent Section. As a reference, *Case 1* consists in a walking on a horizontal plane with similar flexion in both legs. Then, *Case 2* considers the humanoid walking on a sloping surface in an arbitrary direction employing also similar legs flexion, like those employed when walking on a horizontal plane. Evidently, this one is a fictive case. In fact, even if the ZMP is not computed in this paper, it is clear that the gait of Case 2 is not feasible because the similar legs flexion avoid balanced postures of the robot when walking on the sloping surface. Finally, in *Case 3* the walking parameters are specified such that a balanced walking is gotten, even if non similar legs flexion are required. In all cases the formulation of Section III is applied to specify the pose of both the sloping surface and the walking carpet. In Table I the parameters that specify such surfaces are given for each case. The Table in Appendix B gives the values employed for the walking parameters in the three cases.

### A. *Case 1*

A sequence of postures of the robot obtained by Matlab© simulation is presented in Fig. 8 in this case. The carpet surface is located parallel to the $x_W$-$y_W$ plane, but displaced

TABLE I. PARAMETERS OF THE WALKING SURFACES

| *Parameter* | *Units* | *Case 1* | *Case 2* | *Case 3* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | - | 0.00000 | 0.18300 | 0.18300 |
| *B* | - | 0.00000 | 0.18300 | 0.18300 |
| *C* | - | 1.00000 | 0.96590 | 0.96590 |
| *r* | *mm* | 250.000 | 250.000 | 250.000 |
| $x_{OP}$ | *mm* | 0.00000 | 45.7532 | 45.7532 |
| $y_{OP}$ | *mm* | 0.00000 | 45.7532 | 45.7532 |
| $z_{OP}$ | *mm* | 250.000 | 241.481 | 241.481 |
| $x_{OC}$ | *mm* | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| $y_{OC}$ | *mm* | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| $z_{OC}$ | *mm* | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| $\delta$ | *degrees* | 15.0000 | 15.0000 | 15.0000 |

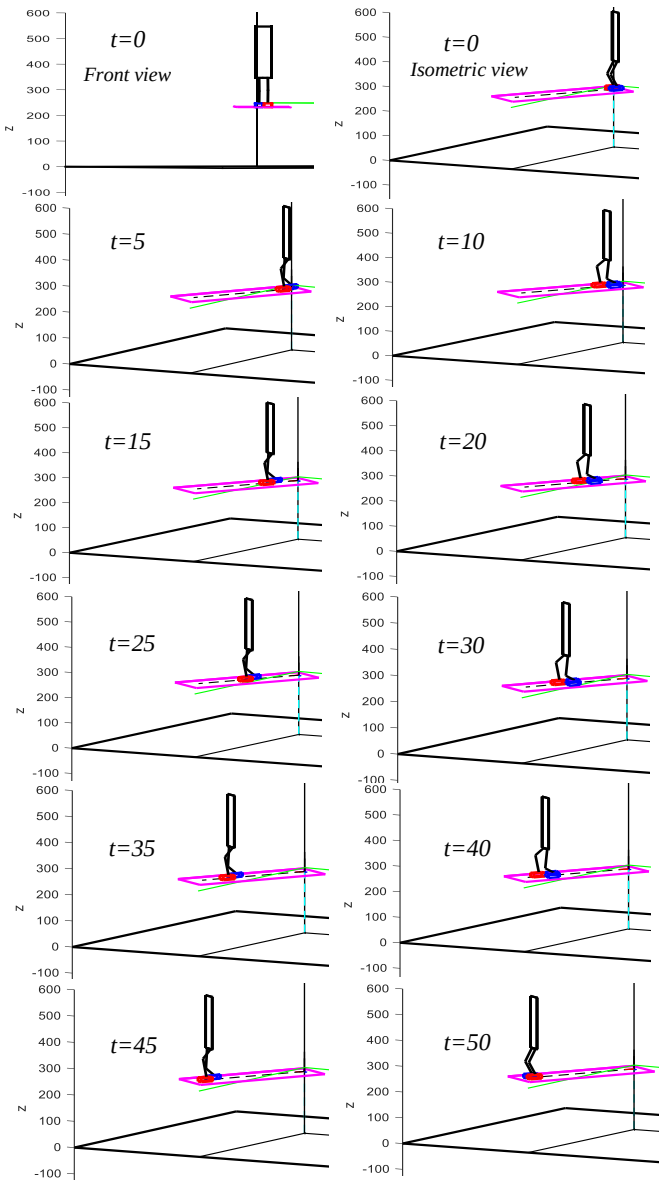



Figure 8. Simulation of walking for *Case 1*.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

by 250 mm in $\boldsymbol{z}_W$ and rotated by 15° about this vector, as stablished by parameters of this case in Table I.

### B. *Case 2*

The walking is achieved on the carpet surface whose parameters are given in Table I. The walking direction is specified by the angle $\delta = 15°$ of this Table. A sequence of postures obtained by Matlab© simulation is observed in Fig. 9. Note in this figure that the walking direction is not that of the maximum slope. The walking parameters applied in this case are the same that those employed in Case 1 with respect to the carpet frame $\Sigma_C$ . However, because of the normal force applied by the sloping surface, the robot will fall if the pose of the torso is not corrected in order to displace the ZMP such that the equilibrium be recovered.

### C. *Case 3*

The walking is achieved on the carpet surface whose parameters are given in Table I. The parameters of the walking surface are the same applied in Case 2; however, in Case 3 the walking parameters are changed to improve the equilibrium of the robot. A sequence of postures obtained by Matlab© simulation is appreciated in Fig. 10. The initial roll angle $\lambda_p$ of the pelvis is changed from 0° to 15°. The new pose of the torso can be observed in Fig. 10 for the starting posture of the robot.

At each case, the coordinates employed to define the successive poses of pelvis and feet should be specified with respect to the carpet frame $\Sigma_C$ . Such coordinates should be transformed by applying the ${}^{W}_{C}T$ transformation matrix to

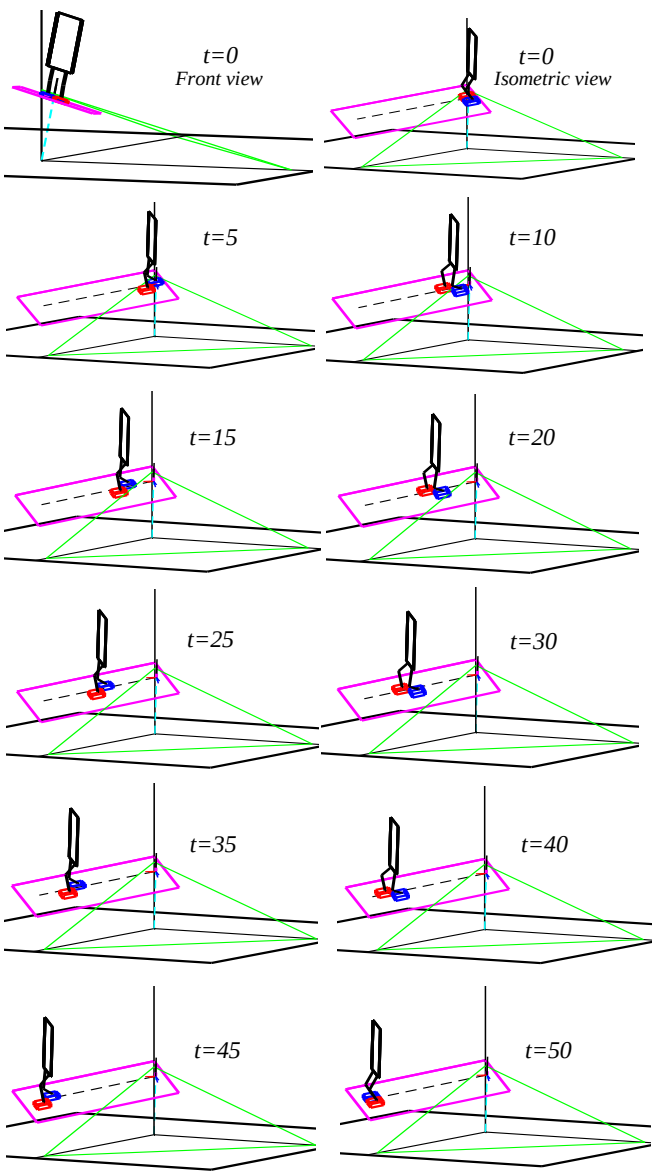



Figure 9. Simulation of walking for *Case 2*.

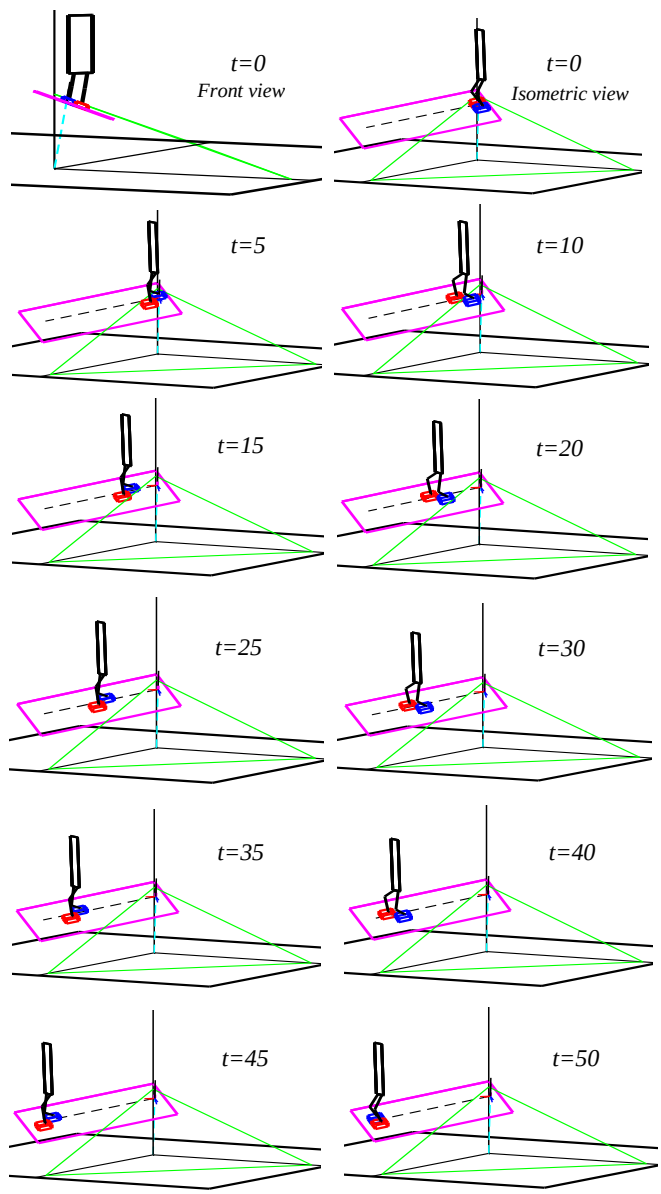



Figure 10. Simulation of walking for *Case 3*.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

describe those poses with respect to the frame $\Sigma_W$ in order to solve the inverse kinematics. The sets of joint variables applied in the simulation were obtained by solving the inverse kinematic problem. Such a problem was solved by applying the mathematical model previously presented in [17].

## V. Conclusion

A general and simplified formulation was presented in this paper to specify the required 3D motions of the pelvis and feet of a humanoid robot that walks on a sloping surface in an arbitrary direction. The proposed formulation is applied to obtain a cycloidal walking pattern for a Bioloid robot. Simulations of walking are achieved for three study cases that show the efficacy of the proposed approach.

The obtained results show that asymmetric motions of the torso must be suitably specified in order to preserve the equilibrium of the humanoid during the walking. This observation can be sustained even if the ZMP is not yet computed.

Only basic aspects of the kinematics of position of the humanoid robot was considered in this study. Clearly, this analysis is necessary to make possible the examination of other relevant aspects of the mechanics of the robot for walking on a sloping surface in an arbitrary direction. Subjects such as the analysis of feasibility of the walking by taking into account the joint limits, should be accomplished in future work. The static and the dynamic behavior of the humanoid must be also studied in order to optimize its dynamic performance. Clearly, several sloping angles of the walking plane should be taken into account.

## References

[1] F. Sygulla and D. Rixen, "A force-control scheme for biped robots to walk over uneven terrain including partial footholds", International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 17, issue: 1, pp. 1-14, Jan. 2020.

[2] E. Guizzo, "By leaps and bounds: An exclusive look at how Boston Dynamics is redefining robot agility", *IEEE Spectrum*, vol. 56, no. 12, pp. 34-39, Dec. 2019.

[3] S. Shigemi, "ASIMO and Humanoid Robot Research at Honda". In: A. Goswami, P. Vadakkepat (Eds), *Humanoid Robotics: A Reference*, Springer, Dordrecht, 2019.

[4] M. Vukobratović, and D. Juricić, "Contribution to the Synthesis of Biped Gait", *IEEE Transactions on Bio-Medical Engineering*, Vol. 16 No 1, 1969.

[5] C. Shih, Y. Zhu, and W. Gruver, "Optimization of the Biped Robot Trajectory", *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 899-903, 1991.

[6] Y. Zhang, Q. Wang, W. Qiang and P. Fu, "A New Method of Desired Gait Synthesis in Biped Robot", *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1300-1304; June, 2000.

[7] Q. Huang, K. Yokoi, S. Kajita, K. Kaneko, H. Arai, N. Koyachi, and K. Tanie, "Planning Walking Patterns for a Biped Robot"; *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 3, pp. 280-289, June 2001.

[8] A. Takanishi, M. Ishida, Y. Yamazaki, and I. Kato, "The Realization of Dynamic Walking Robot WL-10RD"; Proc. of the *International Conference on Advanced Robotics*, pp. 1398-1404, 1985.

[9] W. K. Chen, *Linear Networks and Systems*. Belmont, CA: Wadsworth, pp. 123–135, 1993.

[10] C. Shi, Y. Li, S. Chung S, T. Lee, W. Gruver, "Trajectory Synthesis and Physical Admissibility for a Biped Robot during the Single Support Phase", *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1646-1652, 1990.

[11] G. Reyes, J.A. Pamanes, J.E. Fierro, and V. Nunez, "Optimum Walking of the Bioloid Humanoid Robot on a Rectilinear Path", in S. Zeghloul, M.A. Laribi, J.P. Gazeau (Eds.), *Proceedings of the IFToMM CK 2017, the 7th IFToMM International Workshop on Computational Kinematics*, pp. 143-151, May 2017.

[12] Y. Zheng and J. Shen, "Gait Synthesis for the SD-2 Biped Robot to Climb Sloping Surface", *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 6 No. 1, Feb 1990.

[13] K. Asa, K. Ishimura, M. Wada; "Behavior transition between biped and quadruped walking by using bifurcation", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 57, pp. 155-160, No. 1, 2009.

[14] O.F. Murillo, J.A. Pamanes, L. Arias and J.V. Nunez, "Analysis of Walking of the Bioloid Robot on Sloping Planes" (in Spanish), in M. Trujillo and H. Plascencia (Eds.) *Avances de la Ingeniería Mecánica: Investigación y Aplicaciones*. Tomo III: *Avances de la Ingeniería Mecánica en Mecánica Teórica*, Chapter A4-180; pp. 946-955, Mexico, Jan. 2015.

[15] L. Arias, L. Olvera , J.A. Pamanes, and J.V. Nunez, "Cycloidal Walking Pattern for Humanoid and Application to the Bioloid Robot" (in Spanish), *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* (RIBIM), pp. 03-22, 2014.

[16] W. Khalil and M. Kleifinger, "A new geometric notation for open and closed-loop robots", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1174-1180, 1986.

[17] J.A. Pámanes, J.V. Nunez and J.A. Guzman, "A New Approach About the Inverse Kinematic of Biped Robots and its Application to the Bioloid Robot" (in Spanish), Proceedings of the IX Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica (CIBIM9), pp. 10-157-10-164, Spain, November 2009.

## Appendix A

Parameters of the cycloidal walking pattern [15]

| Symbol | Parameter |
|---|---|
| $T_1$ | Time for starting stage |
| $T_2$ | Time for one step in cruising stage |
| $T_3$ | Time for stopping stage |
| $T_t$ | Total time for the whole walking cycle |
| $n$ | Number of steps |
| $np$ | Number of steps in cruising stage |
| $x_{hin}$ | *x* initial position coordinate of the pelvis |
| $y_{hin}$ | *y* initial position coordinate of the pelvis |
| $z_{hin}$ | *z* initial position coordinate of the pelvis |
| $\delta x_h$ | *x* displacement of the pelvis in a whole step |
| $\delta y_h$ | *y* displacement of the pelvis in a whole step |
| $\delta z_h$ | *z* displacement of the pelvis in half a step |
| $\lambda_{hin}$ | Initial roll angle of the pelvis |
| $\mu_{hin}$ | Initial pitch angle of the pelvis |
| $\nu_{hin}$ | Initial yaw angle of the pelvis |
| $\delta\lambda_h$ | Angular displacement in the roll of the pelvis in a whole step |
| $\delta\mu_h$ | Angular displacement in the pitch of the pelvis in a whole step |
| $\delta\nu_h$ | Angular displacement in the yaw of the pelvis in a whole step |
| $x_{fin}$ | *x* initial position coordinate of the free foot |
| $y_{fin}$ | *y* initial position coordinate of the free foot |
| $z_{fin}$ | *z* initial position coordinate of the free foot |
| $\delta x_f$ | *x* displacement of the free foot in a whole step |
| $\delta y_f$ | *y* displacement of the free foot in half a step |
| $\delta z_f$ | *z* displacement of the free foot in half a step |
| $\lambda_{fin}$ | Initial roll angle of the free foot |
| $\mu_{fin}$ | Initial pitch angle of the free foot |
| $\nu_{fin}$ | Initial yaw angle of the free foot |
| $\delta\lambda_f$ | Angular displacement in the roll of the free foot in half a step |
| $\delta\mu_f$ | Angular displacement in the pitch of the free foot in half a step |
| $\delta\nu_f$ | Angular displacement in the yaw of the free foot in half a step |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## APPENDIX B

Values of parameters in study cases

| *Parameter* | *Units* | *Case 1* | *Case 2* | *Case 3* |
|---|---|---|---|---|
| $n_p$ | *Steps* | 8 | 8 | 8 |
| $T_1$ | *Seg* | 5 | 5 | 5 |
| $T_2$ | *Seg* | 5 | 5 | 5 |
| $T_3$ | *Seg* | 5 | 5 | 5 |
| $T$ | *Seg* | 50 | 50 | 50 |
| $x_{hin}$ | *mm* | 0 | 0 | 0 |
| $y_{hin}$ | *mm* | 33 | 33 | 33 |
| $z_{hin}$ | *mm* | 100 | 100 | 100 |
| $\delta x_h$ | *mm* | 100 | 100 | 100 |
| $\delta y_h$ | *mm* | -5 | -5 | -5 |
| $\delta z_h$ | *mm* | 5 | 5 | 5 |
| $\lambda_{hin}$ | ° | 0 | 0 | 15 |
| $\mu_{hin}$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\nu_{hin}$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\delta\lambda_h$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\delta\mu_h$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\delta\nu_h$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $x_{fin}$ | *mm* | 0 | 0 | 0 |
| $y_{fin}$ | *mm* | 66 | 66 | 66 |
| $z_{fin}$ | *mm* | 0 | 0 | 0 |
| $\delta x_f$ | *mm* | 100 | 100 | 100 |
| $\delta y_f$ | *mm* | 8 | 8 | 8 |
| $\delta z_f$ | *mm* | 15 | 15 | 15 |
| $\lambda_{fin}$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\mu_{fin}$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\nu_{fin}$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\delta\lambda_f$ | ° | 0 | 0 | 0 |
| $\delta\mu_f$ | ° | 5 | 5 | 5 |
| $\delta\nu_f$ | ° | 0 | 0 | 0 |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Diseño y simulación cabeza de animatrónico tipo narrador controlado mediante tarjeta de desarrollo

Aguilar-Molina, Y.[1] Martínez-García, P.A.[1] Martínez-Gutiérrez, G.[2], Ramírez-García D.[2], González-Moreno, S.[3], Luque-Vega, L.F.[4]

[1]*Universidad de Guadalajara; Centro Universitario de los Valles*
[2]*TecNM Campus Colima Villa de Álvarez,*
[3]*Instituto Tecnológico Superior de Huauchinango* 4*Universidad del Valle de México.*

yehoshua@valles.udg.mx, paul.martinez4508@alumnos.udg.mx, 17460032@colima.tecnm.mx, 16460063@itcolima.edu.mx, luis.luque@uvmnet.edu,

**Abstract**
This project shows the documentation of the design of an animatronic figure with the help of SolidWorks® software for 3D design, where it is possible to implement a large animatronic that has human movements very similar to real ones using electronic and mechanical systems as in the movement of the eyes, mouth and arms that are carried out with simple mechanisms by means of mid-range electric linear actuators, the circular movement of the neck will be carried out with the help of a stepping motor and the eyebrow movement is carried out by a servo for electronics In addition to having a setting system programmed with led lights and artificial smoke in the Arduino® software for programming where the executed movements are programmed and a recording that is reproduced during its operation to simulate being narrated by the animatronic. The electrical and electronic systems for the aforementioned movements are controlled by PWM pulses and Mosfet systems, these systems are designed in Proteus® software for design and simulations of electrical and electronic systems where the PCB board is also designed. All these systems have an automatic function thus contributing to the Mechatronics area by developing effective mechanical and electronic systems that are easy to build but long lasting. The prototype is easily disassembled and assembled to be easily moved.

**Key words**: animatronic, simulations, Robot, Mechatronics

## I.INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad, el ser humano ha perseguido el objetivo de construir máquinas que fueran capaces de imitar movimientos humanos o realizar tareas demasiado duras, complejas o repetitivas; pudiendo así evitar realizarlas. En términos generales, un robot posee la capacidad de interpretar su entorno y adecuar sus acciones a la consecución de un objetivo. [1]

La robótica, es el ámbito de la tecnología que impulsa el desarrollo de robots, esta disciplina ha estado presente desde hace décadas en la construcción, como en fábricas de automóviles, escuelas, hospitales y viviendas privadas. Sin embargo, últimamente, nuevos ámbitos de investigación como la Inteligencia Artificial (IA) y la tecnología de sensores se han unido a la robótica para crear robots autónomos avanzados, con un abanico mucho más amplio de posibles aplicaciones. Según Andrew Keisner la innovación en materia de robótica se concentra en un número reducido de países y polos surgidos por lo general en torno a las universidades más avanzadas. [2]

La animatrónica es una técnica que recrea el movimiento de seres vivos aprovechando los recursos técnicos que brinda la ingeniería y robótica, estos seres mecánicos son controlados y alimentados externamente. Los sistemas de movimiento en animatrónicos se han descrito como una combinación de computadores, interfaces especiales y ejercicios de simulación utilizados para entrenar a los espectadores de una manera atractiva y motivadora. [8]

En otras palabras, al escuchar la palabra animatrónico, se entiende como un intento de imitación de los seres vivos, figuras animadas en tres dimensiones, ya sea un humano o un animal y, usualmente, de tamaño real. [3]

En algunos animatrónicos podemos ver que su gestación se da en un ámbito académico cuyo objetivo principal está orientado hacia el desarrollo tecnológico. [6] En la mayoría de los casos tienen el propósito de entretenimiento siendo comúnmente empleada en la construcción de animales y criaturas de ciencia ficción, algunos ejemplos se han observado en la industria cinematográfica en películas como “Tiburón” (1975) o “Jurassic Park” (1993). [5]

Aunque en la actualidad estos dispositivos ya no son muy utilizados en la industria del cine (debido a los efectos por CGI) pueden ser utilizados en museos o zoológicos, en donde buscan exponer personas, personajes o animales para imitar sus movimientos y comportamiento para el conocimiento y entretenimiento del público. [4]

El presente proyecto presente el diseño y simulación de una figura animatrónica de grandes con movimientos muy similares a los naturales de un humano, el diseño mecánico se realizó con la ayuda de diseño asistido por computadora (CAD), además se emplearon sistemas electrónicos, todo ello para presentar los movimientos de ojos, boca, cuello y brazos los cuales se programan a través una tarjeta de desarrollo “Arduino nano”. Esto tomando como argumento que el uso de microcontroladores tales como Raspberry, Arduino entre otros dispositivos ha permitido el desarrollo de proyectos interesantes de bajo costo, principalmente en animatrónicos.

Además, con el fin de que el animatrónico sea visualmente atractivo, cuenta con un sistema de luces de leds RGB, humo artificial y un sistema de seguimiento vocal que sincroniza el movimiento de la boca con el sonido simulando así que el animatrónico hable, esta.

## II.METODOLOGÍA

Para el diseño del animatrónico se utilizó la metodología de desarrollo de productos descrita por Ulrich, la cual esboza de una manera sistemática el procedimiento que se debe seguir para la adecuada definición de los conceptos y la posterior

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

selección para la obtención de la solución óptima entre todas las opciones que se pueden presentar. [7] para poder generar flujos de trabajo se debe analizar cada una de las etapas del proyecto de manera que realmente respondan a las necesidades planteadas. [10]

1. Conceptualizar: a través de una lluvia de ideas se generaron los conceptos para que el animatrónico cumpliera con las siguientes características: llamativo, fácil de construir y de implementar
2. Diseñar: Una vez definido todas las características del animatrónico, el diseño está dividido en tres partes: mecánico, electrónico y control. En el diseño mecánico se realizaron los mecanismos de los que estará compuesto el animatrónico, para la parte electrónica se diseñaron las PCB de control del animatrónico, y por último para el control se realizó la programación del diagrama de flujo propuesto en la conceptualización del proyecto.
3. Simular: Una vez terminadas las características y componentes de cada diseño, se realizaron animaciones de cada sistema, con el fin de comprobar si los diseños realizados cumplen con las características deseadas.
4. Evaluación: se realizó un análisis de los resultados de la simulación para poder detectar algún detalle o error relevante para poder realizar los ajustes necesarios al diseño.

## III.DESARROLLO

*Conceptualización*

Con base a una lluvia de ideas se definieron las partes del animatrónico como la cabeza y los brazos, los cuales se colocan sobre una base en la que están los sistemas de control y de sonido. También el animatrónico tiene cinco movimientos principales, ojos, cejas, boca, cuello y brazos. Además, debe tener la capacidad de realizar un movimiento sincronizado de la boca con el sonido.

*Diseño mecánico*

1) Materiales y equipo

Se empleó el software SolidWorks® 2018, para diseñar las piezas de los componentes, en él también es posible realizar animaciones para simular el funcionamiento y comprobar que funcione correctamente.

2) Cabeza

En la Figura 1 se pueden observar un el croquis del rostro, el cual está a una escala de 1:4 con respecto a una cabeza humana.

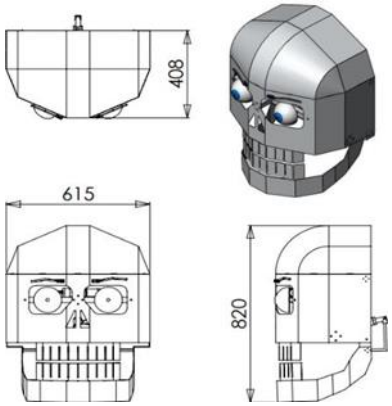



*Fig. 1 Diseño de la cabeza del animatrónico*

El diseño está constituido por múltiples piezas como la cara, mandíbula, la parte superior del cráneo y dientes, estos elementos están sujetados con tornillos de ¼ y remaches de 1/8 de pulgada.

3) Brazos

Se presentan en la Figura 2 se diseñaron con tubular cuadrado en PTR de 1 pulgada calibre 16. Estos brazos poseen una proporción de 4 a 1 en los brazos de una persona promedio. Este diseño contempla un brazo, un elemento de sujeción para codo, un antebrazo y un actuador lineal 750N de 300 mm de recorrido, estos elementos se unirán con tornillos de ¼".

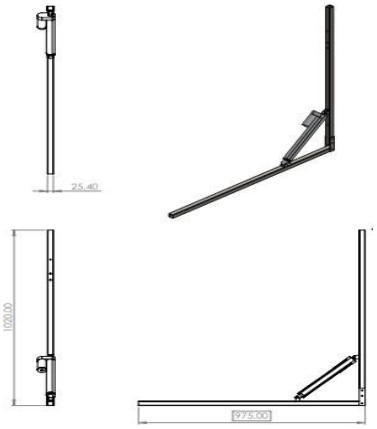



*Fig. 2 Diseño de brazos*

4) Estructura

La estructura fue diseñada con perfil de PTR, se diseñó con un total de 9 barras de 1" calibre 16 y 1 barra de 20 por 20 mm calibre 16 del material. La Figura 3 muestra la estructura. Se diseñó contemplando 7 niveles y una estructura separada, en caso de requerir separar la pieza.

5) *Diseño de los mecanismos para los movimientos*

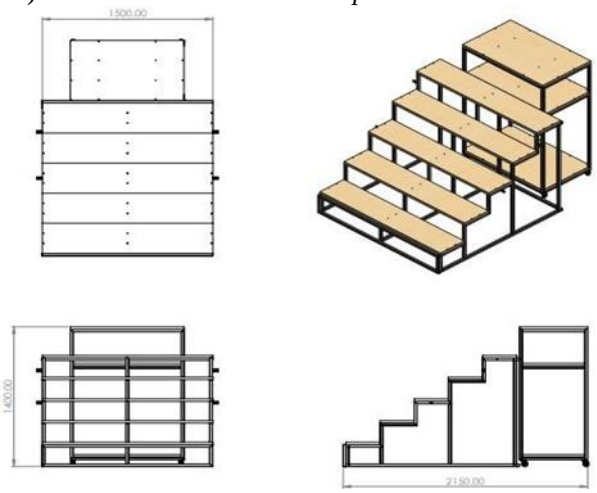



*Fig. 3 Diseño de estructura*

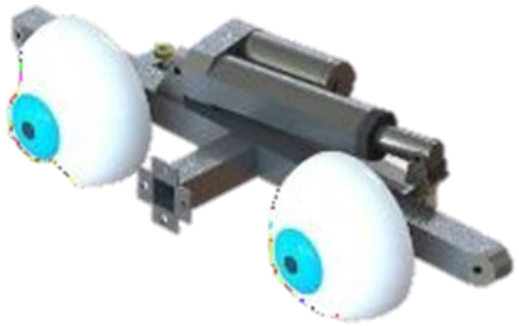


*Fig. 4 Mecanismo para movimiento de ojos*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

El movimiento de los ojos se realiza con el sistema mecánico que se muestra en la Figura 4, es apoyado del actuador lineal de 50 mm de recorrido.

El funcionamiento es simple; los ojos se encuentran alineados en sus soportes con la ayuda de una barra de dirección, en el perno del lado izquierdo se encuentra sujeto el embolo del actuador y el actuador se encuentra situado en el soporte principal de los ojos su función es empujar y contraer de forma lineal la barra que mantiene alineados los ojos, provocando que estos se muevan a voluntad.

Para el movimiento de la mandíbula, se implementó el mismo modelo de actuador que en el movimiento de los ojos, como se muestra en la figura 5.

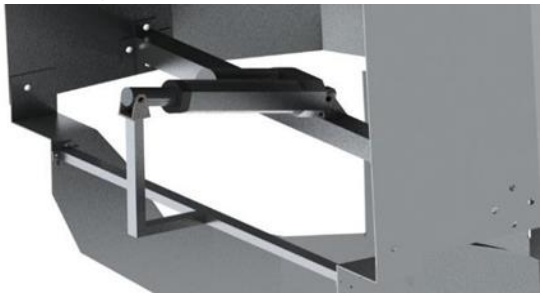


Fig. 5 Mecanismo para apertura de mandíbula

Las cejas se diseñaron para ser controladas mediante servos como se muestra en la Figura 6. Este movimiento es básico ya que las cejas se encuentran acopladas al servo, moviéndose sincronizadamente.

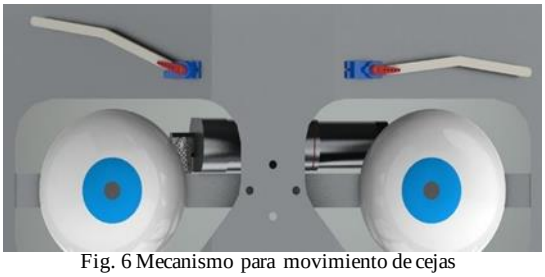


Fig. 6 Mecanismo para movimiento de cejas

El giro del cuello se realiza con la ayuda del mecanismo mostrado en la Figura 7, este mecanismo funciona con la ayuda de un sistema de transmisión por cadena (con una relación de transmisión 1:1) acoplado a un motor Nema 23, este mecanismo permite sincronizar el giro del motor con el giro de la cabeza.

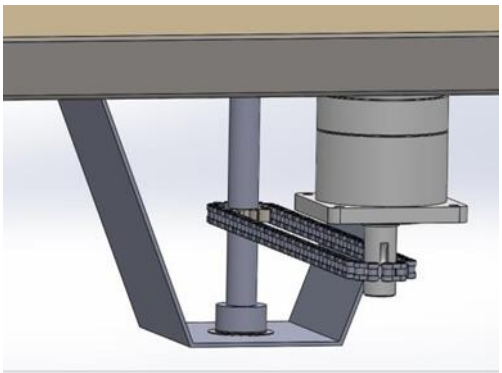


Figura 7. Diseño del mecanismo del cuello

A. Diseño electrónico

Para el diseño electrónico se desarrollaron tres tipos de circuitos de control, uno dónde se coloca el microcontrolador de la tarjeta Arduino® nano, para el control de las luces RGB, la máquina de humo artificial y la cejas. El otro circuito que se diseñó para el control de los actuadores lineales que realizaran los movimientos del animatrónico como los brazos, el cuello y los ojos. Por último, se diseñó el circuito para el sistema de seguimiento vocal. Estos tres circuitos se diseñaron sus respectivos circuitos PCB.

1. *Material y equipo*

En el diseño electrónico, se usó el software Proteus® 8.10, en el cual se realizaron los circuitos de control para los movimientos propuestos y se diseñaron las tarjetas PCB.

2. *Circuito de control principal*

El primer circuito diseñado está destinado al control general del animatrónico, ya que, en él se colocará la tarjeta de desarrollo Arduino nano que posee un microcontrolador Atmega328p, este posee 14 pines de entrada/salida digital, de los cuales 6 pines son PWM, y cuenta con un cristal 16MHz. En la Tabla 1 se muestra la distribución de pines utilizados. Este microcontrolador realizará todas las funciones, activará luces RGB, humo artificial, los movimientos principales y el sistema de seguimiento bocal. El diseño es presentado en la figura 8.

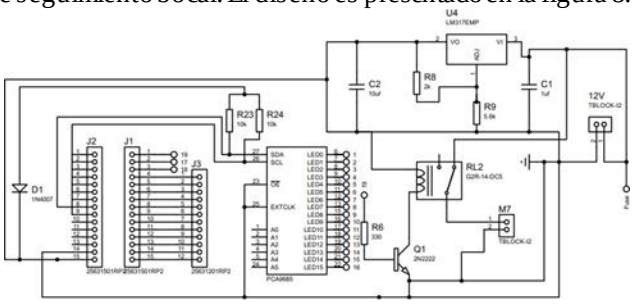


Fig. 8 Diagrama del circuito principal

3. *Circuito de potencia*

Para el control de los actuadores lineales se realizó un circuito tipo "puente H" compuesto principalmente por transistores Mosfet dónde se controla el sentido giro, la velocidad y el tiempo de acción en los actuadores. Figura 9.

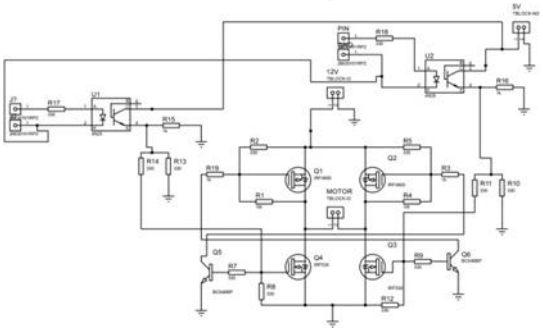


Fig. 9 Diagrama del circuito de potencia

4. *Circuito de seguimiento bocal*

Se diseñó el circuito de seguimiento vocal, que consiste en un arreglo de amplificadores operacionales y compuertas lógicas, que a través de la señal eléctrica de un micrófono que capta el sonido de alguna grabación, este circuito compara el voltaje esta señal y un voltaje de referencia de 5v, de esta forma se obtiene una señal digital sirve para activar el motor del actuador lineal que acciona el mecanismo de la boca. Figura 10.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

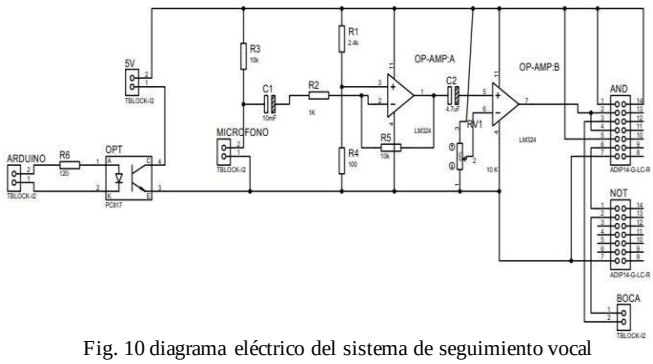



Fig. 10 diagrama eléctrico del sistema de seguimiento vocal

B. Diseño informático

1. Material y equipo

La programación se llevó a cabo en Arduino con lenguaje basado en C++, en el software Arduino® 1.8.13.

2. Diagrama de flujo

La programación comienza encendiendo las luces RGB en un determinado color y por medio de dos botones, de inicio y paro, que activa o desactiva el animatrónico, iniciando con la secuencia de movimiento y activando el sistema de seguimiento vocal y la máquina de humo.

La programación de los movimientos se describe a continuación:

- Cejas: esta función acciona dos micro servos que mueven a las cejas a una posición de 15° con una duración de 0.5 segundos.
- Ojos: esta función, activa el actuador lineal correspondiente a los ojos, esta recibe un parámetro de tipo entero para indicar la dirección del movimiento.
- Cuello: esta función el motor a pasos nema acciona al cuello a una posición de 45°, por medio de dos parámetros para el control del motor, uno para definir la dirección del motor y otro por medio de pulsos realiza los pasos del motor, las salidas están conectadas a un controlador de motor a pasos drv825.
- Brazos: primero activa los actuadores lineales de ambos brazos en sentidos opuestos durante 5 segundos, después de eso detiene durante 0.5 segundos y se activan nuevamente en sentido opuesto a como iniciaron durante 5s y por último desactiva los actuadores.

Por otra parte, están definidas algunas otras funciones, para control de las luces leds RGB, la máquina de humo y el sistema de seguimiento vocal.

Tabla 1 Pines utilizados para el control de animatrónico

| Elemento conectado | Pines del Arduino nano |
|---|---|
| Cuello (dirección y pulsos) | D11 y D12 |
| Ojos | D8 y D9 |
| Brazo derecho | D4 y D5 |
| Brazo izquierdo | D6 y D7 |
| Luces RGB (Multiplexor PCA9685) | A4 y A5 |
| Ceja derecha | Pin 15 del PCA9685 |
| Ceja izquierda | D10 |
| Máquina de humo | D13 |
| Botón de inicio | D2 |
| Botón de paro | D3 |
| Sistema de seguimiento vocal | A0 |

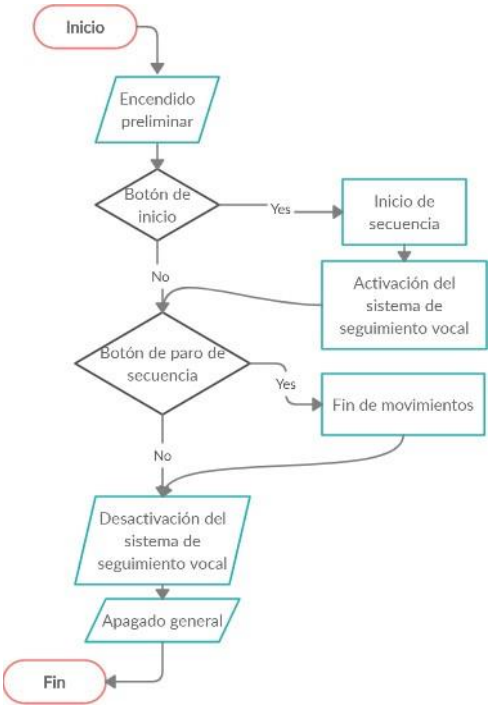



Fig. 11 Diagrama de flujo

C. Simulación

1. Simulaciones mecánicas

Por medio de software Ansys 19.2 se realizó un análisis de sensibilidad de malla para poder seleccionar los parámetros específicos con los que se trabajaran las simulaciones, se definió una sensibilidad de malla de 6 millones de elementos, ya que así, se asegura que los resultados serán los más cercanos a la realidad, estas simulaciones se muestran en las figuras 12,13 y 14.

Se analizó la deformación total y los esfuerzos cortantes de todos los mecanismos para la obtención de puntos críticos y fiabilidad del diseño.

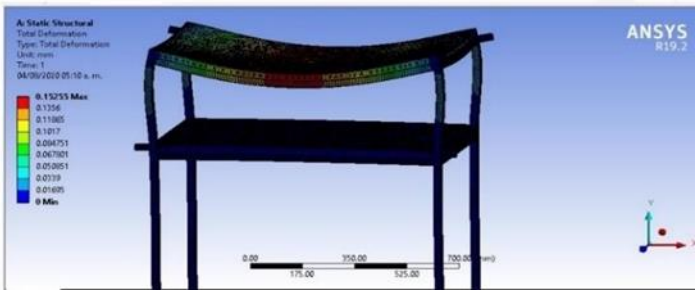



Figura 12 Simulación de esfuerzos en la base

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

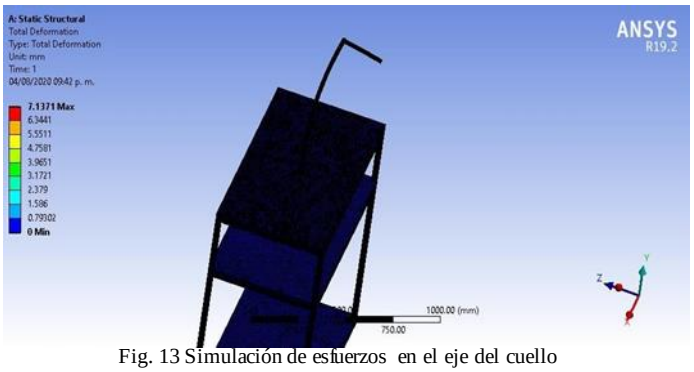



Fig. 13 Simulación de esfuerzos en el eje del cuello

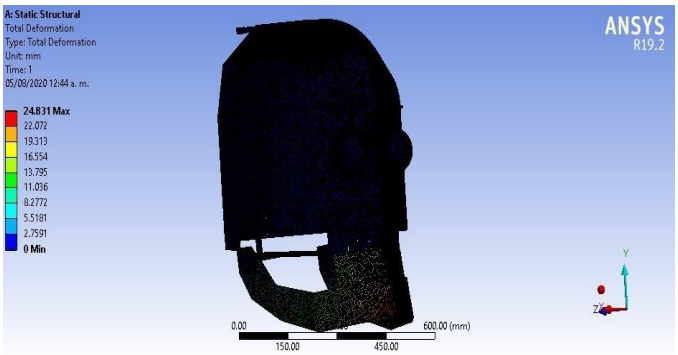



Fig. 14 Simulación de esfuerzos de la cabeza

2. Simulaciones electrónicas

Se realizaron pruebas de funcionamiento de los diferentes circuitos electrónicos, por medio del software de Proteus® 8.10. Se puso a prueba cada circuito a distintos voltajes y corrientes de alimentación dentro de los voltajes nominales indicados en la hoja de especificaciones de los componentes, esto con el fin de comprobar el funcionamiento de los circuitos en distintas condiciones de alimentación.

3. Simulaciones informáticas

Para comprobar el correcto funcionamiento de la lógica delfuncionamiento general de los sistemas electrónicos se simuló el código realizado por medio del software Proteus® 8.10, ya que permite simular el microcontrolador Atmega328p. En la Figura 17 se muestra la simulación de la programación. Se utilizó motores DC de 12v para representar los actuadores lineales de los brazos, ojos, y boca, el sistema de seguimiento vocal se representa por medio de un led rojo. Por último, se agregó un relevador de 5v a 120VAC para activar una lampara incandescente de 100W para representar la máquina de humo artificial.

En la simulación también se probó la correcta reacción de los botones de inicio y paro, para evitar que exista alguna latencia al presionar estos botones.

*A. Evaluación de simulaciones mecánicas*

De acuerdo con los resultados de las simulaciones de elemento finito, se tuvo como resultado que los puntos críticos del animatrónico son el soporte entre el cuello y cabeza, el punto de sujeción de la mandíbula, y el eje de rotación del cuello, ya que en estos puntos se encuentran la mayor concentración de esfuerzos cortantes y deformaciones máximas, se buscó en el diseño que todos los mecanismos cumplieran al menos dos sigma, que representa el factor de seguridad.

*B. Evaluación de simulaciones electrónicas*

Los resultados obtenidos en las simulaciones electrónicas indican que el voltaje de alimentación adecuado es de 12V a 3A corriente directa, ya que es un voltaje adecuado para la alimentación de los tres circuitos realizados, y además se agregó fusible de protección de 10A para evitar sobre cargas de corriente.

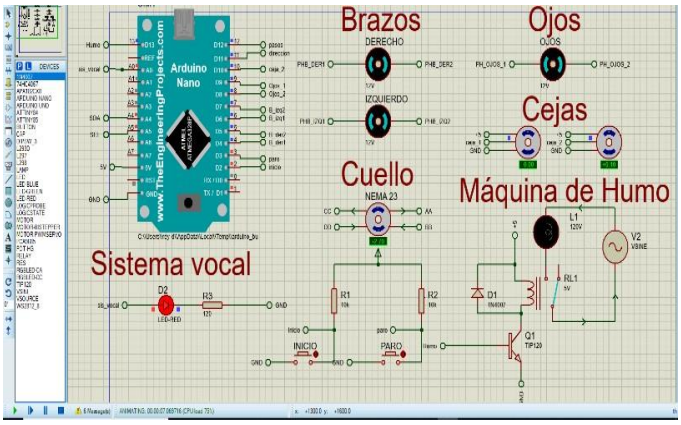



Figura 15 Simulación de funcionamiento lógico

*C. Evaluación de simulaciones informático*

Los resultados obtenidos en las simulaciones del funcionamiento lógico del animatrónico mostró un funcionamiento adecuado de los botones, ya que por medio de este se cumplió adecuadamente con la secuencia de los movimientos y la activación del sistema de seguimiento vocal y la máquina de humo artificial.

*D. Evaluación*

Una vez realizado las simulaciones correspondientes procedimos a realizar un análisis de los resultados para poder identificar puntos críticos o errores para poder mejorar el diseño.

## IV CONCLUSIÓN

Se diseñó un animatrónico con aspectos humanos dotado de sistemas locomotores para recrear movimientos realistas controlado por sistemas electrónicos y tarjeta de desarrollo.

El análisis mecánico demostró que los materiales como el aluminio y el acero son efectivos para realizar los elementos del animatrónico y pueden soportar su peso estimado en 93 kilogramos. Los resultados obtenidos a partir de la simulación, demuestran que, los circuitos de control y programación pueden realizar los movimientos de ojos, cuello, cejas, boca y brazos, además de lograr controlar la secuencia del sistema de ambientación bajo condiciones de obscuridad.

## V REFERENCIAS

[1]. Ros Gil Jorge, Julián Inglada Vicente. (2017) Desarrollo de un caso de estudio para la interacción entre humanos y robots móviles influida por las emociones. Universidad Politécnica de Valencia. España

[2]. Andrew Keisner, Julio Raffo, Sacha Wunsch Vincent. (Diciembre2016). Tecnologías revolucionarias: robótica y P.I. OMPI, 6, 6-12.

[3]. Reyder Reales, Zambrano Daniel, García Jesús. (25 de Julio 2019). Diseño de la estructura mecánica perteneciente al animatrónico del dinosaurio Laquintasaura. UIS Ingenierías. 18, 43-56.

[4]. Hernández Espinta C. Augusto, Manzi Bernal J. Alejandro, Ruiz Ramírez D. Arturo, Uricochea Yepes J. Carlos (2007) Diseño y construcción de un animatronico de movimiento facial, MIME FACE. Universidad de San Buenaventura. Bogota.

[5]. Gabriel Hernández Girbés, Victoria Torres Bosch (2016). EFECTOS VISUALES: Desarrollo y evolución a lo largo de la historia del cine. Universidad Politécnica De Valencia. España

[6]. Moreno Rincón R. Gómez Escandón J.L. Hernández Sol A. Zepeda Hernández J.A. García Ramos O.Y. Aguilar Castillejos A.E. (16 de Julio 2019). Diseño y construcción de un jaguar Animatronic. Revista Tecnológica Digital. 9, 55-66.

[7]. K. T. Ulrich, S. D. Epinger, R. V. Madrigal Álvarez. (2004). Diseño

y desarrollo de productos: enfoque multidisciplinario. México. McGraw-Hill.

[8]. J. D. B. IZÁCIGA, C. A. P. CORTÉS y S. C. M. TOLOZA, «Implementación de robots animatrónicos para terapias motivadoras de rehabilitación física en niños,» Espacios, vol. 38, nº 57, pp. 5-23, 2017.

[9]. Rafael De la Rosa Flores, «Prototipo de cabeza animatrónica de bajo costo, utilizando microcontroladores, servomotores y componentes 3d para aprender a manipular robots humanoides reales,» Pistas educativas, vol. 40, nº 130, pp. 12-27, 2018.

[10]. J. A. G. Ramírez, «Una metodología para la creación de personajes desde el diseño de concepto,» Iconofacto, vol. 12, nº 18, pp. 96-117, 2016.

[11]. R. y. S. B. Eady, «Sistema para controlar de forma remota un dispositivo animatrónico en un entorno de chat utilizando señales de control enviadas por un dispositivo remoto a través de Internet». Estados Unidos Patente 6370597, 9 abril 2002

[12]. P. Wieland, «Sistema y método de control distribuido de un espectáculo animatrónico interactivo». Estados Unidos Patente 8060255, 22 septiembre 2011.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Visual control based on ORB-SLAM for a drone

1st J. M. Ibarra Zannatha.
*Automatic Control Department*
*CINVESTAV*
Ciudad de México, México
jibarra@cinvestav.mx

2nd Pablo. Vera B.
*Electronics Department*
*Instituto Nacional de México*
Ciudad de México, México
pablo.vb@gamadero2.tecnm.mx

3rd Diego A. Bravo M.
*Physics Department*
*Universidad del Cauca*
Popayán, Colombia
dibravo@unicauca.edu.co

4th Michell. García M.
*Physics Department*
*Universidad del Cauca*
Popayán, Colombia
michellg@unicauca.edu.co

***Abstract*—This work presents the development of a visual control system that allows a multirotor drone to navigate in an environment in which there are several windows of unknown location that it must pass through. The proposed control system uses the well-known ORB-SLAM algorithm as a position sensor, that is, as a visual odometry. Measurements provided by ORB-SLAM lack scale, so it is necessary to implement a calibration system that allows interpreting these visual measurements relative to their equivalents in meters. The developed system was tested both in simulation and in a Bebop 2 drone, verifying that it fully meets the requirements.**

***Index Terms*—ORB-SLAM, Drone, Visual Control**

## I. Introduction

The last ten years have seen a rapid increase in the number and importance of applications of multirotor drones, motivated by the low price of these aircraft and by the great advantages it offers in a large number of applications, both civil and military. Thus, it is possible to find them in monitoring and supervision tasks, rescue tasks in disaster situations, courier tasks and goods delivery tasks, tasks of topographic surveys and photogrammetry, among many other, [1], [2], [3]. This has motivated the creation of various competitions, [4], [5], [6].

The rapid proliferation of multi-rotor drones is due to their advantages, such as offering better capacity to lift and transport objects than other aircraft, are simple to build at a low cost and small in size. Likewise, from the point of view of navigation, they are agile devices, with high maneuverability and low intervention of gyroscopic effects, in addition to being able to remain suspended in a fixed place (hovering).

It is in this context that we have been working both on the control of this type of aircraft, also known as MAV (Micro Aerial Vehicles), and on issues of visual perception. In particular, we are interested in competitions that take place in the academic field. Thus, the objective of this work is the development of a visual control system for the Parrot Bebop 2 (see Fig. 1), capable to carry out the windows competition event corresponding to the category of autonomous drones, or to navigate in a space cluttered by columns, another competition event of the Indoor category.

Fig. 1. Parrot Bepop 2.

The proposed visual control system, based on ROS, uses OpenCV for all the image processing and analysis tasks. The used drone is equipped with the manufacturer's controllers, then it will be enough to design simple proportional controllers for an external vision based control loop for the variables altitude (z-axis), azimuth (rotation around the z-axis) and for the frontal advances. (x-axis) and lateral (y-axis). The odometry used by these controllers is obtained from a standard ORB-SLAM algorithm, to which the scale calculation has been added. Finally, the detection and location of the windows or the columns is done by means of an own algorithm that we have called Visual-Lidar.

The objective of Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) is to make a map of the environment through which the camera moves, while itself is located on the map, currently there are different methods to give a solution, using different sensors such as LIDAR, sonars or monocular cameras, stereoscopic cameras or depth cameras (RGB-D), if the sensor is a camera these algorithms are known as Visual-SLAM (VSLAM).

These techniques have their origin in Structure From Motion (SFM), which consists in obtaining 3D positions from images of a scene, later visual odometry (VO) appear, one important difference between this method and the other one is that the images are sequentially and the movement of the camera is estimated in VO.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

During the time that VSLAM has been studied, different algorithms have emerged, among which we can mention ORBSLAM [7], PTAM [8], LSD-SLAM [9] and several others, they work based on the detection features, and the estimation of the pose is by Extended Kalman Filter (EKF) or particle filters. In particular ORBSLAM, uses the ORB algorithm [10] as a features detector, likewise the generated descriptor is robust to make the matching and tracking between different features from the images and the map, also the generated map is a point cloud where each point represents the feature's position in the 3D world, in general this algorithm is made up of 3 threads, one for generating the map, another for tracking points and a last thread for closing the loop which is in charge of verifying if it has been returned to a previous position, which will eliminate duplicate points and update the map. In reality, there are a large number of working groups in this area generating their own SLAMS, since at present the map for static environments can only be made with these techniques.

The rest of the paper is structured as follows: section II shows the strategies for the drone control, section III presents the ORB-SLAM algorithm. In section IV the visual lidar technique is defined, followed by the results in section V and concluding paragraph of the paper in section VI.

## II. Drone Control

The control of MAVs is not a simple matter if we take into account all the possible flight conditions encountered during the missions corresponding to their different applications and, above all, if the dynamic complexity of these aircraft is considered. First, the fact of having four rotors (case of the Bebop used in this work) requires a control loop for these rotors to ensure the thrust that each one of them provides and, in addition, the total thrust necessary for the different flight conditions: hovering, turns around the vertical axis by yaw, forward by pitch control, or lateral forward by roll control.

Once these basic control loops have been implemented, an external control loop is added to cope with the inconveniences such as dynamic coupling, the typical underacting, open-loop instability or that ensures robustness in presence of disturbances, basically winds. Although It can also be considered the forces of interaction of the drone with its environment and still consider that its perception system produces noisy signals. In this context, various control proposals have been reported in the literature such as PID type regulators, [11], [12] backstepping controllers, adaptive controllers, among others, which have shown satisfactory results addressing these problems, but also presenting some disadvantages according to the solution of control given.

Recently, we have been using the Active Disturbance Rejection Control or ADRC (Active Disturbance Rejection Control) approach to achieve better performance in autonomous drone navigation like is showed in Fig. 2, as it allows us to estimate and compensate, in real time, the effects of disturbances $\delta(t)$ to those that the drone is subjected to, as well as certain dynamics not considered during its modeling, in addition to the fact that it does not require the precise information of said model or of the disturbances thanks to its configuration based on ESO (Extended State Observer) canonical forms, [13].

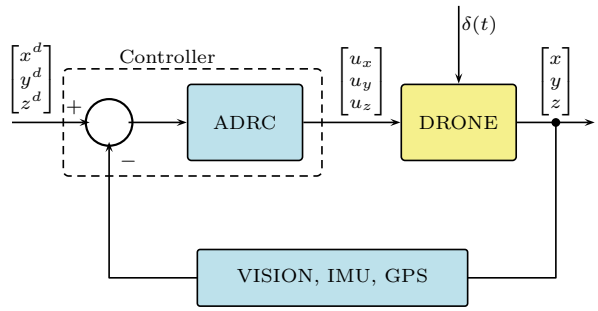



Fig. 2. Block diagram of proposed control system.

## III. ORB-SLAM

Although many drones have a GPS location system and an on-board Visual Odometry system, in most indoor applications there is no access to the GPS satellite system; while Visual Odometry in small format commercial drones, such as those used in our projects, is not very accurate or reliable, [14].

Hence the need to implement a system that calculates the current pose of the drone and generates geometric information about the unknown environment from images, that is, a VideoSLAM system, most widely used is the ORB-SLAM algorithm developed by researchers from Universidad de Zaragoza, Spain, who generously make the source code public. It is a feature-based monocular SLAM system capable of operating in real time in any type of environment whether small or large, both indoors and outdoors. It is quite robust, allows relocation and closing the loop with precision, and its initialization is completely automatic. ORB-SLAM has the classic features of any SLAM scheme: feature tracking, mapping, relocation and closing the loop (of the trajectories).

ORB-SLAM uses several recent highly efficient algorithms which allow it to achieve excellent performance. For example, the identification used for points tracking is done by ORB, and the points matching is done by means of a simple Hamming sum which helps a lot to its real time implementation. ORB-SLAM achieves unprecedented performance with respect to other state-of-the-art monocular SLAM approaches, [15].

ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) is an algorithm for the detection and identification of keypoints based on binary methods, as opposed to the classic methods, such as SIFT, based on the calculation of the gradients and with identifiers based on the histogram of these gradients that, although they

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

are very robust are also very slow, [16]. ORB calculates the corneress of a pixel by simple analysis of the gray levels that surround it (FAST algorithm). The highly desirable rotational invariance is achieved using the method applied by the binary detection and identification algorithm called BRIEF (Binary Robust Independent Elementary Features), [17].

## IV. Visual Lidar

As is known, the Lidar generates a set of vectors $(\rho, \theta)$ where $\rho$ is the distance between the sensor and an obstacle measured at the angle $\theta \in [-\pi, \pi]$. This sensor has been used in SLAM algorithms due to the simplicity with which information about the environment is obtained. It would be desirable to have a sensor of this type in drones but they are very expensive and heavy, so cameras must be used, which are light and very cheap.

For this reason, a visual algorithm was designed that encodes a horizontal line in the center of the image in a set of vectors, $(\rho, \theta)$ with $\theta \in [-\alpha, \alpha]$. Where $\alpha$ corresponds to half the horizontal opening angle of the camera, in turn a function of the focal length. In this system there will be as many vectors as there are pixels in the horizontal line considered.

With this algorithm it is possible to calculate the distance at which a cylindrical column of known diameter is found by a simple rule of three. It is also easy to calculate the direction in which the center of a window is, where the drone should pass. For this last task, the Visual-Lidar information is complemented with the detection of the vertical parts of the window frame by a method that we call the bubble, which consists of detecting all the vertical lines that make up the window frame. closest, with which the position and/or orientation command can be calculated for the drone controllers. This is illustrated in Figure 3.

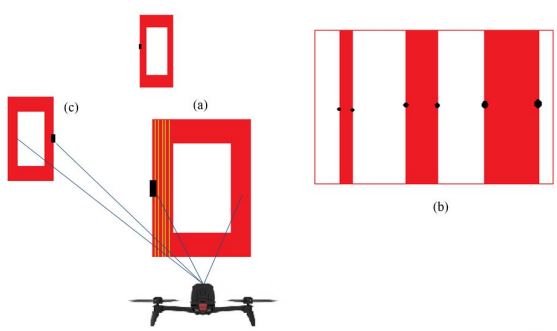



Fig. 3. Visual Lidar with Parrot Bepop 2.

### A. Windows'Algorithm

This work is about to autonomus drone capable of identify and go across windows, in a static environment, for them we use two algorithm one for the control and another for windows' detection. The Windows detection algorithm is described below. This algorithm works similar to a lidar, which works as follows and the corresponding flow diagram is shown in the figure 4:

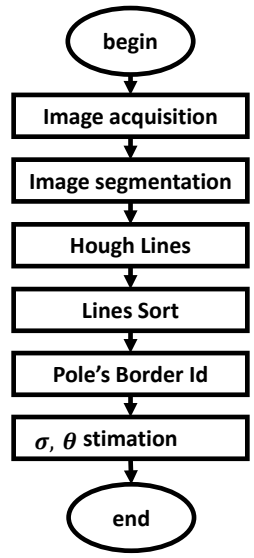



Fig. 4. VLIDAR Algorithm.

- Segment the image obtained by the drone in the HSV color space, this color space allows the identification of the window in the event of some lighting changes,
- On the segmented image an identification of vertical lines is made by Probabilistic Hough algorithm included in the openCV library.
- The identified lines are sorted from left to right.
- Identification of the beginning of the edge of the post and the edge where it ends, for each of the detected posts
- The distance $\rho$ at which the pole is with respect to the camera width is estimated taking into account the relationship between the width in pixels and the width in meters of the pole
- The angle $\theta$ between the optical axis and the center of de pole is estimated
- Finally returns the polar coordinates of each of the detected poles.

Once all the posts have been identified, this information is returned to the main program (see the figure in which the flow diagram is shown in figure 5) which is in charge of determining which are the two closest poles, assuming that they represent the closest window, with this information the center of the window is calculated which will be the final position command for the chosen path, and which will be followed by the controller described previously, in which the feedback sensor is ORBSLAM, however, a scale adjustment must be made between both systems of reference to ensure correct tracking of the trajectory.

Finished, the algorithm steps are repeated in the search for a new window.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

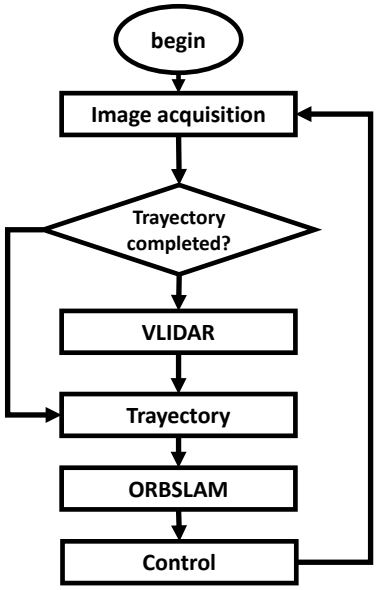
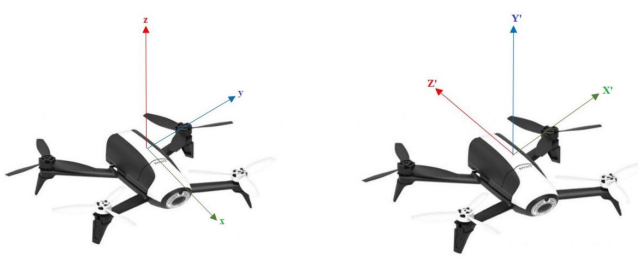



Fig. 5. Main Algorithm.

## V. Experimental Results

### A. Scaled reference systems

This part shows the experiment's results carried out to find out how the drone's movement is in the $X$, $Y$, $Z$ axes for the different reference frames and to be able to give a scale factor that relates them in the same way, taking the data obtained by transformation of coordinates, Fig. 6 is obtained. The 10 data used in the sample space were enough to make the corrections in the reference scale, this avoids initializing the ORBSLAM many times for both environments and for it to render us the drone battery in the physical environment tests.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

Fig. 6. Transformation of the ORBSLAM reference coordinates to the bebop drone.

### B. Virtual environment

For the test in the virtual environment the `Bebop-control.py` algorithm was used in the interface you can add values in $x$, $y$, $z$ axis as shown in Fig. 7, so it is given a point of displacement in each coordinate $X$, $Y$ obtaining as a result a trajectory within the simulation, for the gazebo reference each frame measures 1 meter. The distance is labeled in $X$ with the program and with respect to what the drone moves within the virtual environment, each frame is counted from the starting point in order to measure the distance within the Gazebo reference.

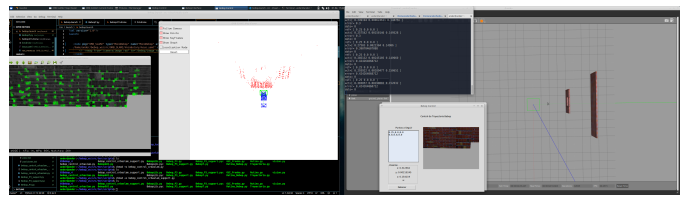


Fig. 7. Testing together with the ORBSLAM and the algorithm. As shown in the image in the program interface, two points were assigned in X, Y and Z coordinates, on the left side is the interface that generates the ORBSLAM together with the mapping of the place (red points) and the drone displacement (squares blue) likewise in the gazebo environment its displacement is visualized.

Finally, making use of a relationship, the resulting scale factor for each respective axis is: $X = 3$ and $Y = 6$. It should be noted that it was not done for the $Z$ axis since a constant value is taken.

### C. Physical environment

For this other test in the physical environment, the Bebop-control.py algorithm was also used, a procedure similar to that of the virtual environment was made, but in this part the drone is placed in an initial reference point and the displacement measurement is done with one meter, then to obtain the result of the scale factor, a relation is used for $X = 1.82$ and for $Y = 1.43$.

**Relative scale factor equation:** $r = \dfrac{||X_{k-1,i} - X_{k-1,j}||}{||X_{k,i} - X_{k,j}||}$

Is important to make a transformation of the ORBSLAM coordinates to those of the drone, for this a multiplication with rotational matrices was made and the change is obtained as shown in the figure 8.

To obtain the ORBSLAM mapping in principle to initializa it the drone camera needs to visualize objects that have texture, in the virtual environment, 3 brick windows were used and in the physical environment, fuchsia colored paper windows and background bushes, which also helped because of their texture in the initialization of the system. As presented in Fig. 8 we can observe the ORBSLAM identifying the windows while doing the tests to find the scale factor of the $X$ and $Y$ axes.

Using the Lidar algorithm and the ORBSLAM in Fig. 9, it can be seen that the drone effectively does the general mapping and tracking of the trajectory efficiently.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

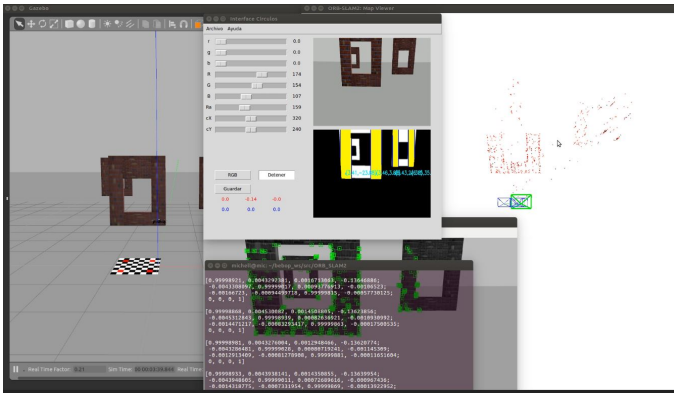


Fig. 8. Testing together with the ORBSLAM and the algorithm. RGB bars can be viewed on the interface to perform segmentation, then we proceed to click on the start button and is observed that the selection of the window appears in yellow and its coordinates within the interface. The window posts have been selected in yellow, rectifying that the VLIDAR program works correctly and the coordinates of the selected posts are observed in the terminal.

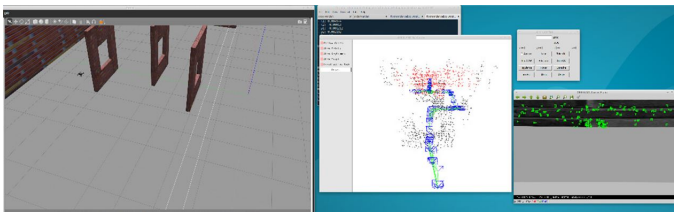


Fig. 9. Final result of the test in the virtual environment. Within the ORBSLAM interface the blue squares show the location of the drone, is observed that in principle it detects the window but first it advances with the controller in $X$, after crossing the window it continues to the second using the controller in $Y$ and repeat the procedure with the following one, when performing the entire trajectory is evidenced that the drone does it correctly as expected, this proves that the general algorithm works.

In this test to initialize the ORBSLAM, i'ts decided to place a single window (due to lack of space) in front of some bushes since they have a lot of texture and this is of vital importance since it allows initializing with the characteristic points or *keypoints* and later relate to generate the map likewise the drone is placed 4 meters away with respect to the window in an open space, therefore the lighting had to be taken into account to be able to do the segmentation, that is, every hour and a half What was happening, the parameters had to be recalibrated so that the ORBSLAM would detect the points, is important to mention that the HSV plane was better worked on, another factor was the wind that affected the trajectory, so the heuristic method was used for the gains. For example, there is a strong wind, the drone is carried away in the direction from which it comes, then so that this does not happen, it must be compensated but without placing a gain so high that it causes oscillations in the drone. The saturation used in this test was 10 cm/s so that the drone was not so fast in the trajectory and in case it did not make it correct, turn it off before any collision. For reasons unrelated to the project, the experimental test could only be done with one window and not with three as proposed in the virtual environment, despite this and external factors such as color intensity changes, in the Figures 10, 11 it can be seen that the drone efficiently makes the selection of poles of the object along with the necessary trajectory for it and manages to go through that single window.

Fig. 10. Front view before the drone starts the trajectory. Initially the drone is in an open space and a static environment (that hasn't movement, I mean the objects arranged in space have no movement) later it takes off at the Z coordinate with a constant value, then the ORBSLAM is initialized by That is why the drone is positioned in front of the object of interest with the texture of the window and also that of the bushes, therefore it initializes the algorithm.

In the first stage the drone initializes the ORBSLAM, then within the algorithm it proceeds to perform the segmentation of the image it receives and then the detection of poles then the drone when positioned in front of the window initializes the LIDAR algorithm makes the selection of poles and gets what it takes to get closer to the center of the window. Is observed how the drone makes the path to the window, recalculating the center of the window at each approach to pass through it.

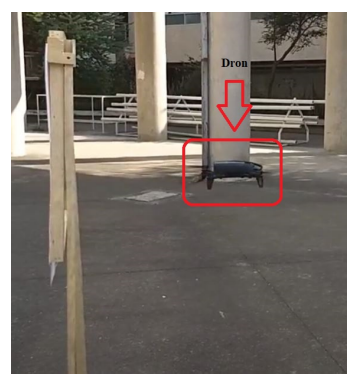



Fig. 11. Perpendicular view final result of the test. In the image we can see that finally the drone goes through the window.

Finally, it successfully manages to go through the window and the drone remains in a cycle to recalculate the trajectory, however, since there are no and only bushes, it remains in a static state.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## VI. Conclusions

In this project, a control proposal was designed to support the decision making of the drone and the feedback of the ORBSLAM generating the trajectory satisfactorily, furthermore in the real environment, the movement and orientation of the drone presents dampened responses with an acceptable level considering that the quadrotors are frequently subject to disturbances from gusts of wind or other environmental conditions. In the other hand, this project has a disadvantage and that is that each time ORBSLAM is initialized, the scale factor must be varied within the `bebop-control-slam.py` program.

The performance of the drone in a physical environment based on the segmentation process becomes complex due to the possible changes in lighting in the place and also at the time of day. The HSV color space is more robust to variations in brightness in the segmentation process. Excellent feedback is evidenced in the system from the use of coordinates of the ORBSLAM system since the transformation of matrices works correctly.

## Acknowledgment

This work was developed in the Robotics and Artificial Vision Laboratory of CINVESTAV, México. The authors would like to recognize and express their sincere gratitude to CINVESTAV and Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA) for the financial support granted during this project.

## References

[1] L. Jayatilleke and N. Zhang, "Landmark-based localization for unmanned aerial vehicles," in *Proc. IEEE Int. Systems Conf. (SysCon)*, Apr. 2013, pp. 448–451.

[2] M. A. Ma'sum, M. K. Arrofi, G. Jati, F. Arifin, M. N. Kurniawan, P. Mursanto, and W. Jatmiko, "Simulation of intelligent unmanned aerial vehicle (UAV) for military surveillance," in *Proc. Int. Conf. Advanced Computer Science and Information Systems (ICACSIS)*, Sep. 2013, pp. 161–166.

[3] A. Koubâa, B. Qureshi, M.-F. Sriti, A. Allouch, Y. Javed, M. Alajlan, O. Cheikhrouhou, M. Khalgui, and E. Tovar, "Dronemap planner: A service-oriented cloud-based management system for the internet-of-drones," *Ad Hoc Networks*, vol. 86, pp. 46–62, 2019.

[4] J. Ramos, D. Safadinho, R. Ribeiro, and A. M. d. J. Pereira, "Service oriented platform for drones competition," in *2018 2nd International Conference on Technology and Innovation in Sports, Health and Wellbeing (TISHW)*, 2018, pp. 1–6.

[5] D. Kim, H. Ryu, J. Yonchorhor, and D. H. Shim, "A deep-learning-aided automatic vision-based control approach for autonomous drone racing in game of drones competition," ser. Proceedings of Machine Learning Research, H. J. Escalante and R. Hadsell, Eds., vol. 123. Vancouver, CA: PMLR, 08–14 Dec 2020, pp. 37–46. [Online]. Available: http://proceedings.mlr.press/v123/kim20b.html

[6] E. Kaufmann, M. Gehrig, P. Foehn, R. Ranftl, A. Dosovitskiy, V. Koltun, and D. Scaramuzza, "Beauty and the beast: Optimal methods meet learning for drone racing," in *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2019, pp. 690–696.

[7] R. Mur-Artal, J. M. M. Montiel, and J. D. Tardós, "Orb-slam: A versatile and accurate monocular slam system," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 5, pp. 1147–1163, 2015.

[8] G. Klein and D. Murray, "Parallel tracking and mapping for small ar workspaces," in *2007 6th IEEE and ACM International Symposium on Mixed and Augmented Reality*, 2007, pp. 225–234.

[9] J. Engel, T. Schöps, and D. Cremers, "Lsd-slam: Large-scale direct monocular slam," in *Computer Vision – ECCV 2014*, D. Fleet, T. Pajdla, B. Schiele, and T. Tuytelaars, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2014, pp. 834–849.

[10] E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, and G. Bradski, "Orb: An efficient alternative to sift or surf," in *2011 International Conference on Computer Vision*, 2011, pp. 2564–2571.

[11] Q. Jiao, J. Liu, Y. Zhang, and W. Lian, "Analysis and design the controller for quadrotors based on pid control method," in *2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, 2018, pp. 88–92.

[12] M. Nguyen Duc, T. N. Trong, and Y. S. Xuan, "The quadrotor mav system using pid control," in *2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, 2015, pp. 506–510.

[13] S. M. Orozco-Soto, P. Vera-Bustamante, and J. M. Ibarra-Zannatha, "ORB-SLAM based active disturbance rejection control for quadrotor autonomous flight," in *2018 XX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob)*. IEEE, sep 2018.

[14] M. Dor and P. Tsiotras, "Orb-slam applied to spacecraft non-cooperative rendezvous," in *2018 Space Flight Mechanics Meeting*, 2018, p. 1963.

[15] R. Mur-Artal, J. M. M. Montiel, and J. D. Tardós, "Orb-slam: A versatile and accurate monocular slam system," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 5, pp. 1147–1163, 2015.

[16] E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, and G. Bradski, "Orb: An efficient alternative to sift or surf," in *2011 International Conference on Computer Vision*, 2011, pp. 2564–2571.

[17] M. Calonder, V. Lepetit, C. Strecha, and P. Fua, "Brief: Binary robust independent elementary features," in *Computer Vision – ECCV 2010*, K. Daniilidis, P. Maragos, and N. Paragios, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 778–792.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Gait Synthesis and Biped Locomotion Control of the HRP-4 Humanoid

Santos M. Orozco-Soto
*Automatic Control Department*
*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*
Mexico City, Mexico
sorozco@ctrl.cinvestav.mx

Juan M. Ibarra-Zannatha
*Automatic Control Department*
*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*
Mexico City, Mexico
jibarra@cinvestav.mx

Abderrahmane Kheddar
*Robotics Department*
*Laboratoire d' Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier*
Montpellier, France
kheddar@lirmm.fr

***Abstract*—The aim of this paper is to present all the phases needed by a humanoid to perform bipedal locomotion, from walking pattern generation to joint control, passing through kinematic and dynamic modeling. All these phases are applied to the HRP-4 humanoid for simulation experiments. Amongst the different gait pattern generation methods, the 3D LIP method is chosen, while to obtain the inverse kinematic model the geometric approach is applied, and the classical Euler-Lagrange method is implemented to derive the dynamics of the planar (Sagittal) biped walking. A feedback linearization control was developed for joint references tracking. Finally, simulation results are obtained to analyze the performance of designed controllers.**

***Index Terms*—Biped walking, humanoid robots, gait synthesis, HRP-4 robot**

## I. Introduction

The most important task that a humanoid robot must perform is walking, since it is allows the robot to navigate within environments designed for humans and to reach places to perform other tasks. For such reason, biped walking has been studied by roboticists for several years, achieving important advances that make the current humanoids to walk steadily despite the terrain conditions. There is a vast literature available regarding biped walking [1], nevertheless, a report that contain all the required information in a compact concise format is hard to find. In this context, the aim of this work is to present all the steps required to lead a humanoid robot to walk. First, a walking pattern generation must be chosen and executed to have a set of trajectories in the Cartesian space, which must attain a stability criterion in the context of humanoid balance; then, the joint trajectories must be computed using the information supplied by the walking pattern generation by means of the inverse kinematics of the legs; such joint trajectories are the references for a closed loop controller that guarantees the asymptotic tracking and, consequently, the accomplishment the robot walking. All those mentioned phases are resumed in Figure 1 and, in this work, they are also described in the same order with its application to the HRP-4 humanoid robot. The walking pattern generation presented is the three-dimensional linear inverted pendulum (3D LIP), which is helpful to supply smooth Cartesian trajectories that, followed correctly, ensure the stable biped walking [2]. Regarding the humanoid modelling, the inverse kinematics equations of the legs were obtained using a geometric approach, and the dynamics were derived by the well-known Euler-Lagrange methodology. Finally, a feedback linearization control and its stability analysis were developed to track the desired joint trajectories. As mentioned above, all the presented techniques were implemented in the HRP-4 humanoid model, using the Robotics Operating System (ROS) and the Chorenoid and RViz simulation environments with successful results.

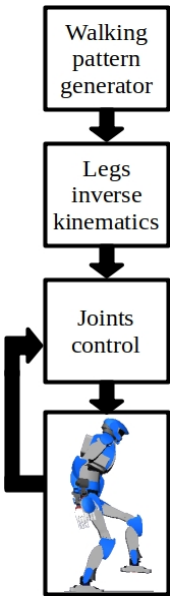



Fig. 1. Block diagram of the biped walking task.

## II. Walking Pattern Generation

The control for the biped locomotion starts with a walking pattern generation; the 3D LIP approach is chosen to develop the Cartesian trajectories of the hip and the ankles for its later use in the development of the joints trajectories using the inverse kinematics of the legs. The the total Center of Mass (CoM) is named, in this work, indistinctly as hip, only for the case of 3D LIP motion, since it is assumed that the total

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

mass of the humanoid is concentrated at such point, which is attached to a massless prismatic joint, as can be appreciated in Fig. 2, that rotates freely about a supporting point representing the ankle joint during the single support phase [3]. The motion of the CoM at $x$ and $y$ directions is constrained by the plane $z = k_x x + k_y y + z_c$; since the motion is consider purely horizontal, then the slopes are $k_x \equiv k_y \equiv 0$. Hence, the 3D LIP dynamics is given by:

$$\ddot{x} = \frac{g}{z_c}x + \frac{u_x}{mz_c} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = \frac{g}{z_c}y + \frac{u_y}{mz_c} \tag{2}$$

Where $g$ is the gravity acceleration, $m$ is the total mass of the humanoid, $(x, y, z_c)$ is the CoM motion Cartesian coordinate and $(u_x, u_y)$ are the control inputs incoming from *roll* and *pitch* torques from the ankle; however, such torques are very limited to stabilize the whole humanoid, so they are not considered [3]. In order to perform the walking pattern, the 3D LIP dynamics equations (1) and (2) are integrated yielding a *walking primitive* with saddle point behavior. A *walking primitive* is a piece of a 3D linear inverted pendulum trajectory, which is symmetric about $y$ axis and it is defined within the period $[T_0, T_{sup}]$, where $T_{sup}$ is the duration of the supporting phase. Such *walking primitive* describes the Cartesian trajectory of the CoM from a point $(-\bar{x}, \bar{y})$ to $(\bar{x}, \bar{y})$. A set of walking primitives is called a *walking trajectory* and, for each step of the humanoid gait, the following initial conditions to solve (1) and (2) must be stated:

- Initial position in $x$:

$$\bar{x}^{(n)} = S_x^{(n+1)}/2 \tag{3}$$

- Initial position in $y$:

$$\bar{y}^{(n)} = (-1)^n S_y^{(n+1)}/2 \tag{4}$$

- Initial velocity in $x$:

$$\bar{v}_x^{(n)} = \bar{x}(C+1)/T_c S \tag{5}$$

- Initial velocity in $y$:

$$\bar{v}_y^{(n)} = \bar{y}(C-1)/T_c S \tag{6}$$

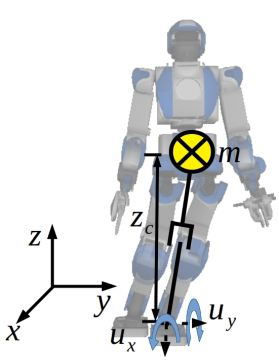



Fig. 2. Humanoid represented as a 3D LIP system.

Where $S_x^{(n+1)}$ is the length of the step, $S_y^{(n+1)}$ is the width of the step, $C \triangleq \cosh(T_{sup}/T_c)$, $S \triangleq \sinh(T_{sup}/T_c)$, $z_c$ is the desired CoM height along the trajectory and

$$T_c = \sqrt{z_c/g} \tag{7}$$

Finally, the initial conditions to solve (1) and (2) are:

$$\mathbf{x}_0^{(n)} = (-\bar{x}^{(n)}, \bar{v}_x^{(n)}, \bar{y}^{(n)}, -\bar{v}_y^{(n)}) \tag{8}$$

It worths to consider the following remarks for a suitable walking pattern (trajectory) generation [3]:

- **Remark 1.** In order to perform a continuous CoM trajectory, and consequently, continuous joint trajectories, the length of steps should be based on the size of the legs of the humanoid robot.
- **Remark 2.** The walking primitives only depend on the initial conditions of position and velocity, since the 3D LIP moition is generated intrinsically by its unstable saddle-point nature, so that, no control inputs supplied by the ankles are required.

Hence, integrating (1) and (2) along $[-T_{sup}/2, T_{sup}/2]$ with initial conditions (8) yields the following hip (CoM) trajectory of the humanoid robot to perform a step:

$$\begin{bmatrix} x_h(k) & y_h(k) & z_c(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times 3} \tag{9}$$

Where $k$ is the number of samples within the integration time interval. The Cartesian trajectories of the swing ankle can be computed using [5]:

$$x_a(k) = \bar{x}\sin\left(\frac{\pi k T}{T_{sup}}\right) \tag{10}$$

$$z_a(k) = \frac{H_s}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{2\pi k T}{T_{sup}} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{11}$$

Where $kT$ is the time at sample $k$ and $H_s$ is the maximum height of the swing foot, which can be found below in Fig. 7, with the other step parameters mentioned above. Such step parameters for equations (3), (4), (5) and (6) are shown in Table I, which were taken from the specifications of the HRP-4 humanoid [15]. The resulting walking primitive for $x$ motion can be appreciated in Fig. 3, where both desired position and velocity trajectories of the hip in the Sagittal plane can be appreciated. Furthermore, Fig. 4 shows the position and velocity desired trajectories for the hip in $y$ direction. Additionally, considering the equations (10) and (11), the desired position trajectories of the ankle in $x$ and $z$ directions are depicted in Fig. 5. The Cartesian-space trajectories of the hip and the ankle are displayed in Fig. 6.

TABLE I
STEP PARAMETERS FOR 3D LIP WALKING PATTERN GENERATION.

| Parameter | Symbol | Value | Units |
|---|---|---|---|
| Height of the CoM | $z_c$ | 0.65 | m |
| Half step width | $H_s$ | 0.1 | m |
| Half step length | $D_s$ | 0.15 | m |
| Single support phase time | $T_{sup}$ | 0.5 | s |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

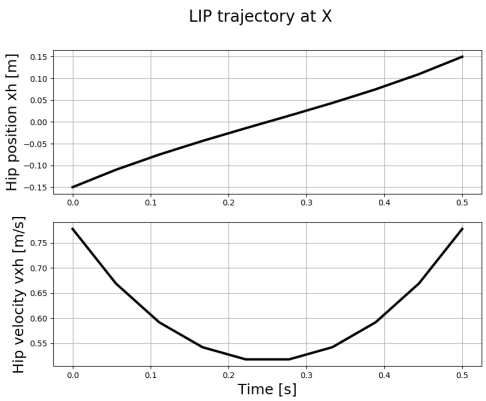



Fig. 3. Desired position and velocity trajectories of the hip (CoM) in $x$ direction.

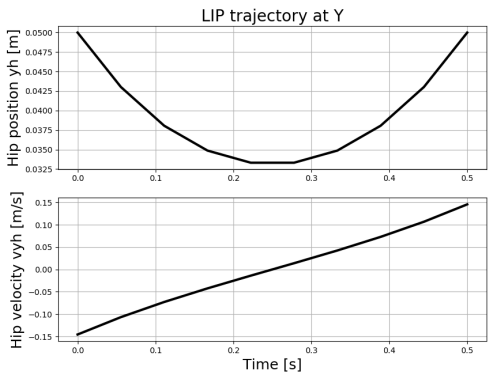



Fig. 4. Desired position and velocity trajectories of the hip (CoM) in $y$ direction.

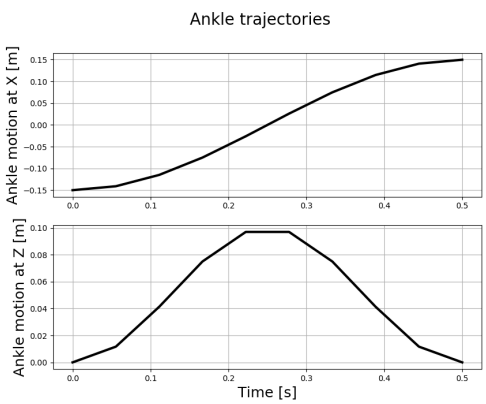



Fig. 5. Desired position trajectories of the ankle in $x$ and $z$ directions.

## III. Kinematics and Dynamics of HRP-4 Humanoid

In the last section, the problem of developing Cartesian trajectories for the hips, knees and ankles to perform a bipedal gait was addressed. Such Cartesian trajectories must be transformed into joint trajectories that are going to be tracked by the

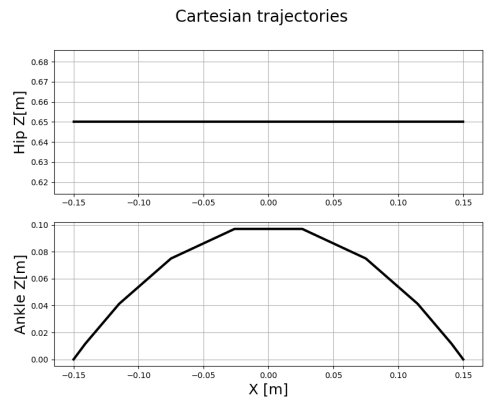



Fig. 6. Desired Cartesian trajectories for the hip (CoM) and the ankle.

local joint controllers, using the inverse kinematics equations. Furthermore, the dynamics of the humanoid robot is useful for control synthesis and to perform numerical simulations.

### A. Inverse Kinematics for Biped Walking

The problem of determining the most appropriate joint motions for humanoid robots under a given set of motion-task constraints is a difficult task [4]. Humanoid roboticists have developed analytical geometric methods [2], [5], but some others prefer computational approaches such as Extended Jacobian integration [6], multiobjective optimization [7], or prioritized tasks [8]. In this work, the geometric approach presented in [5] was preferred, since the only desired task for the humanoid is to walk. First, the swing leg desired angles are computed, followed by the support leg joints equations. In this context, consider Fig. 7 c), the first desired joint angle that is computed is the right ankle *roll* by means of the expression:

$$q_8^d = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{y_h - \bar{y}}{z_c}\right) \tag{12}$$

Where $\bar{y}$ can be computed using (4). Continuing with the swing leg, behold Fig. 7 a) to compute the ankle *pitch* as follows:

$$q_1^d = -\left(\pi - \alpha - \gamma_2\right) \tag{13}$$

Where $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_0^2 - l_2^2}{2 l_0 l_1}\right)$, $\gamma_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x_h - x_a}{z_c - z_a}\right) + \frac{\pi}{2}$ and $l_0 = \sqrt{\left(x_h - x_a\right)^2 + \left(z_c - z_a\right)^2}$. Notice that $x_h, x_a, z_h$ and $z_a$ are time-depending trajectories, hence the joint angles must be computed for each value of such functions at each sample within the trajectory period. Then, the swing knee angle is given by:

$$q_2^d = \cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + l_1^2 - l_0^2}{2 l_1 l_2}\right) \tag{14}$$

The swing-leg hip *pitch* can be computed using:

$$q_5^d = -\left(\pi - \beta - \gamma_1\right) \tag{15}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Where $\beta = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + l_1^2 - l_0^2}{2l_1 l_2}\right)$ and $\gamma_1 = \pi - \gamma_2$. Then, observing Fig. 7 c), the swing-leg hip *roll* can be obtained by:

$$q_9^d = \pi - q_8^d \tag{16}$$

Continuing with the support leg, from the frontal plane can be observed that:

$$q_6^d = q_8^d \tag{17}$$

Considering now Fig. 7 b), the support-leg knee angle is derived by:

$$q_4^d = \cos^{-1}\left(\frac{l_{0_L}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) \tag{18}$$

Where $l_{0_L} = \sqrt{x_h^2 + z_h^2}$. In addition, support-leg hip *pitch* can be obtained by means of:

$$q_3^d = -\left(-\alpha_L + \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 - l_{0_L}^2 - l_2^2}{-2l_{0_L} l_2}\right)\right) \tag{19}$$

Where $\alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{x_h}{z_h}\right)$. Hence, the support-leg ankle *pitch* can be computed as follows:

$$q_7^d = q_4^d - q_3^d \tag{20}$$

Finally, from Fig. 7 c) it can be seen that:

$$q_{10}^d = q_9^d \tag{21}$$

Solving equations from (12) to (21) yields the desired joint trajectories for the humanoid legs. The parameters of the robot used for the inverse kinematics solution are listed in Table II. Fig. 8 shows the resulting desired joint trajectories for the support-leg joints in Sagittal plane. The desired joint trajectories for the swing-leg are depicted in Fig. 9, and finally, the desired trajectories of the ankles and hips for the frontal plane joints are presented in Fig. 10. Those desired joint trajectories feed the closed-loop control input that ensure the asymptotic tracking of such joint trajectories and, consequently, yield the accomplishment of the walking task.

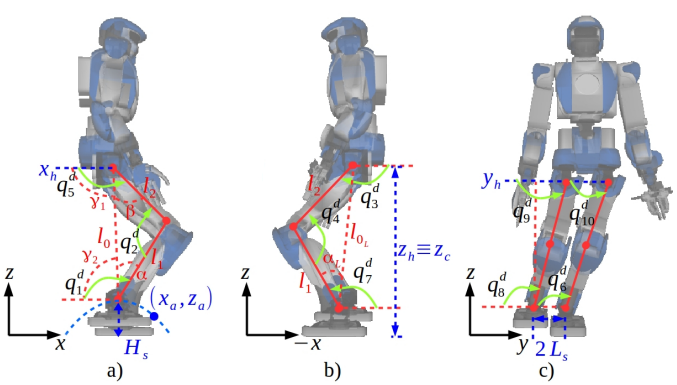



Fig. 7. Sagittal and frontal planes of a humanoid robot with the useful geometric parameters to derive the inverse kinematics.a) Right-side Sagittal plane. Both step parameters and geometric parameters of the robot can be appreciated. b) Left-side Sagittal plane showing step and geometric parameters. c) Frontal plane, where both step and geometric parameters are depicted.

## B. Dynamics of Planar Biped Walking

One of the most used methodology to derive the dynamics equations for robotic systems is the Euler-Lagrange approach, which has been widely used for manipulators compound by

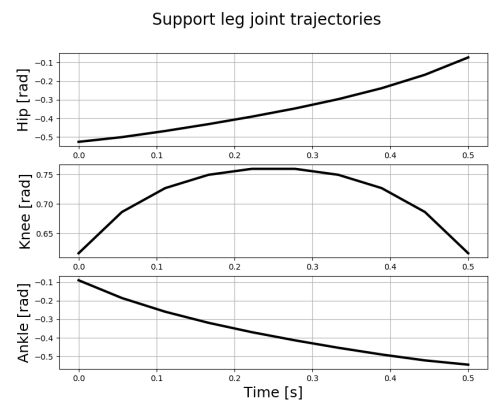



Fig. 8. Desired position trajectories for the hip, knee and the ankle *pitch* angles for the support leg.

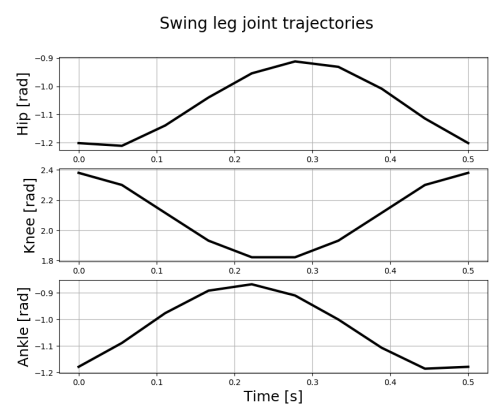



Fig. 9. Desired position trajectories for the hip, knee and the ankle *pitch* angles for the swing leg.

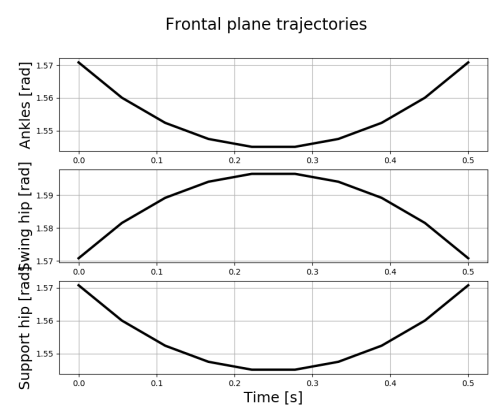



Fig. 10. Desired position trajectories for both ankles *roll* angles, swing hip and support hip *roll* angles.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

several degrees of freedom (DOF) with successful results. For the case of the humanoid robots dynamics, deriving the equations of motion using this energy-based technique can be more difficult than for manipulators, since humanoids are compound by more DOF in arborescent kinematic chains. Nevertheless, in order to obtain the humanoid's equations of motion using the Euler-Lagrange methodology, some authors perform an approximation of the upper limbs, head and trunk of the humanoid into a single link called *torso*, therefore, the lower limbs are modeled as a planar biped from 3 DOF [9], up to 7 DOF [10], but yielding equations of motion from such approximations is still challenging. To simplify the development of the equations, some authors have followed a convention to measure the angles of the links respect to the $y$ axis of the world frame [11], however, some later transformation are required to map the generalized coordinates of such model to the variables of local joints.

In this work, the direct equations of motion were obtained considering the local joint angles as is depicted in Fig. 11, where the joint angle convention and the dynamics parameters can be appreciated. The equations of motion of the biped robot are developed considering it as a 5 rigid-link manipulator with fixed base at the point of the step [12]; such equations of motion can be written as:

$$M(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q}) = \mathcal{H}(\varsigma)\tau \tag{22}$$

Where $M(q) \in \mathbb{R}^{5\times5}$ is the inertial forces matrix, $b(q) \in \mathbb{R}^5$ is the bias vector including centripetal, Coriolis and gravitational forces, $\tau \in \mathbb{R}^6$ is the control torques vector and $\mathcal{H}(\varsigma) \in \mathbb{R}^{5\times6}$

TABLE II
HUMANOID ROBOT KINEMATIC PARAMETERS FOR INVERSE KINEMATICS SOLUTION.

| Parameter | Symbol | Value | Units |
|---|---|---|---|
| support shank | $l_1$ | 0.34 | m |
| support thigh | $l_2$ | 0.36 | m |
| swing thigh | $l_3$ | 0.36 | m |
| swing shank | $l_4$ | 0.34 | m |

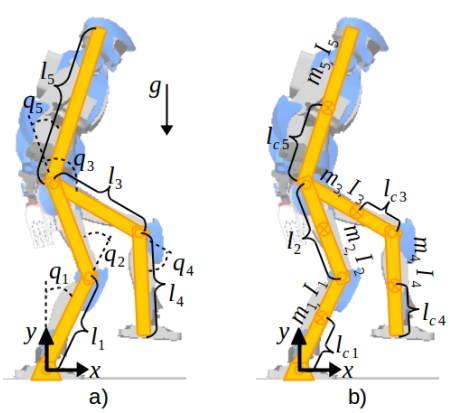



Fig. 11. 5-link planar biped robot model with dynamics parameters used in this thesis work. a) Displays the joint angle convention and the link lengths. b) Shows the lengths of the links from the joint to their CoM, their masses $m_i$ and their inertia moments $I_i$; $g$ is the gravity acceleration.

is an allocation matrix depending on the $\varsigma$-index for support or swing alternation. The humanoid dynamics (22) have the following properties:

- **Property 1**. The inertial forces matrix $M(q)$ is positive definite and its inverse can always be calculated.
- **Property 2**. The nonlinear bias velocity-dependent torque $b(q,\dot{q})$ can be expressed as:

$$b(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) \tag{23}$$

  Even $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{5\times5}$ is not unique, $b(q,\dot{q})$ is unique [4].
- **Property 3**. There exists a skew-symmetric matrix $S^{\times}(q,\dot{q})$ that determines the passivity property such that $\dot{q}^T S^{\times}(q,\dot{q})\dot{q} = 0$. This matrix is defined by [12]:

$$S^{\times}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q}) \tag{24}$$

There are more properties that are applicable to (22), but they can be consulted in literature [13]. The frontal plane dynamics can be considered decoupled from the Sagittal plane dynamics due to the mechanical composition of the robot and it is simplified as (2) [12]. The parameters of the dynamic model (22) are listed in Table III.

TABLE III
HUMANOID ROBOT DYNAMIC PARAMETERS FOR NUMERICAL SIMULATION.

| Parameter | Symbol | Value | Units |
|---|---|---|---|
| Length of link 1 (support shank) | $l_1$ | 0.34 | m |
| Length of link 2 (support thigh) | $l_2$ | 0.36 | m |
| Length of link 3 (swing thigh) | $l_3$ | 0.36 | m |
| Length of link 4 (swing shank) | $l_4$ | 0.34 | m |
| Length of link 5 (trunk) | $l_5$ | 0.96 | m |
| Length of link 6 (frontal support leg) | $l_6$ | 0.70 | m |
| Length of link 7 (frontal torso) | $l_7$ | 0.96 | m |
| Length from joint 1 to CoM of link 1 | $l_{c1}$ | 0.114 | m |
| Length from joint 2 to CoM of link 2 | $l_{c2}$ | 0.123 | m |
| Length from joint 3 to CoM of link 3 | $l_{c3}$ | 0.123 | m |
| Length from joint 4 to CoM of link 4 | $l_{c4}$ | 0.114 | m |
| Length from joint 3 to CoM of link 5 | $l_{c5}$ | 0.624 | m |
| Length from joint 5 to CoM of link 6 | $l_{c6}$ | 0.114 | m |
| Length from joint 6 to CoM of link 7 | $l_{c7}$ | 0.624 | m |
| Mass of link 1 | $m_1$ | 2.0812 | Kg |
| Mass of link 2 | $m_2$ | 2.0648 | Kg |
| Mass of link 3 | $m_3$ | 2.0648 | Kg |
| Mass of link 4 | $m_4$ | 2.0812 | Kg |
| Mass of link 5 | $m_5$ | 9.2110 | Kg |
| Mass of link 4 | $m_6$ | 4.146 | Kg |
| Mass of link 5 | $m_7$ | 9.2110 | Kg |
| Inertia of link 1 | $I_1$ | 0.0164 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 2 | $I_2$ | 0.0103 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 3 | $I_3$ | 0.0103 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 4 | $I_4$ | 0.0164 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 5 | $I_5$ | 0.1054 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 6 | $I_6$ | 0.0267 | Kg·m$^2$ |
| Inertia of link 7 | $I_7$ | 0.1054 | Kg·m$^2$ |

## IV. BIPED LOCOMOTION CONTROL

Biped walking of humanoid robots is divided generally in two phases: Double-Support Phase (DSP), when both feet of the robot are in contact with the ground, and Single-Support Phase (SSP), when feet are alternatively swinging to perform

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

a step. The control target of the biped locomotion is to lead each joint of the robot to track a desired set of trajectories in SSP, which is provided by a walking pattern generation at Cartesian level and then transformed to the joint space using the inverse kinematics of the legs. Below, the design of a controller that satisfies the trajectory tracking and its stability proof are presented.

### A. Control System Design

In order to achieve the stated control target, the following assumptions are made in this work:

- **Assumption 1.** The desired trajectories fulfill a stability criterion to keep the biped standing, such as the zero-moment point, or other similar.
- **Assumption 2.** In the Sagittal plane, the ankles, knees and hips joints are actuated.
- **Assumption 3.** The feet are always parallel to the floor plane.
- **Assumption 4.** In the frontal plane, both ankles and hips joints are actuated.
- **Assumption 5.** The DSP is instantaneous and, since the trajectories are smooth enough, the impact model is negligible.

Taking into account that all the parameters of the dynamics (22) are available and that the allocation matrix $\mathcal{H}(\varsigma)$ allows a relative degree $n$, the following exact feedback linearization control for trajectory tracking is proposed.

$$\tau = \mathcal{H}(\varsigma)^{\dagger}\left(K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}} + b(q,\dot{q},\dot{q}^d) + M(q)\ddot{q}^d\right) \tag{25}$$

where $\mathcal{H}(\varsigma)^{\dagger}$ is the right pseudoinverse of $\mathcal{H}(\varsigma)$, $K_p$ and $K_d$ are diagonal positive $5\times 5$ matrices and $\mathbf{e} = q^d - q$ is the vector containing the error signals, whose time derivatives are $\dot{\mathbf{e}} = \dot{q}^d - q$ and $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{q}^d - \ddot{q}$. Notice that as long as $\mathbf{e} \cong 0$, the stable performance of the gait is ensured, however, if it is desired to reject the probable disturbances while walking, an additional stabilizer is required [3], which must take into account the availability of force sensors at the soles of the humanoid and/or inertial measurement units (IMU) to compute a stability criterion such as ZMP [14]. It worth to mention that the desired velocities and accelerations are available, and the robot sensors are capable to supply the position, velocity and acceleration signals of each joint.

### B. Stability of the Control System

Consider the following Lyapunov candidate function:

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T M(q)\dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p\mathbf{e} \tag{26}$$

Which time derivative is given by:

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = \dot{\mathbf{e}}^T\left[M(q)\ddot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e}\right] \tag{27}$$

Sustituting (22) into (27) yields:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\dot{e}) = \dot{\mathbf{e}}^T\big[&M(q)\ddot{q}^d - \mathcal{H}(\varsigma)\tau \\ &+ b(q,\dot{q}) + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e}\big]\end{aligned} \tag{28}$$

By means of the Property 2, (28) can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\dot{e}) = \dot{\mathbf{e}}^T\big[&M(q)\ddot{q}^d - \mathcal{H}(\varsigma)\tau + G(q) \\ &+ C(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e}\big]\end{aligned} \tag{29}$$

Since $\dot{q} = \dot{q}^d - \dot{\mathbf{e}}$, and applying the Property 3:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,\dot{e}) = \dot{\mathbf{e}}^T\big[&M(q)\ddot{q}^d - \mathcal{H}(\varsigma)\tau + G(q) \\ &+ C(q,\dot{q})\dot{q}^d + K_p\mathbf{e}\big]\end{aligned} \tag{30}$$

Subsituting the controller (25) into (30) gives:

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = -\dot{\mathbf{e}}^T K_d\dot{\mathbf{e}} \tag{31}$$

Since $\dot{V}(e,\dot{e}) < 0 \;\; \forall \dot{e} \neq 0$ and it does not explicity depend on time, the global asypmtotic stability of the controller (25) can be concluded.

## V. Implementation on the HRP-4 Model

The developed walking pattern, inverse kinematics and control system were implemented on a realistic model of the HRP-4 high-performance humanoid. This robot is a 151 cm tall humanoid developed by the Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST) in Japan, which picture is displayed in Figure 12. It has a total of 34 DOF and it is 39 Kg weight [15]. There are about 20 units put into use over the world; the HRP-4 referred in this work is located at the Laboratoire d' Informatique, de Robotique et de Microelectronique de Montpellier (LIRMM) in France, as part of the CNRS-AIST Joint Robotics Laboratory cooperation framework. Such laboratory has developed the *mc_rtc* software, which is a collection of functions for C++ language to control the HRP-4 and other robots, using the ROS middleware for both simulation and real-time implementation.

Fig. 12. HRP-4 humanoid. Source: [15].

In addition, a realistic model is available in order to test the algorithms for its later implementantion on the actual robot. Such model is available for the Chorenoid simulation environment, that includes a physics motor; furthermore, the model is also available for the RViz 3D visualizer, which is included within ROS.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

The proposed gait synthesis and controller were implemented using the mentioned model of the HRP-4 humanoid. The gait synthesis was developed off line and the proposed controller runs as a task of the HRP-4 robot within the Chorenoid simulator and the RViz visualizer; the joint positions is recorded whilst the controller task is executed. The controller gains are $K_p = 150$ and $K_d = 50$.

## VI. Results

Figure 13 shows the results of the feedback linearization control of each joint of the Sagittal plane, where it can be observed that the joints follow the desired trajectories asymptotically. Similarly, Figure 14 displays the behavior of the frontal plane joints, where also the joints track the references. Such displayed plots represent the behavior of the joints during 0.5 seconds (half step), however, a complete set of steps can be observed in Figure 15, which is linked to a video that illustrates better the complete gait synthesis and locomotion control proposed.

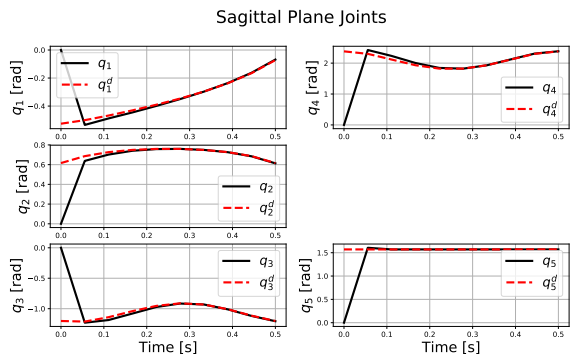



Fig. 13. Behavior of the controlled joints while performing a step using feedback linearization control.

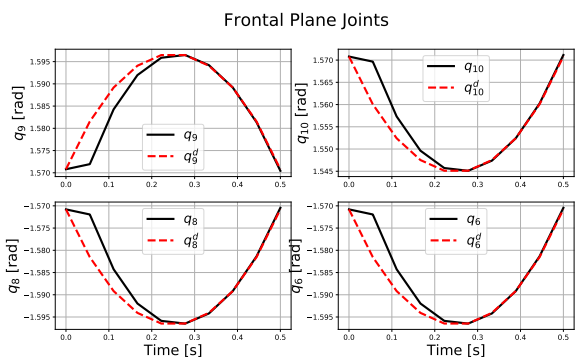



Fig. 14. Error signals of the joints using feedback linearization control. All errors approximate asymptotically to 0.

## VII. Conclusions

This work presents the complete algorithm to lead a humanoid robot to walk, including the gait synthesis and the locomotion controller. A 3D LIP walking pattern generation, a geometrical inverse kinematics approach and a feedback linearization control were developed using the *mc_rtc* software in order to control the walking of the HRP-4 humanoid model. The proposed walking pattern generator worked successfully in the Cartesian space, and the inverse kinematics was also suitable for joint dynamic control, since the HRP-4 humanoid model was capable of performing several steps without falling. The presented methodology can be applied to other humanoid robots.

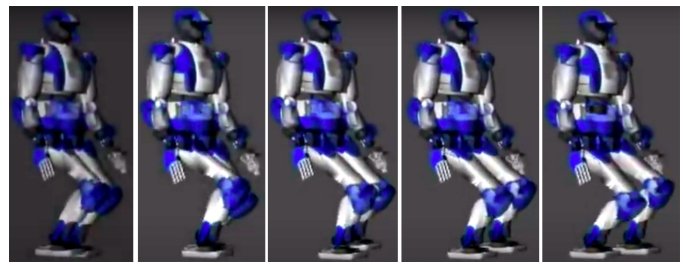


Fig. 15. Walking sequence of the HRP-4 humanoid using the proposed gait synthesis and controller. Video available at https://youtu.be/96bpEUhN8n4 .

## References

[1] Y. Xie, B. Lou, A. Xie, and D. Zhang, "A review: Robust locomotion for biped humanoid robots," *JPhCS*, vol. 1487, no. 1, p. 012048, 2020.
[2] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada, and K. Yokoi, *Introduction to humanoid robotics*, vol. 101. Springer, 2014.
[3] S. M. Orozco-Soto, R. Núñez-Cruz, and J. Ibarra-Zannatha, "Active disturbance rejection control for humanoid stable walking," in *2016 13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–6, IEEE, 2016.
[4] D. Nenchev, "Differential kinematics," in *Humanoid Robotics: A Reference*, pp. 675–721, Springer, 2019.
[5] S. Feng and Z. Sun, "A simple trajectory generation method for biped walking," in *2008 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, pp. 2078–2082, IEEE, 2008.
[6] G. Tevatia and S. Schaal, "Inverse kinematics for humanoid robots," in *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065)*, vol. 1, pp. 294–299, IEEE, 2000.
[7] S. Caron, A. Kheddar, and O. Tempier, "Stair climbing stabilization of the hrp-4 humanoid robot using whole-body admittance control," in *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 277–283, IEEE, 2019.
[8] S.-i. An and D. Lee, "Prioritized inverse kinematics: Desired task trajectories in nonsingular task spaces," *arXiv preprint arXiv:1910.10300*, 2019.
[9] F. Asano, "Stealth walking of 3-link planar underactuated biped," in *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 4118–4124, IEEE, 2017.
[10] C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. Abba, and Y. Aoustin, *Bipedal robots: Modeling, design and walking synthesis*. John Wiley & Sons, 2013.
[11] S. Tzafestas, M. Raibert, and C. Tzafestas, "Robust sliding-mode control applied to a 5-link biped robot," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 67–133, 1996.
[12] D. N. Nenchev, A. Konno, and T. Tsujita, *Humanoid robots: Modeling and control*. Butterworth-Heinemann, 2018.
[13] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.
[14] S. M. Orozco-Soto and J. M. Ibarra-Zannatha, "Motion control of humanoid robots using sliding mode observer-based active disturbance rejection control," in *2017 IEEE 3rd Colombian Conference on Automatic Control (CCAC)*, pp. 1–8, IEEE, 2017.
[15] K. Kaneko, F. Kanehiro, M. Morisawa, K. Akachi, G. Miyamori, A. Hayashi, and N. Kanehira, "Humanoid robot hrp-4-humanoid robotics platform with lightweight and slim body," in *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4400–4407, IEEE, 2011.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 5

## *Visión y navegación autónoma*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Designing a bio-inspired foveated active vision system

J. A. Rojas-Quintero[1], J. A. Rojas-Estrada[2], E. A. Rodríguez-Sánchez[2], J. A. Vizcarra-Corral[3]

***Abstract*— This paper presents the methodology involved in the design of a bio-inspired active stereo vision system that reproduces the foveal and peripheral vision capabilities of the human eye. The design is dictated by pertinent parameters relating to the kinematics and dynamics of saccadic motions of the human eye. We expose a specific drive-train design procedure and simulate some control techniques with the designed prototype to verify the adequacy of the chosen actuators.**

## I. Introduction

Stereoscopic vision arises when two images of the same object are taken from two different points of view and compared, providing a sense of depth. In robotics, stereoscopic vision systems serve as sensors to measure distances between the robot and potential obstacles or objects of interest. These systems allow robots to navigate the environment because a map can be created by means of dynamic image analysis [1]. Active vision has been defined as the modeling and study of control strategies to search and follow objects through vision [2] and has become an important research field in robotics [1]. Active stereo vision systems are often the main sensing apparatus of humanoid robot heads.

As part of an ongoing project on humanoid robotics at the Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, the design of an active vision system is required to equip the head of a humanoid robot. This vision system will be the main sensing apparatus of the targeted humanoid robot head. Humanoid robot heads vision systems are often stereoscopic and usually consist of a pair of actuated cameras that can pan and tilt. However, the human eye has the ability to view a large scene through its peripheral zone (of lower acuity), and at the same time detailed images can be captured through its fovea (maximum acuity zone located at the center of the eye). This is what we call foveated vision and is an effective way to cover large scenes and gather enough detail. Foveated vision systems have been previously developed for humanoid robot heads and can be emulated by using a set of cameras with wide field of view (FOV), combined with a set of cameras with narrow FOV, resulting in two cameras per eye [3]. Space-variant sensors, where resolution is highest at the center and gradually decreases as going towards the periphery of the sensor [4] can also emulate foveated vision, however, these sensors are not commercially available. RGB-D sensors constitute popular vision systems, but are at disadvantage in outdoor environments because the infrared (IR) sensor cannot discern between sunlight and the IR light from the emitter [5].

In this work, we present the methodology involved in the design of a stereoscopic and foveated active vision system inspired from the human being in terms of kinematics, dynamics and foveal and peripheral vision capabilities. The selected design parameters and the vision system design along with the drive-train design procedure are detailed. The dynamic model for one eye is derived and controlled motion simulations are conducted to validate the choice of the actuating system.

## II. Active vision system prototype

The desired system aims to equip a humanoid robot. As such, it should hold resemblance with the human being in terms of functionality [6] and/or appearance [5]. We focus on functionality and thus, the kinematics, the dynamics and the foveated vision capabilities of the human visual apparatus are targeted. The design parameters presented in Table I were met, with the exception of inter-pupillary distance. These parameters relate to the targeted kinematic and dynamic capabilities. Note that angular velocities and accelerations are highest during saccadic motions of the eye which are of low amplitude, generally of no more than 20° [7].

TABLE I
Targeted bio-inspired design parameters

| Parameter | Value |
|---|---|
| Eye angular velocity | $450\,^{\circ}\,\mathrm{s}^{-1}$ [7] |
| Eye angular acceleration | $20\,000\,^{\circ}\,\mathrm{s}^{-2}$ [7] |
| Eye abduction / adduction | 23° / 67° [8] |
| Eye elevation / depression | 51° / 31° [8] |
| Inter-pupillary distance | 61 mm ($\pm$1 mm) [9] |

For the design of each eye, a traditional 2 Degrees of Freedom (DOF) panning and tilting structure (see Figures 1 and 3) was chosen. The tilting motion is ensured by an actuator that is mounted directly on the axis of revolution. The panning motion of each eye is ensured by an actuator that transmits power via a timing belt and sprockets system. This belt and pulley transmission further increases the actuator torque by reducing its speed (ratio of 2:1) with no slippage of the belt, and allows for the actuator to remain "above" the base of the whole system (see Figure 2).

*This work was supported by the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Fondo Sectorial de Investigación para la Educación SEP-CONACYT (grant number A1-S-29824)

[1]J. A. Rojas-Quintero is with CONACYT/Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, Ensenada, Baja California, Mexico jarojas@conacyt.mx

[2]J. A. Rojas-Estrada and E. A. Rodríguez-Sánchez are with Tecnológico Nacional de México/I.T. Nuevo León, Guadalupe, Nuevo León, Mexico juan.antonio.rojas@itnl.edu.mx

[3]J. A. Vizcarra-Corral is with Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, Ensenada, Baja California, Mexico

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

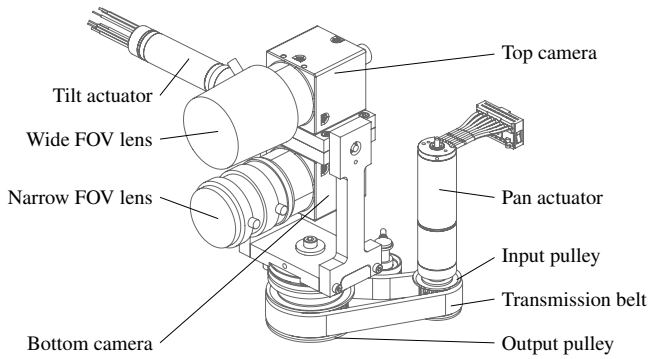



Fig. 1. Computer Assisted Design (CAD) model of the foveated active vision system right "eye"

To emulate foveated vision, two cameras are placed in each eye. In this regard, the FLIR® BlackFly S U3-16S2C-CS camera was chosen to equip our system. It has a 1.3 million pixels color sensor with a frame rate of 226 images per second. A Computar T2616 FICS-4 lens with 2.6 mm of fixed focal length was selected to deliver wide FOV. A Fujinon HF12.5HA-1B lens with 12.5 mm of fixed focal length was selected as the narrow FOV lens. These two lenses share a mass of 45 g and since the top and bottom cameras are the same in each eye, we can consider that they are well balanced between the top and the bottom.

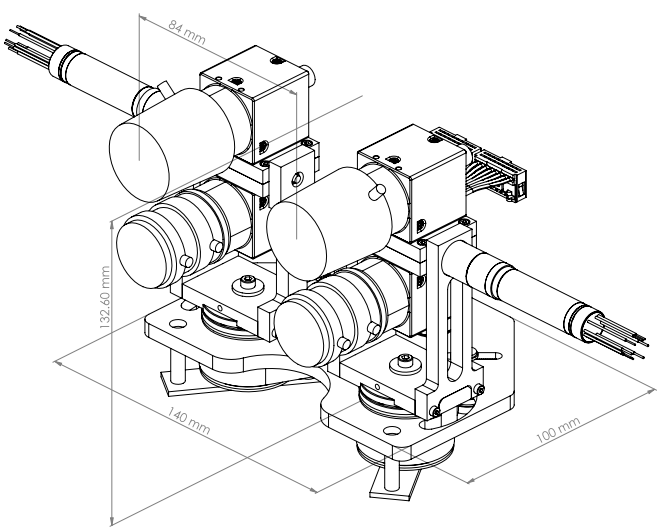



Fig. 2. CAD model of the designed foveated active vision system

Having two of these camera/lens combinations per eye certainly makes it all the more challenging to meet the requirements of Table I. In order to ensure these values, we followed a specific drive-train design procedure that will be presented in section IV. This process resulted in the selection of Maxon ECX Speed DC brushless micro-motors with corresponding Maxon GPX gearheads. For the tilting motion, ECX Speed 13L HP 18 V motor and GPX 14 HP gearhead (35:1 gear ratio) were selected. For the panning motion, the ECX Speed 16L 18 V motor and GPX 16 HP gearhead (44:1 gear ratio) were selected.

Some dimensions of the vision system are indicated for reference in Figure 2, which shows a CAD model of the designed prototype. Note that given the selected camera/lens combinations, an inter-pupillary distance of about 61 mm revealed to be incompatible with eye abduction/adduction and elevation/depression amplitudes of Table I. It was however kept to a strict minimum considering the constraints that were induced by the selected components. In our design, the inter-pupillary distance is the distance between right and left top or bottom lenses (see Figure 2). It is of 84 mm, so that Table I motion amplitudes are successfully met. A mass limit of 1.25 kg was also set in order to be compatible with a neck mechanism currently being designed. Our vision system has an overall mass of 1.23 kg.

## III. Modeling

We now derive the dynamic model of one eye of our prototype starting with a kinematics parameterization. The dynamic model will then be presented.

### A. Kinematics

The structure of each eye is regarded as a 2 DOF serial chain where these DOF are characterized by the configuration parameters $q_1$ and $q_2$. They are actuated by the previously mentioned drives; the second of which is placed between the two segments composing the structure. Figure 3 shows the kinematics diagram for one eye of our prototype. It explicits our choice of rotation axes $\mathbf{z}_1$ and $\mathbf{z}_2$ with $\mathbf{x}_1$ being a common perpendicular axis. Note that both coordinate frames originate at the intersection point between $\mathbf{z}_1$ and $\mathbf{z}_2$. The center of mass (CoM) of the first and second links are located by $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top$ and $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^\top$ respectively, and are expressed in each body frame in the operational space.

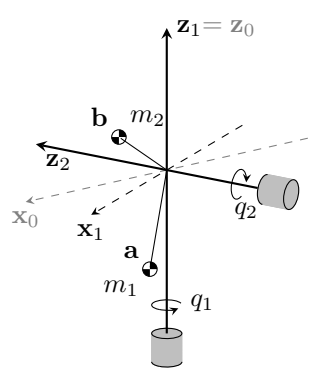



Fig. 3. Kinematic parameterization diagram of one eye

The Denavit-Hartenberg parameters are quite simple and shown in Table II. Note that the so-called proximal variant of these parameters [10], [11], was taken to derive our kinematic and dynamic model. Homogeneous transform matrices can be easily obtained with these parameters.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE II

DENAVIT-HARTENBERG PARAMETERS OF ONE EYE

| i | $a_{i-1}$ | $\alpha_{i-1}$ | $d_i$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $q_1$ |
| 2 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $q_2$ |

### B. Dynamics

To derive the dynamic model, we follow standard procedures that can be found in [11] or [12]. Each eye of our system is governed by second order nonlinear ordinary differential equations of motion of the following form:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \tau, \tag{1}$$

in which $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ is the system mass tensor which is a positive-definite symmetric bilinear form. For each eye of our system, it is of rank 2. $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ is the vector containing centrifugal and Coriolis effects. $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ represents Earth's gravity action on the system and $\tau$ is the torque vector necessary to cause the desired motion. Note that the torque vector $\tau$ will be expressed in the "base" frame, therefore, every vector is accordingly transformed to meet such requirement.

TABLE III

PHYSICAL PROPERTIES FOR ONE EYE OF THE ACTIVE VISION SYSTEM

| CONSTANT | VALUE |
|---|---|
| $m_1$ | $79 \times 10^{-3}$ kg |
| $\mathrm{I}_{1_{33}}$ | $93 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $(a_x, a_y, a_z)$ | $(-5.0, -3.6, -53.4) \times 10^{-3}$ m |
| $m_2$ | $276 \times 10^{-3}$ kg |
| $\mathrm{I}_{2_{11}}$ | $505 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $\mathrm{I}_{2_{12}}$ | $-1 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $\mathrm{I}_{2_{13}}$ | $-56 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $\mathrm{I}_{2_{22}}$ | $546 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $\mathrm{I}_{2_{23}}$ | $6 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $\mathrm{I}_{2_{33}}$ | $203 \times 10^{-6}$ kg m$^2$ |
| $(b_x, b_y, b_z)$ | $(12.3, 0.2, 19.7) \times 10^{-3}$ m |

Constants $m_1$ and $m_2$ are the first and second links respective masses. $\mathbf{I}_1$ and $\mathbf{I}_2$ are the inertia matrices taken at the first and second links respective CoM and expressed in their respective body frames; meaning that these remain constant as the body moves. $\mathbf{I}_1$ and $\mathbf{I}_2$ have components $\mathrm{I}_{(\cdot)_{ij}}$ with $i, j$ taking the values $\{1, 2, 3\}$, and are positive-definite symmetric bilinear forms. These constants are listed in Table III, along with CoM positions with respect to each body frame. The mass tensor $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ components are:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{11} &= k_1 + k_2 \mathrm{c}_2{}^2 + 2\mathrm{I}_{2_{12}}\mathrm{c}_2\mathrm{s}_2 + m_2\Big(\left(b_x\mathrm{c}_2 + b_y\mathrm{s}_2\right)^2 + b_z{}^2\Big) \\
\mathrm{M}_{12} &= k_3\mathrm{c}_2 + k_4\mathrm{s}_2 \;=\; \mathrm{M}_{21} \\
\mathrm{M}_{22} &= k_5
\end{aligned}$$

where $\mathrm{c}_2$ and $\mathrm{s}_2$ are the contractions of $\cos q_2$ and $\sin q_2$ respectively; $q_2 = q_2(t)$ and is a function of time. We further define inertia constants (2) so that the model stays compact enough.

$$\begin{aligned}
k_1 &= m_1\left(a_x{}^2 + a_y{}^2\right) + \mathrm{I}_{1_{33}} + \mathrm{I}_{2_{11}} \\
k_2 &= \mathrm{I}_{2_{22}} - \mathrm{I}_{2_{11}} \\
k_3 &= \mathrm{I}_{2_{23}} - m_2 b_y b_z \\
k_4 &= \mathrm{I}_{2_{13}} - m_2 b_x b_z \\
k_5 &= m_2\left(b_x{}^2 + b_y{}^2\right) + \mathrm{I}_{2_{33}} \\
k_6 &= m_2\left(b_y{}^2 - b_x{}^2\right) - k_2 \\
k_7 &= \mathrm{I}_{2_{12}} - m_2 b_x b_y
\end{aligned} \tag{2}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ derives from the mass tensor through Christoffel symbols of the first kind [12]. Using constants (2),

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2\left(k_6\mathrm{s}_2\mathrm{c}_2 + k_7\cos(2q_2)\right)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \left(k_4\mathrm{c}_2 - k_3\mathrm{s}_2\right)\dot{q}_2^2 \\ -\left(k_6\mathrm{s}_2\mathrm{c}_2 + k_7\cos(2q_2)\right)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Finally, the gravity action vector is given by

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g\left(b_x\mathrm{c}_2 - b_y\mathrm{s}_2\right) \end{bmatrix}.$$

Combining the above components of $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ and $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ into equation (1) yields the joint torque vector $\tau$.

## IV. DRIVE-TRAIN DESIGN PROCEDURE

A specific task-oriented drive-train design procedure was followed to ensure that the selected actuators will enable the designed prototype to perform the task it is designed for. Our methodology accounts for all factors that can be anticipated, namely the targeted design parameters (see Table I), the physical properties of the designed prototype (see Table III), its dynamic model (see section III-B) and the targeted task motion profile (see IV-B further in this section).

### A. Actuator sizing

The first step consists in choosing the actuators that allow the system to meet the targeted design parameters. The sizing procedure from [13], in conjunction with angular velocities and accelerations from Table I was followed. It is important to note that the cited procedure is based on a trapezoidal velocity motion profile and therefore it is necessary to verify that the selected actuators can perform the desired motion profile afterwards. This process has to be performed repeatedly until desired performance is obtained. Note however that mechanical design restrictions might limit the choice of the actuators and therefore, a realistic choice has to be made: increased actuator power usually comes with increased mass and volume, leading to larger links masses for a bulkier, less nimble system.

TABLE IV

SELECTED ACTUATORS FOR EACH EYE

| CONSIDERATION | JOINT 1 DRIVE | JOINT 2 DRIVE |
|---|---|---|
| Motor | ECX Speed 16L | ECX Speed 13LHP |
| Gearbox | GPX 16 HP 44:1 | GPX 14 HP 35:1 |
| Max cont. torque $\tau_{\mathrm{CR}}$ | 0.30 N m | 0.18 N m |
| Max cont. speed $\omega_{\mathrm{CR}}$ | 255 min$^{-1}$ | 191 min$^{-1}$ |
| Motor peak torque margin | 29% | 51% |
| Motor cont. torque margin | 67% | 84% |
| Motor speed margin | 99% | 99% |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

The system was set up in a position where torque from gravity is maximal around rotation axes for the sizing procedure. The implemented trapezoidal velocity profile meets the velocity and acceleration requirements from Table I. Table IV shows the main characteristics of the selected actuators. Note that torque and speed margins are for the motor part. A 50% motor peak torque margin is always desirable [13]. In our case, the selected gearboxes have 2 stages. A 3-stage gearbox with larger gear ratio would have increased drive 1 motor peak torque margin at the cost of increased mass and volume. This would have compromised targeted motion amplitudes and the desired overall mass of the system, and as we shall see in IV-C, the selected configuration reveals to meet the targeted task motion requirements.

### B. Task motion profile

With the dynamic model derived, the saccadic motions of the eye can be simulated to verify the actuators adequacy for the task. According to the prescriptions in [7], the duration of the saccade $T$ (in seconds) is related to the angular amplitude of the saccade $\alpha$ (in degrees) by

$$T = 0.021\alpha^{2/5}. \tag{3}$$

A time history of the configuration parameter for one axis of the eye $q(t)$ (in degrees) can be obtained with the following position profile

$$q(t) = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right) \tag{4}$$

where $t$ is the time in seconds such that $0 < t < T$, for fixed values of $\alpha$ and $T$. Velocity and acceleration profiles are obtained by differentiating $q(t)$ with respect to $t$. Note that this motion profile only approximately describes the course of saccades measuring 15° to 20° and cannot be applied for motions of more than 20° of amplitude. With the given motion profile, joint torques can be calculated for the system to verify motion feasibility by each eye.

### C. Torque-speed considerations

The previously introduced motion profile is now simulated. Instead of testing each axis separately, an amplitude $\alpha = 20°$ is chosen for both axes simultaneously. Equation (3) gives a saccade duration of $T \simeq 0.07\,\mathrm{s}$ and yielding a maximum velocity of $451.36\,°\,\mathrm{s}^{-1}$ at each joint, for maximum torques of $0.28\,\mathrm{N\,m}$ at the first joint and $0.12\,\mathrm{N\,m}$ at the second joint (torques were calculated with the inverse dynamics model presented in section III-B). Note however that only the second actuator is mounted directly at the axis of rotation and therefore, velocities and torques required for the first actuator have to be reflected to the drive shaft through the belt and pulley transmission [13]. Required drive torque $\tau_{\mathrm{drive}}$ is calculated with

$$\tau_{\mathrm{drive}} = \frac{\tau_{\mathrm{joint}}}{\eta N_{\mathrm{BP}}} \tag{5}$$

where $\tau_{\mathrm{joint}}$ is the torque at the joint; $\eta$ is the transmission efficiency; $N_{\mathrm{BP}}$ is the transmission ratio. Required drive velocity $\omega_{\mathrm{drive}}$ is obtained by

$$\omega_{\mathrm{drive}} = \eta N_{\mathrm{BP}}\,\dot{q} \tag{6}$$

where $\dot{q}$ is the motion profile joint velocity. According to the recommendations of [14], efficiency should be of 98% for custom timing belt and pulley transmissions. However, a value of $\eta = 0.95$ is used for a more conservative approach, in accordance with pulley manufacturer suggestions; $N_{\mathrm{BP}} = 2$ for our transmission.

In order to verify if the selected actuators can perform the motion profile from equations (3) and (4), torque-speed values must remain within drive limitations (see Table IV). Note that drives can continuously operate beyond recommended continuous torque limits at reduced thermal resistance. Note also that drives can operate beyond continuous rated speed limits intermittently. However, to avoid reducing the drives service life, maximum continuous torque $\tau_{\mathrm{CR}}$ and maximum continuous speed $\omega_{\mathrm{CR}}$ are taken as absolute limits in our simulations (see Table IV).

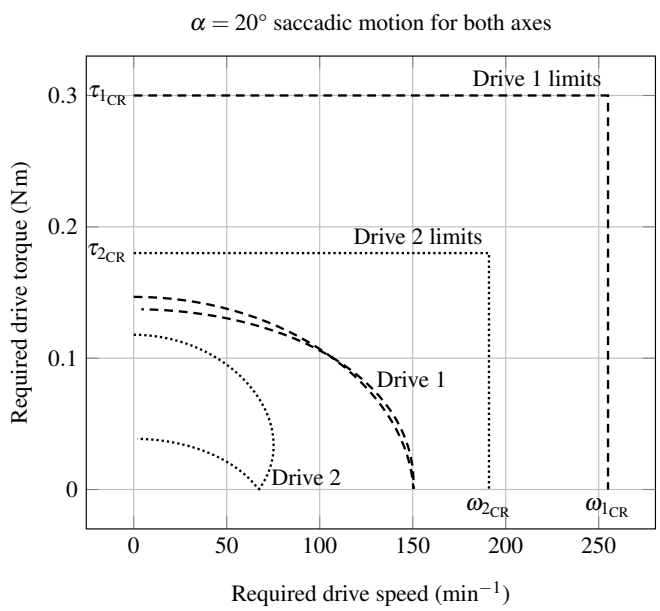



Fig. 4. Required drive torque versus required drive speed for a saccade of amplitude $\alpha = 20°$

Figure 4 shows the required drive torque (absolute value) for each actuator, plotted against the required drive speed for each actuator, for an $\alpha = 20°$ of amplitude saccadic motion. The above mentioned drive limits also appear in Figure 4, showing that the selected actuators can perform the task at hand with comfortable margins. Maximum drive torque values were of $0.15\,\mathrm{N\,m}$ and $0.12\,\mathrm{N\,m}$ for the first and second actuators, leaving torque margins of 104% and 52% respectfully when compared against maximum continuous drive torques (see Table IV). Maximum drive speed values were of $150.45\,\mathrm{min}^{-1}$ and $75.22\,\mathrm{min}^{-1}$ for the first and second actuator, leaving speed margins of 69% and 154% when compared against maximum continuous drive speeds. Note that these are actuator margins as opposed to motor margins from Table IV. Therefore, it can be assumed that the previously selected actuators are adequate for the targeted task.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

### D. Motion control considerations

It is important to consider that motion control procedures might modify the required torques and/or velocities for the actuators in real world conditions. In this sub-section we further examine the selected actuators from the point of view of motion control. We perform controlled motion simulation with two different control schemes: PD control and Computed torque (CT) control (both found in [12]). We examine how torque and speed actuator requirements are affected by these control schemes. The same motion profile was used in both control schemes, namely, a saccadic motion where $\alpha = 20°$ for both axes of the eye, simultaneously.

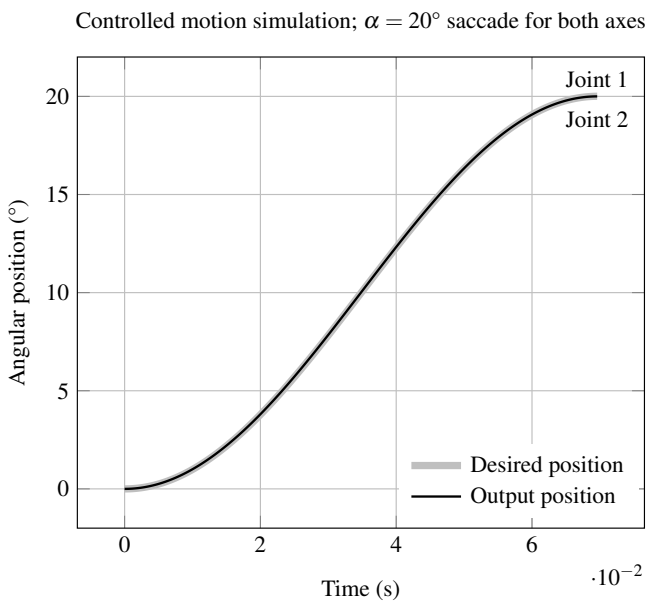



Fig. 5. Desired and actual positions for a saccadic motion profile where $\alpha = 20°$ for both axes

Figure 5 shows the desired and output joint angular positions during our controlled motion simulations. The position profile is the same for both axes. Very similar position results were obtained with both control schemes: differences were negligible and therefore position curves are indistinguishable (Figure 5). However, the two control schemes provide very different output torques. Figure 6 shows the desired torques compared to output torques obtained with both PD control and CT control scheme. Here, the output torque values obtained with a CT scheme are practically the same as the desired torques, whereas the PD control scheme shows noticeable differences with respect to the desired values. These differences between the two control schemes are normal because the system dynamic model is taken into account by the CT control scheme. Nevertheless, we can appreciate how the intended motion control scheme for the application does affect the drive-train design process for actuator sizing. Take "drive 2" for example (tilt motion), notice how the output torque is higher in absolute value when compared to the desired torque. Here, we followed a specific gain-tuning procedure [12] for PD-control, which ensures output torques that remain relatively close to the desired ones (in this case, the minimal gains were multiplied by 100 to minimize positioning errors).

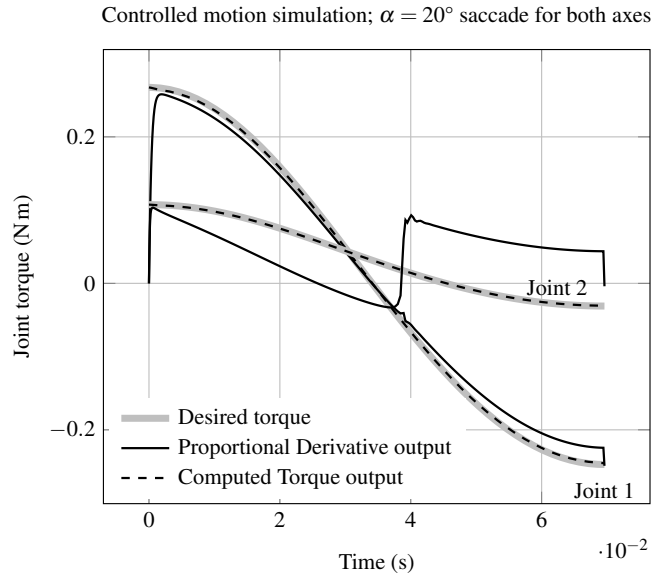



Fig. 6. Desired and actual joint torques for a saccadic motion profile where $\alpha = 20°$ for both axes. Obtained results with PD and CT control schemes.

We now examine the required torque-speed curves for the actuators with both control schemes. Recall that the first actuator is affected by a belt and pulley transmission which modifies the required torque and speed from the drive according to equations (5) and (6). Figure 7 shows the required torque-speed curves for a saccade of $\alpha = 20°$ in both axes, using a PD control scheme, and Figure 8 shows the required torque-speed curves for the same motion using a CT control scheme. Both drives safely operate within their limits using both control schemes. Note however that for "drive 2" again, the required torque at the top reached speed is higher with the PD-control scheme when compared with the CT control scheme (Figures 7 and 8).

## V. Methodology summary

The following steps summarize our methodology.

1) *Biological system characterization*: study the anatomy and physiology of the targeted biological system.
2) *Design parameters*: select the targeted design parameters according to step 1 (Table I in this case).
3) *Task-oriented design*: design and size the system according to targeted design parameters using CAD software. This initial design is taken as a starting point.
4) *Modeling*: elaborate the system kinematic and dynamic models according to the designed system in step 3. Physical properties are given by CAD software.
5) *Drive-train design*: size actuators and transmission in order to meet step 2) requirements according to a targeted task motion profile. This profile shall represent the most demanding motion that the system will perform. This is an iterative process that involves modifying the designed system until step 2 requirements

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

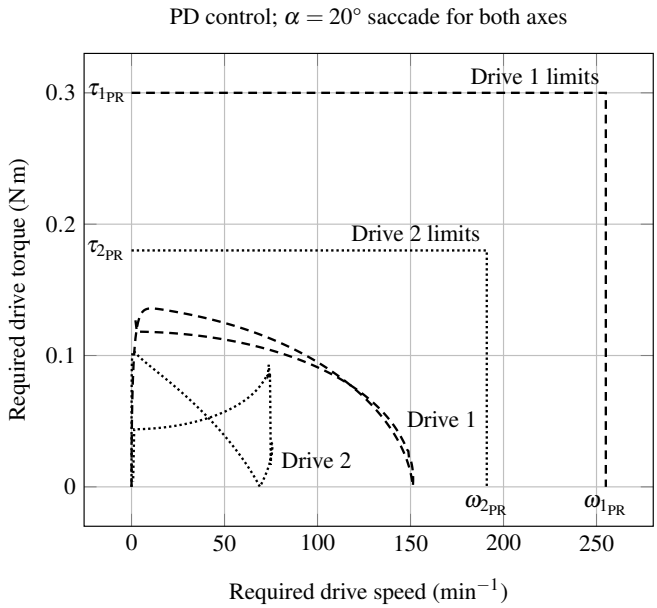



Fig. 7. PD control: required drive torques for a saccadic motion profile where $\alpha = 20°$ for both axes

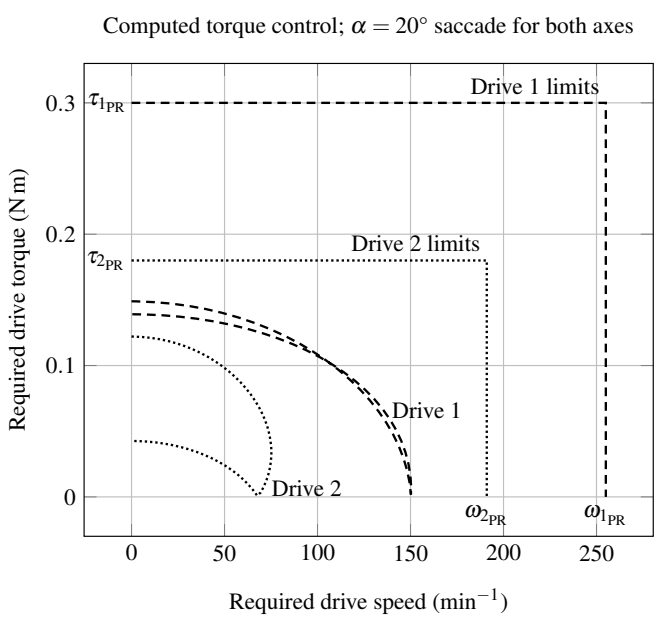



Fig. 8. CT control: required drive torques for a saccadic motion profile where $\alpha = 20°$ for both axes

are met. The drive-train should be able to generate the targeted motion with appropriate torque-speed margins.

6) *Controlled motion simulation*: simulate motion with an intended control scheme in order to verify that the output torques still fall within the drive-train limits.

## VI. Conclusion

We have presented the design of a bio-inspired foveated active vision system that will equip a humanoid robot head. Each eye of the system is composed of two cameras for simultaneous wide and narrow FOV. The proposed system complies with targeted design parameters, with the exception of inter-pupillary distance which was maintained to a minimum, exceeding the targeted distance by 38%. Each eye has 2 DOF (pan and tilt) and the drive-train has been designed to enable human inspired saccadic motions. A methodology for the drive-train design of advanced robotics systems is proposed. This methodology consists in sizing the actuators according to targeted design parameters and simulate a targeted task motion to verify that the actuators operate within their limits. Special attention is required on torque-speed and motion control considerations. A brief comparison between two popular control schemes shows that the choice of the control scheme can affect required drive torques and speeds, and could even compromise the choice of actuators. Controlled motion simulation should be part of the drive-train design process in order to make further adjustments to drive selection. Two model-based control schemes were simulated in this work. Non model-based control schemes might alter the torques and speeds required from the actuators and in such cases, larger margins should be considered. In the present case, a model-based control scheme is recommended to control our prototype. We plan to physically produce this prototype and ensure it functions as a research platform. A related work in progress is the design of a bio-inspired neck system that appropriately drives our vision system.

## References

[1] P. Corke, *Robotics, Vision and Control*, 2nd ed. Springer International Publishing, 2017.

[2] R. Bajcsy, "Active perception," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 8, pp. 966–1005, Aug 1988.

[3] T. Asfour, J. Schill, H. Peters, C. Klas, J. Bücker, C. Sander, S. Schulz, A. Kargov, T. Werner, and V. Bartenbach, "Armar-4: A 63 dof torque controlled humanoid robot," in *Proceedings of the 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, October 2013, pp. 390–396.

[4] G. Sandini and G. Metta, *Sensors and Sensing in Biology and Engineering*. Vienna: Springer, 2003, ch. Retina-Like Sensors: Motivations, Technology and Applications, pp. 251–262.

[5] J. Englsberger, A. Werner, C. Ott, B. Henze, M. A. Roa, G. Garofalo, R. Burger, A. Beyer, O. Eiberger, K. Schmid, and A. Albu-Schaffer, "Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO," in *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, November 2014.

[6] S. Saeedvand, M. Jafari, H. S. Aghdasi, and J. Baltes, "A comprehensive survey on humanoid robot development," *The Knowledge Engineering Review*, vol. 34, p. e20, 2019.

[7] A. L. Yarbus, *Eye Movements and Vision*. Boston, MA: Springer, 1967, ch. Saccadic Eye Movements, pp. 129–146.

[8] K. W. Wright, *Handbook of Pediatric Strabismus and Amblyopia*. New York, NY: Springer New York, 2006, ch. Anatomy and Physiology of Eye Movements, pp. 24–69.

[9] J. S. Pointer, "The interpupillary distance in adult caucasian subjects, with reference to 'readymade' reading spectacle centration," *Ophthalmic and Physiological Optics*, vol. 32, no. 4, pp. 324–331, 2012.

[10] H. Lipkin, "A Note on Denavit-Hartenberg Notation in Robotics," in *Volume 7: 29th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*, September 2005, pp. 921–926.

[11] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 4th ed. Harlow, UK: Pearson Education Limited, 2018.

[12] R. Kelly, V. Santibáñez Davila, and J. A. Loría Perez, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag London, 2005.

[13] H. Gürocak, *Industrial Motion Control*. John Wiley & Sons, Ltd, 2015, ch. Drive-Train Design, pp. 35–106.

[14] K. Nisbett and R. G. Budynas, *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 10th ed. McGraw-Hill Education, 2015.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Detección y clasificación de líneas de carriles en entornos virtuales aplicando redes neuronales convolucionales

Luis Ángel Dario Osuna Castañeda[1], Ulises Zaldívar Colado[2], Juan Manuel Ibarra Zannatha[3]
Xiomara Penélope Zaldívar Colado[4]

***Abstract*— La detección y clasificación de las líneas de carril es una tarea indispensable en el desarrollo de tecnologías para la navegación autónoma, tales como: control de crucero, asistencia para cambio, orientación o mantenimiento del carril y planeación de trayectorias. Los métodos convencionales empleados para esta tarea se basan en el desarrollo de algoritmos para la extracción características a partir de una imagen o la construcción de filtros ad hoc para la extracción de características particulares. Es por esto que se utiliza una nueva metodología basada en el uso de redes neuronales convolucionales en las cuales es posible obtener de forma automática las características adecuadas (durante la fase de entrenamiento de las red) para la correcta detección y clasificación de las líneas de los carriles.**

## I. Introducción

La detección y clasificación de las líneas de carril es una tarea indispensable en el desarrollo de tecnologías para la navegación autónoma. Con esta tarea se obtiene información critica sobre el entorno, la cual es necesaria para el correcto funcionamiento de distintos sistemas de necesarios en la conducción autónoma, tales como: control de crucero, asistencia para cambio, orientación o mantenimiento del carril, planeación de trayectorias, etc... .Los métodos convencionales para la detección y clasificación de carriles se basan en la extracción de características o patrones dentro una imagen. Algunas de las características mas utilizadas dentro de este ámbito son: la detección de bordes, segmentación por colores, intensidad de píxeles o la detección de formas dentro de la imagen.

Comúnmente, para el funcionamiento de estos métodos se siguen una secuencia de tareas : (1) Extracción de píxeles que pertenecientes a líneas de carriles, (2) Agrupación y clasificación de píxeles (3) Generación de una representación matemática que se ajuste a las líneas encontradas. Es por lo anterior que es necesario diseñar algoritmos que extraigan características útiles,y a su vez seleccionar minuciosamente cuales son las características que aportan información representativa para la correcta clasificación de los píxeles pertenecientes a las líneas del carril para la obtención de resultados satisfactorios.

[1] Luis Ángel Dario Osuna Castañeda is with Posgrado en Ciencias de la Información, Universidad Autónoma de Sinaloa luisosuna@uas.edu.mx

[2] Ulises Zaldívar Colado is with Posgrado en Ciencias de la Información, Universidad Autónoma de Sinaloa uzaldivar@gmail.com

[3] Juan Manuel Ibarra Zannatha is with Departamento en Control Autómatico, CINVESTAV jibarra@cinvestav.edu.mx

[4] Xiomara Zaldívar Colado is with Posgrado en Ciencias de la Información, Universidad Autónoma de Sinaloa xiomara.zaldivar@uas.edu.mx

Entre lo problemas mas comunes que surgen utilizando este tipo de métodos y la búsqueda de características utilizadas para su funcionamiento, es que son sensibles a cambios no previstos en el desarrollo de los mismos. Entre algunos de estos cambios se encuentran: variaciones en la intensidad de iluminación, oclusión parcial o completa de las líneas de los carriles, distintas perspectivas de los carriles, cambios en la posición u orientación de las líneas de los carriles, entre otras...

Cabe destacar que el proceso de extracción de características de las imágenes, son diseñados para extraer características o patrones específicos de una imagen, por lo que su funcionamiento se limita solamente a los casos para los cuales este proceso fue diseñado. Por lo anterior, es necesario actualizar o rediseñar constantemente estos procesos para cada nueva situación que se presente, lo cual es complicado cuando el numero de escenarios posibles es muy alto o inclusive cuando el numero de estos es desconocido.

Una alternativa a los métodos convencionales la cual ha popularizado en los últimos años, es el uso de redes neuronales convolucionales ('CNN' por sus siglas del inglés). Considerando que este tipo de redes serán utilizadas bajo el esquema de algoritmos de clasificación y comparándolas con los métodos existentes para dicha tarea,se encuentra el hecho que en los métodos convencionales es necesario diseñar búsquedas especificas o especializadas en un cierto tipo de características o patrones que sean de ayuda para la clasificación de objetos o formas dentro de una imagen, mientras que la utilización de redes neuronales permite que esta búsqueda de características sean diseñadas de forma automática durante la fase de entrenamiento de las red.

El presente trabajo esta divido de la siguiente manera:

## II. Trabajo relacionado

El uso de redes neuronales para el tratamiento de imágenes ha ido en aumento en los últimos años, específicamente el uso de CNN. Además del incremento en la capacidad y velocidad de las computadoras para el procesamiento de datos, uno de los detonantes para el uso de estos métodos fue a partir del trabajo de alexnet. A partir de este trabajo el uso de redes neuronales se ha implementado en distintas áreas de investigación, tales como: reconocimiento de voz, procesamiento de lenguaje natural y particularmente en el análisis de imágenes . En el área del desarrollo de tecnologías para la navegación de vehículos autónomos, y específicamente en la tarea de detección de carriles, el uso de las CNN a demostrado ser una alternativa viable con la cual es posible

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

obtener resultados similares a los métodos convencionales o incluso mejorarlos.

En [1] se utiliza una red neuronal convolucional que realiza dos tareas a la vez, una parte de la red se encarga de realizar una segmentación binaria de las imágenes para la obtención de los píxeles que pertenecen a las líneas de los carriles, mientras que la otra parte esta encargada de realizar un agrupamiento de las áreas que pertenecen a distintos carriles. Utilizando esta información se realiza un post-procesamiento de los datos aplicando algoritmos de clusterización para obtener las líneas de los carriles existentes, aplicando una etiqueta distintiva a cada una ellas, logrando distinguir cada uno de los carriles. Una de las ventajas principales de esta metodología es que no esta limitada a detectar un numero especifico de carriles establecido, por lo que su funcionamiento es flexible a distintos tipos de escenarios.

Por otra parte, una propuesta interesante es la mostrada en el trabajo [2] donde se hace uso de una característica importante para la detección de las líneas de los carriles, la cual es que las imágenes se presentan de forma secuencial. La premisa de este trabajo es que debido a que que es posible que no obtener buenos resultados a partir del análisis de una sola imagen debido a la presencia de oclusiones o sombras, es posible evitar este problema utilizando la información extraída a partir de múltiples imágenes continuas entre si. Para el funcionamiento de esta red fue necesario implementar otro tipo de arquitectura llamada red de memoria corto-largo plazo ('LSTM' por sus siglas en ingles), la cual recibe información por parte del codificador de la CNN y sus resultados alimentan al decodificador de la CNN para obtener un mapa de probabilidades que indican la presencia de líneas de carril.

También se han realizado investigaciones utilizando enfoques híbridos, combinando el uso de técnicas convencionales para la extracción de características en conjunto con redes neuronales. Un ejemplo de esto se encuentra en [3], donde los datos de entrada de la CNN es una imagen compuesta por bordes, donde la calidad de la misma depende exclusivamente de la técnica utilizada para la extracción de los mismos. La CNN da como resultado una imagen que predice las regiones en las que existen líneas de los carriles, posteriormente se aplica el algoritmo RANSAC para la eliminación de valores atípicos y para encontrar una representación matemática de las líneas de los carriles.

De acuerdo al trabajo presentado en [4], es necesario utilizar mas de un tipo de características para mejorar los resultados obtenidos por la red, esto bajo la premisa que si una de estas características no es lo suficientemente buena, es posible que con las características restantes se alivie el problema y se permita realizar una predicción mas precisa. En este caso, los autores hacen uso de la red MultiNet [5] y es alimentada por un extractor de bordes, un extractor de diferencias de intensidades utilizando una imagen con mapeo de perspectiva inversa y un extractor de texturas basado en una red neuronal.

## III. Metodología propuesta

### A. Hardware y software utilizados

Toda la computación fue realizada en una PC con un procesador Ryzen 5 2600 a 3.4Ghz con seis núcleos, 16 GB de memoria RAM y una tarjeta de vídeo GTX-1060 son 6 GB de memoria V-RAM. La simulación de los circuitos de navegación fue ejecutada utilizando el simulador de entornos virtuales GAZEBO y visualizado utilizando ROS. Para el desarrollo de la red neuronal se utilizo el framework Tensorflow en conjunto con Keras y ejecutado bajo el sistema operativo Ubuntu 16.04.

### B. Arquitectura de la red neuronal

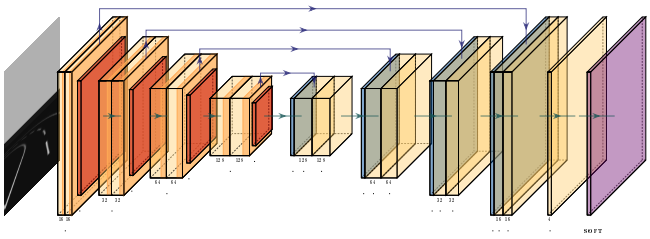


Fig. 1: Visualización de la arquitectura de la red neuronal.

En la Figura 1 se observa una representación de la arquitectura de la red neuronal convolucional. Dicha red esta compuesta en dos partes: un codificador ('encoder') y un decodificador ('decoder'), siguiendo una estructura similar a redes como U-Net y SegNet. Después de cada capa de convolución se aplica normalización por lotes (Batch Normalization), seguido de por la función de activación de unidad lineal rectificada (ReLU, por sus siglas en inglés) y desconexión de neuronas (Dropout) de 20%. En cada capa de convolución se utilizo un kernel con un tamaño de (3x3), mientras que que las capas de MaxPooling y UpSampling se utilizo uno de tamaño de (2x2). La salida del decodificador esta conectada a una capa de convolución con 4 mapas de características, los cuales representan cada una de las categorías que la red neuronal debe segmentar. Por ultimo, la capa anterior esta conectada a una capa con una función Softmax, que se encarga de clasificar cada píxel de acuerdo a la información recibida por los mapas de características recibidos.

La parte del decodificador de la CNN es un espejo del codificador, y cada UpSampling dentro del decodificador es concatenado de forma simétrica con la capa de convolución correspondiente dentro del codificador de la CNN.

La función de perdida utilizada para este trabajo es la Entropía Cruzada Categórica Dispersa ('Sparse Categorical Cross Entropy'), esto con el fin de reducir el tamaño de la representación de las etiquetas, y evitar realizar un tratamiento de la información posterior a las predicciones realizadas por la red neuronal. Y como algoritmo de optimización se utilizo el algoritmo RMSprop.

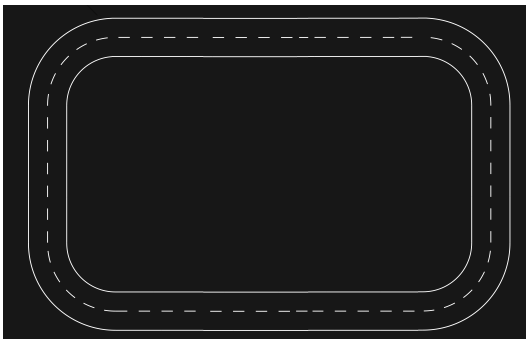
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Durante la fase de entrenamiento es necesario realizar una reasignación de pesos a cada una de las categorías a clasificar, debido a que existe una desproporción de las mismas en cada una de las imágenes. Para esto, la reasignación de pesos para cada categoría fue realizada para cada elemento del conjunto de datos de entrenamiento de la CNN, utilizando la ecuación 1.

$$w_c = 1 - (c_{total}/n_{pixels}) \tag{1}$$

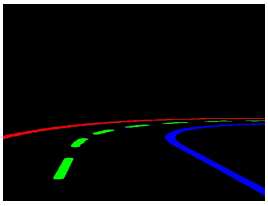
Donde $w_c$ es el peso de la categoría, $c_{total}$ es el numero de píxeles que se encuentran en dicha categoría y $n_{pixels}$ es el numero total de píxeles de la imagen. Con esto se garantiza que en los casos donde las categorías no estén balanceadas, se asigne un peso mayor a aquellas categorías con menor ocurrencia dentro de la imagen. Por lo anterior, una mala predicción da como resultado que la función de perdida realice un mejor reajuste de pesos de la CNN.
Una de las diferencias principales de la red neuronal propuesta es la reducción en el número de capas de convolución y la cantidad de mapas de características en cada una de estas capas con el fin de reducir el tiempo de entrenamiento y de predicción de la red, además de permitir el entrenamiento de la misma, dadas las características del equipo de computo utilizado.

### C. Generación del conjunto de datos



a) Circuito utilizado

b) Imagen original



c) Etiquetas

Fig. 2: Descripción de las imagenes

Dadas las características de la red neuronal, se diseño un nuevo conjunto de imágenes para el entrenamiento de la misma. El conjunto de entrenamiento generado esta compuesto por un conjunto de imágenes que representan distintas situaciones que ocurren durante la navegación del vehículo dentro del circuito virtual desde la perspectiva del conductor del vehículo (ver Figura 2). El circuito utilizado es el que se encuentra en la Figura 2a, el cual esta compuesto por dos carriles de navegación, mientras que las imágenes generadas muestran los distintos posibles escenarios durante la conducción del vehículo, tales como: visión de todos los carriles, visión de uno o dos carriles, o en casos extremos, imágenes en las que no se visualiza ninguno de los carriles. Es importante resaltar que el contemplar estos escenarios no es una tarea trivial, y que es necesario contar con representaciones de estos tipos de escenarios para mejorar las predicciones de la CNN.
Estas imágenes son obtenidas a partir de la simulación del vehículo virtual, utilizando el visualizador de simulación para robots ('RViz' por sus siglas en ingles) incluido en el sistema operativo para robots (ROS) haciendo uso de las herramientas de visualización de imágenes ('rqt_image') incluidas en el mismo.
Cabe destacar que el circuito utilizado es una situación que podría considerarse simple, sin embargo la clasificación de las líneas de los carriles no es una tarea trivial inclusive en estos tipos de escenarios.
Las imágenes que conforman al conjunto de entrenamiento fueron etiquetadas para la clasificación de las líneas de los carriles, dichas etiquetas están divididas en cuatro categorías, asignando los valores 0,1,2,3 a cada uno de los píxeles que representan las categorías: fondo, carril izquierdo, carril central y carril derecho respectivamente. Debido a que es complicado para el ojo humano apreciar la diferencia de intensidades de un píxel a otro en una magnitud tan baja como la mencionada (asumiendo que las imágenes se representen en escala de grises), se cambio la representación de estas etiquetas con fines meramente ilustrativos a un espacio RGB, de forma tal que las categorías a clasificar fondo, carril izquierdo, carril central y carril derecho serán representadas con colores negro, rojo, verde y azul respectivamente, tal y como se muestra en la Figura 2.
El conjunto de entrenamiento esta compuesto por 15,002 elementos que representan la variedad de escenarios que pueden presentarse durante la navegación del vehículo dentro del entorno virtual.Cada elemento del conjunto esta representado por una imagen con extensión '.PNG' y su etiquetado correspondiente, ambos con una resolución de 320x240 píxeles.

## IV. Experimentación y resultados

### A. Evaluación de las predicciones de la CNN

Se evaluó la CNN calculando el índice de Jaccard o también conocido como "Intersection-over-Union" ('IoU' por sus siglas del ingles), siendo este ultimo termino el utilizado en la mayoría de los trabajos de investigación de esta área. Este índice mide el grado de similitud entre dos conjuntos, en este caso el grado de similitud entre las predicciones del la CNN y los valores reales de las líneas de los carriles.

$$IoU(Y, \hat{Y}) = \frac{Y \cap \hat{Y}}{Y \cup \hat{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(Y, \hat{Y})}{\sum_{i=1}^{n} \max(Y, \hat{Y})} \tag{2}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Donde Y representa los valores reales y $\hat{Y}$ las predicciones. Y escrito como una función de una matriz de confusión entre ambos valores.

| | $\hat{Y}=1$ | $\hat{Y}=0$ |
|---|---|---|
| $Y=1$ | P | FN |
| $Y=0$ | FP | N |

Donde P, N, FP y FN representan valores positivos, negativos , falsos positivos y falsos negativos, respectivamente.

$$IoU(Y,\hat{Y}) = \frac{TP}{TP+FN+FP} \tag{3}$$

Los valores obtenidos al aplicar el índice de Jaccard oscilan entre 0 y 1, tal que un valor de similitud 0 indica similitud nula entre la predicción y los valores reales. Cuando los valores de Y e $\hat{Y}$ son iguales el índice de Jaccard obtenido sera igual a 1.

### B. Resultados en las predicciones

Tal y como se muestra en la Figura 2, de cada imagen se realiza la predicción de las 4 posibles clases que existen en la misma: Fondo y líneas de carril izquierdo, central y derecho. En total, se evaluaron las 15,002 imágenes que componen al conjunto de entrenamiento de la CNN. Para cada imagen se calculo el índice de Jaccard de cada categoría, con la finalidad de determinar la efectividad de las predicciones de la red.

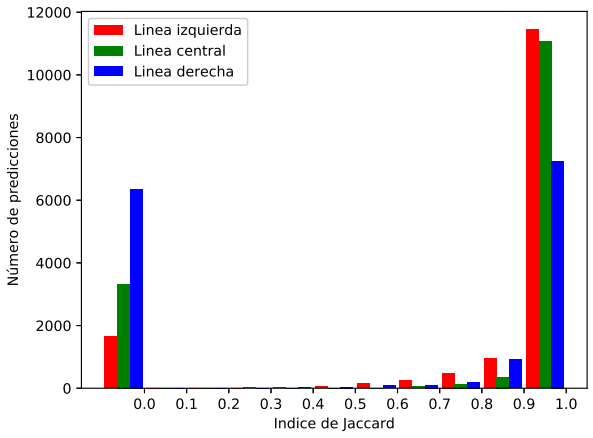



Fig. 3: Resultados de los índices de Jaccard de las imágenes.

Los resultados obtenidos se clasificaron en diez grupos, donde cada grupo representa la cantidad de imágenes que se encuentran dentro de un determinado rango de acuerdo al índice de Jaccard obtenido (ver Figura 3). En la Figura 3 se observa que gran parte de las predicciones se encuentran en dos grupos, los que se encuentran con un índice de Jaccard en el rango [0.9 - 1) y aquellas que se clasificaron con un índice de Jaccard negativo. Este índice negativo se estableció para aquellos casos donde la cantidad de píxeles que representan a una categoría es igual a 0. Esta problemática fue incluida en el conjunto de entrenamiento con la finalidad de que la CNN aprenda a detectar este tipo de casos. Las predicciones con un índice de Jaccard dentro del rango [0.9 - 1) se pueden visualizar con claridad en la Figura II en la sección de Anexos, dicho esto se determina que el funcionamiento de la CNN resulta satisfactorio.

### C. Análisis de casos especiales

Aunque en gran parte de las predicciones de los elementos analizados por la CNN se obtiene un índice de Jaccard $\geq$ .9, se asume que es necesario visualizar los resultados obtenidos con un índice de Jaccard inferior. Se realizo un análisis empírico, en el cual se determino que existen tres tipos de situaciones en las cuales los resultados obtenidos a partir de las predicciones realizadas por la CNN se ven afectados. Entre estas situaciones se encuentran: la línea del carril no esta presente en la imagen, cantidad de píxeles que representan la línea del carril es muy baja y fallos en las predicciones de la CNN.

| línea | Cantidad de imágenes | Porcentaje |
|---|---|---|
| Izquierda | 1630 | 10.86% |
| Central | 3258 | 21.71% |
| Derecha | 6327 | 42.17% |

TABLE I: Cantidad de imágenes sin presencia de carriles

Para los casos en donde la línea del carril no esta presente en la imagen, solo puede ocurrir en dos escenarios: todos los píxeles de la imagen pertenecen a a la clase 'fondo' o debido a las perspectiva en la que la imagen fue obtenida uno o mas carriles no se visualizan. Y debido a como fue generado el conjunto de imágenes para el entrenamiento de la CNN este ultimo escenario se presenta frecuentemente para las líneas central y derecha (ver Tabla I). En consecuencia a lo anterior, se observa que existe un desbalance en la cantidad de elementos en los cuales se encuentran presentes algunas de las clases a clasificar, lo cual puede ser razón para que la CNN tenga un desempeño inferior en la clasificación de los píxeles pertenecientes a estas dos clases mencionadas. En el caso restante donde la solo existe una pequeña cantidad de píxeles que representan las líneas de los carriles, se observa que la predicciones de la CNN tienden a realizar una mala clasificación de los píxeles (ver Figuras l-p en Anexos).

## V. Conclusiones

Se desarrollo e implemento una CNN capaz de clasificar las líneas de los carriles con un alto índice de Jaccard para la mayoría de los elementos del conjunto de entrenamiento presentado en III-C. A pesar de que se realizan buenas predicciones en la mayoría de los elementos, aun existen casos en los cuales la CNN no permite clasificar correctamente las líneas de los carriles (ver Anexos). Se cree que estas malas predicciones son debido a que existe un desbalance de clases

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

en el conjunto de entrenamiento, por lo que es necesario rehacer o incrementar los elementos en dicho conjunto para que las clases se encuentren balanceadas o como alternativa implementar técnicas para el aumento de datos que permitan realizar lo anteriormente mencionado. Independientemente de lo anterior, se concluye que las predicciones realizadas por la red son lo suficientemente buenas para ser utilizadas como base para la detección de las líneas de los carriles, ya que en la mayoría de los casos es posible determinar donde se encuentran estas líneas.

## REFERENCES

[1] D. Neven, B. De Brabandere, S. Georgoulis, M. Proesmans, and L. Van Gool, "Towards end-to-end lane detection: an instance segmentation approach," in *2018 IEEE intelligent vehicles symposium (IV)*. IEEE, 2018, pp. 286–291.

[2] Q. Zou, H. Jiang, Q. Dai, Y. Yue, L. Chen, and Q. Wang, "Robust lane detection from continuous driving scenes using deep neural networks," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 1, pp. 41–54, 2020.

[3] J. Kim and M. Lee, "Robust lane detection based on convolutional neural network and random sample consensus," 11 2014, pp. 454–461.

[4] T. Gupta, H. S. Sikchi, and D. Charkravarty, "Robust Lane Detection Using Multiple Features," *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*, vol. 2018-June, no. Iv, pp. 1470–1475, 2018.

[5] M. Teichmann, M. Weber, M. Zöllner, R. Cipolla, and R. Urtasun, "MultiNet: Real-time Joint Semantic Reasoning for Autonomous Driving," *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*, vol. 2018-June, pp. 1013–1020, 2018.

## VI. ANEXOS

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

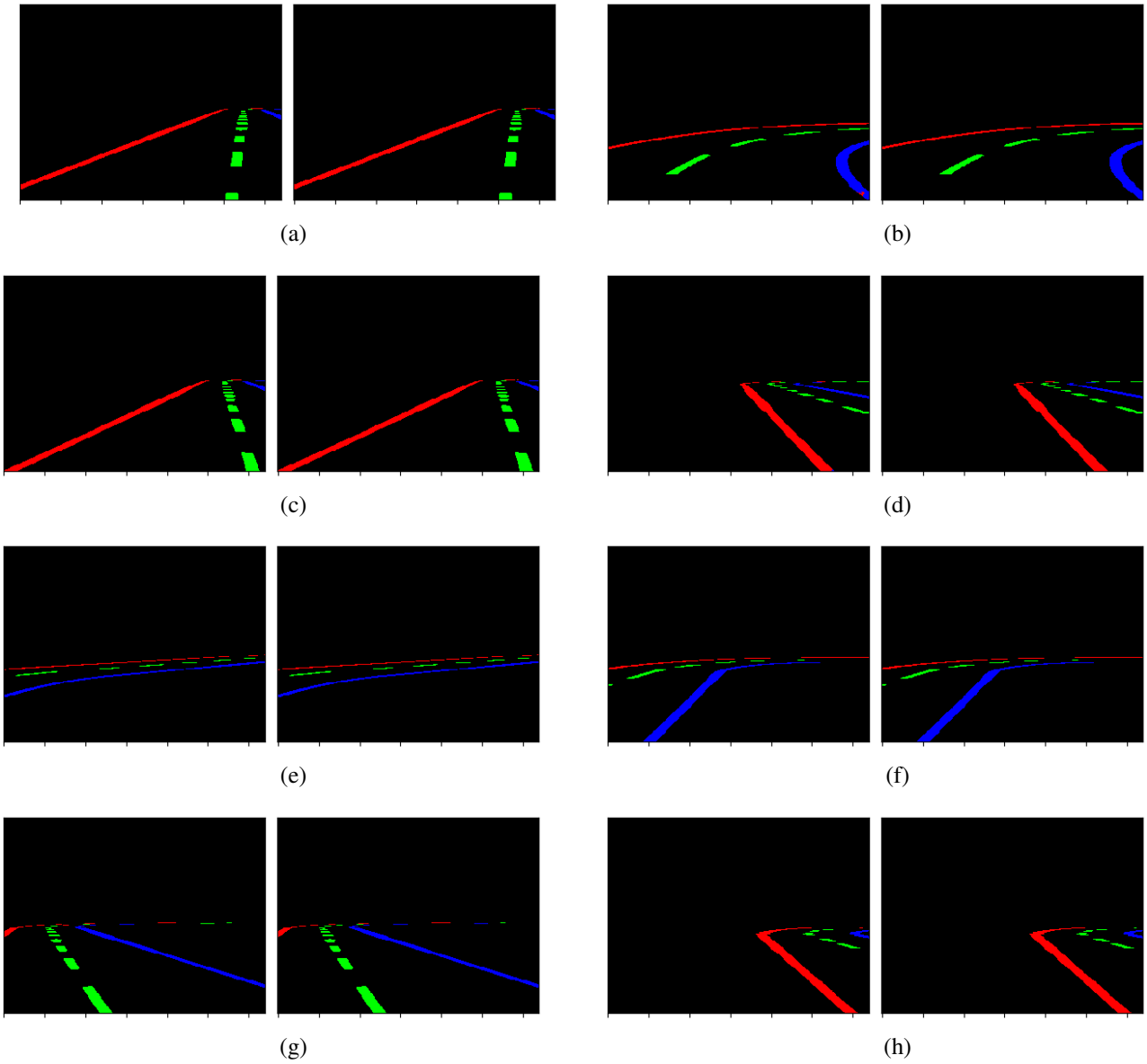
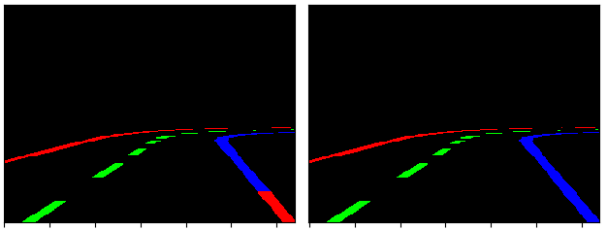
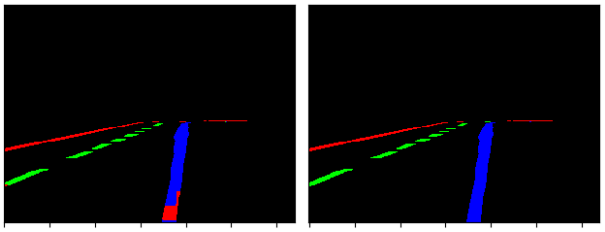



TABLE II: Predicciones con índice de Jaccard $\geq 0.9$. A la izquierda de cada figura se encuentra la predicción realizada por la CNN y a la derecha el etiquetado real.

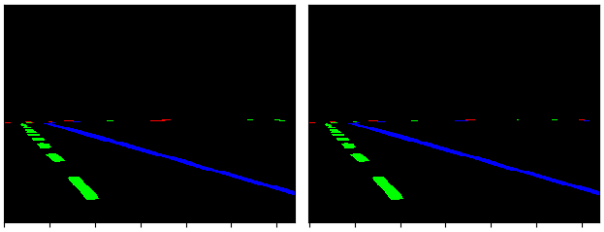
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México



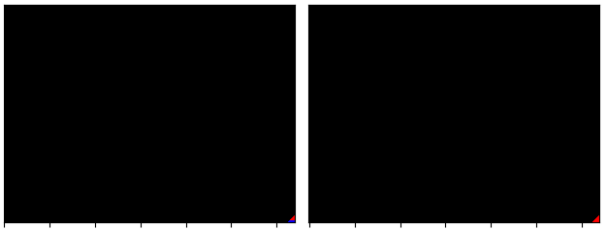
(i)



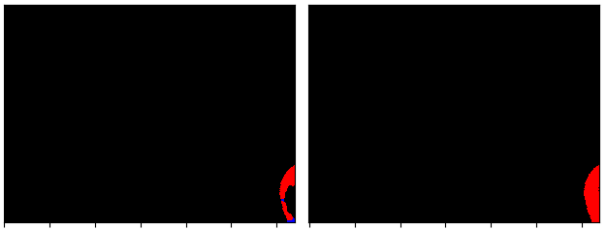
(j)



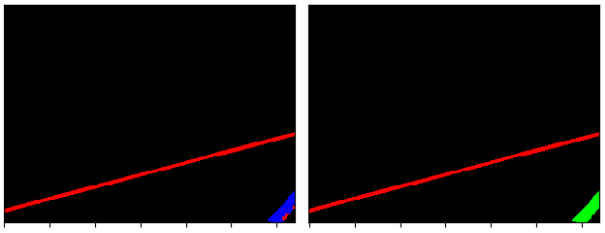
(k)



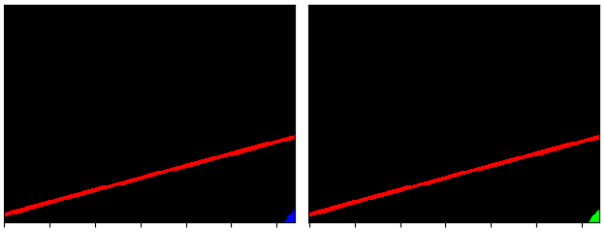
(l)



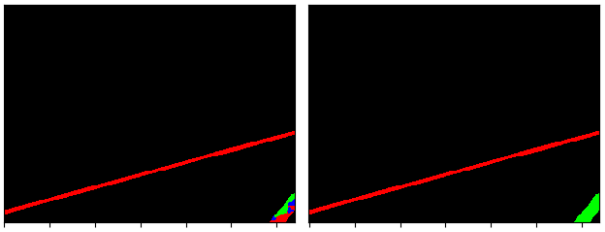
(m)



(n)



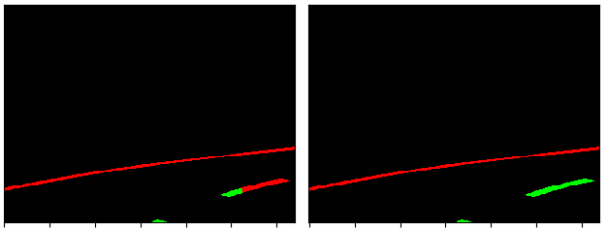
(o)



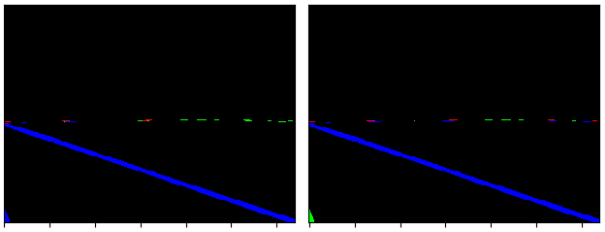
(p)

TABLE III: Predicciones con índice de Jaccard $< 0.9$.A la izquierda de cada figura se encuentra la predicción realizada por la CNN y a la derecha el etiquetado real.

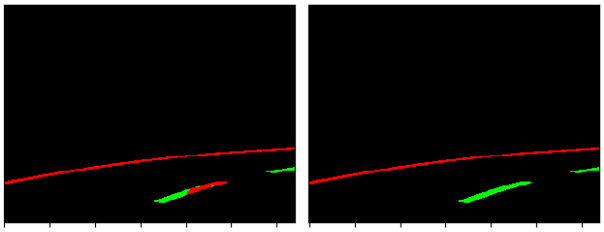
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México



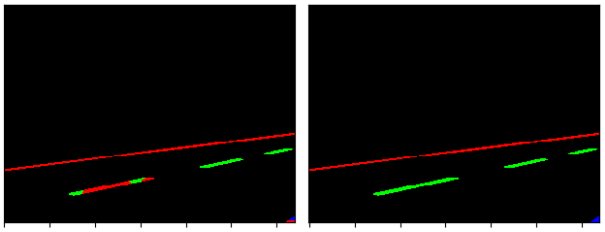
(q)



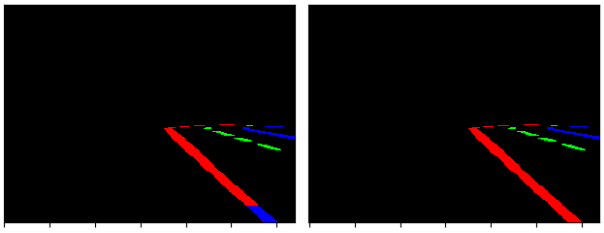
(r)



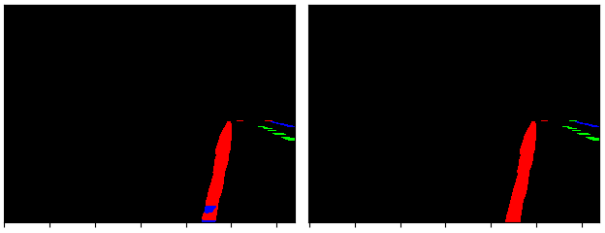
(s)



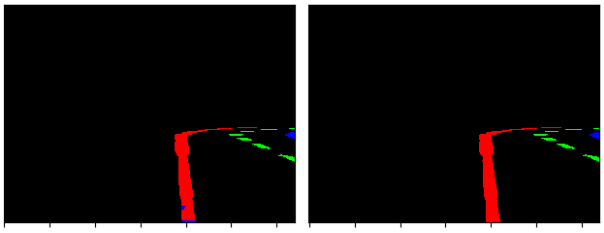
(t)



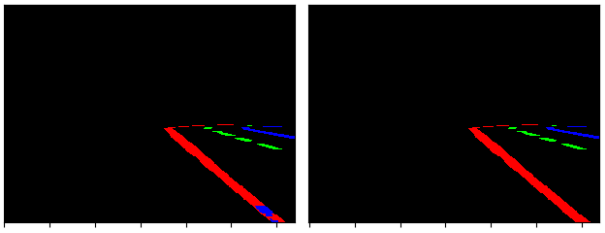
(u)



(v)



(w)



(x)

TABLE IV: Predicciones con índice de Jaccard $< 0.9$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Use of convolutional neural networks for autonomous driving maneuver

Oscar González-Miranda[1] and Juan M. Ibarra-Zannatha [1]

***Abstract*— In this work, we use a convolutional neural network (CNN) to process the lidar data of an autonomous vehicle and so get the steering angle to carry out the obstacle evasion and parking maneuvers. To introduce the lidar data and other measurements in a CNN, we map the $400$ polar vectors $(\rho_i, \phi_i)$ in a $20 \times 20$ normalized matrix; which the position of each element correspond to an angle $\phi_i$ and the elements are $\rho_i/\rho_{max}$. We probe the method in simulator developed by the Freie Universitt Berlin [1], getting a similar performance than a finite state machine, used as an expert driver in the training.**

## I. INTRODUCTION

One of the first works in which the autonomous parking is treated is made by Sugeno in 1984 [2]. In his work using a $1:10$ scale car, equipped with ultrasonic sensors, and successfully parking in a garage. He uses the data obtained by an expert driver to associate its membership functions to five variables and generate 42 control rules. So, this Fuzzy controller use three inputs: the position $(x, y)$ and the steering angle $\theta$; and two outputs: the angles of the front wheels $f$, $b$. Although his fuzzy controller has a similar performance than the expert driver, is necessary know the position $(x, y)$ from a static referential and it's difficult to measure with precision with sensors onboard. A work most recent is [3] which presents a parking geometric method implemented in the autonomous vehicle OSU-ACT from the Eindhoven University of Technology in The Netherlands. This method was successfully applied in the DARPA Urban Challenge 2007 and is capable of parking from any initial positions. This method not require expensive computation and use the information of sensors onboard as the lidar.

On the other hand, the work [4] shows experimental results to realize the passing maneuver (which has a trajectory similar to the obstacle evasion). Using an electrical van equipped with a tachometer and a differential GPS; the authors can implement a fuzzy controller able to realize the passing maneuver if *(i)* the left lane is free or there a slow car enough for there to be time to carry out the passing, and *(ii)* the autonomous vehicle is most faster than the car in front of. When some of these conditions does not meet, the fuzzy controller aborts the maneuver. In spite of the good results, the system is limited to a $35\ km/h$ speed and needs to know the position of all cars. Although this last is solved with the differential GPS, this sensor only works in a limited area.

[1]Automatic Control Departament, CINVESTAV, México. ogonzalez@ctrl.cinvestav.mx, jibarra@cinvestav.mx

In this work, we use a convolutional neural network (CNN) to process the lidar data onboard an autonomous vehicle and so get the steering angle to carry out the obstacle evasion and parking maneuvers. To generate a dataset with which train the CNN, we designed the trajectories of the car to realize each maneuver and stored the lidar data and the steering angle.

### A. Description of the AutoNOMOS

The vehicle used in this project is the AutoNOMOS of the Freie Universitt Berlin [1]. It is a $1:10$ scale car with traction in its 4 wheels acted by a brushless motor that reaches speeds $\pm 1000\ rpm$. Also, has an Ackerman's direction system controlled by a servomotor which allows changes of direction between $42°$ and $138°$; being $90°$ the neutral direction. The vehicle is equipped with a camera RGBD, a fisheye camera seeing up, a $360°$ lidar, and an IMU of 6 dof. Onboard is an Odroid XU4 computer with OS Ubuntu 16.04 and the software ROS Indigo. All controllers and data acquirement systems have implemented as nodes and topics in ROS. Some of these elements shown in figure 1.

### B. Trajectories for the obstacle evasion on road and parking

In figure 2 shows the change of the vehicle's position during the evasion maneuver. To carry out it, the car must change lane and then return when the obstacle is not on its right. The proposal trajectory is parallel to the car's lane and implies symmetric changes in steering. To move into the left lane, turn left first, then right, and then straight. Then, to return its lane, turn right, then left by the same amount. The parameters that define this trajectory are the steering angle of the car $st$ and the angle $\theta$ which is the difference between the yaw angle of the car when beginning the maneuver ($\psi_0$) and the yaw while the vehicle change from left to right ($\psi_t$) or vice versa.

To realize this maneuver in the minimum space and time it uses the maximum steering angle for each change of direction: $0°$ for turn left and $90°$ for turn right. In a real car, these changes are impossible but in the simulator, these steering angles are associate with a turning radius of $r = 0.63\ m$. The neutral direction is $90°$. In figure 2, $2L$ is the lateral displacement at the end of the second change of direction while $2x$ is longitudinal. Mathematically these are related with $r$ and $\theta$ as:

$$L = r(1 - \cos\theta), \quad x = r\sin\theta \tag{1}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

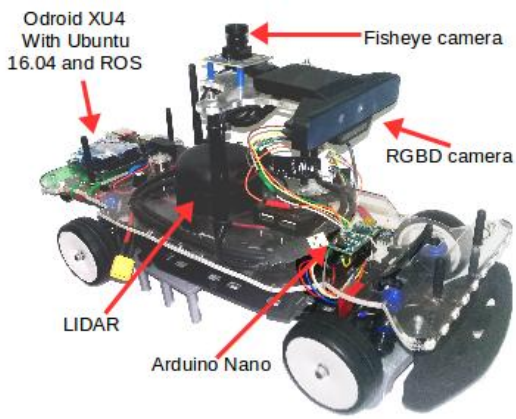



Fig. 1. Vehicle AutoNOMOS.

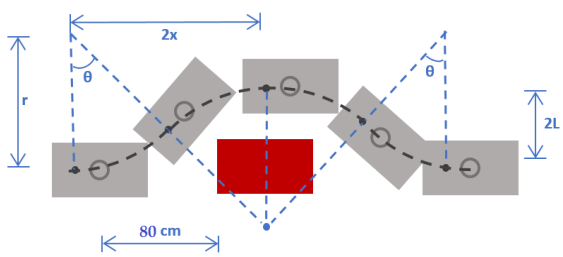



Fig. 2. Trajectory of the vehicle when it evades an obstacle in his lane.

As each lane has a width of 40 $cm$ and the AutoNOMOS has a width of 20 $cm$; $2L$ must be at least 30 $cm$, so that there 10 $cm$ of separation between the cars. So with $\theta = 45°$ we obtain $L = 18.5$ $cm$ and $x = 44.5$ $cm$.

The maneuver begins when the obstacle is at 80 $cm$ in front of the car and ends when the obstacle is behind. In figure 3 shows the flowchart which is implemented in the simulator. The visual controller referenced is an optimal controller that is used for lane-keeping, we presented it in previous works [5]. Although in the simulator we can obtain the yaw angle of the car and calculate $\theta$, in the real vehicle, this variable can't measure except if we use the fish-eye camera and put a marker that can be seen from anywhere. So instead of it, we measure the angle $\theta$ formed by the straight lines of the road and the longitudinal axis of the vehicle. For this reason, the images captured by the camera, are binarized and it applies to them a homography transform at the floor level. In figure 4 shows how measure $\theta$. The lidar data, $\theta$, and steering angles get are stored and used as a dataset to train the convolutional neural network.

To realize the parallel parking maneuver between two vehicles the car move in a trajectory similar to the evasion maneuver, as shown in figure 5. First it control its lateral distance from other cars with a proportional controller. At the same time measures the distance $D$ between the cars (using the distances $\rho_a$, $\rho_b$, the angle $\gamma$ and the cosine law, as shown in figure 6). If $D > 70$ $cm$, it lines up with the closest car and goes in reverse while turn right 180°.

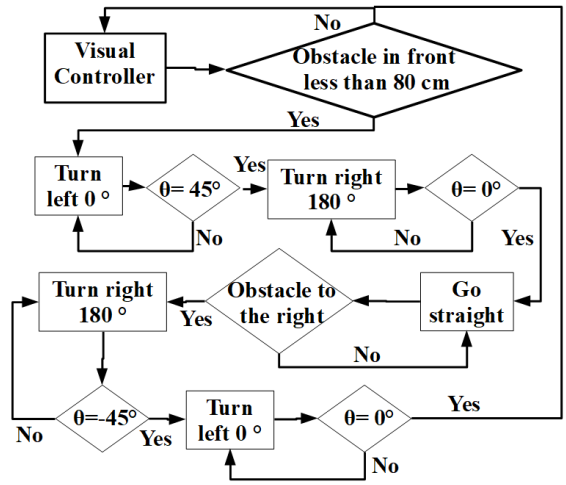



Fig. 3. Flowchart of the obstacle evasion maneuver.

When $\theta = 45°$, it turn left 0° and stop if the lidar detects an obstacle behind at a distance $Rb < 25$ $cm$ or if $\theta = 0°$. Finally, it goes straight until the car in front of is $Rf < 35$ $cm$. The flowchart of this maneuver is in figure 7 and was implemented in the simulator. Using this finite state machine, the parking is carried out for different initial positions of the car, while the lidar data and steering angles gets are stored and used as a dataset to train the convolutional neural network. In this case, the $\theta$ angles cannot be stored because there is no always straight line in the image.

In the first part of this maneuver, the lidar's data is used to model the cars as a line (using the RANSAC method to obtain $m$ and $b$), and the proportional controller is used to place the vehicle at a distance $d_{ref} = 20$ $cm$ from the line. This control law is:

$$st = \arctan(90 + K_p p + K_\theta \theta) \tag{2}$$

with $p = d - d_{ref}$, $d = |b|/\sqrt{m^2 + 1}$ and $\theta = -\arctan(m)$.

## II. TRAINING A CNN TO PROCESS THE LIDAR DATA

In the simulator of the AutoNOMOS, while the car drove at 29 $cm/s$, the obstacle evasion maneuver was performed 9 times varying the length of the obstacle and its position. In this way were obtained a batch of 3757 data with the lidar measurements, the $\theta$ angle, and the steering angle. To process this information with a CNN, the 400 vectors $(\rho_i, \phi_i)$ obtained by the lidar in each iteration, are mapped to a $20 \times 20$ matrix called $M_1$. So, each cell corresponds to an angle $\phi_i$ and the elements are $\rho_i/4$. On the other hand, the angle $\theta/45$ is multiplied by a matrix of ones of $20 \times 20$ to obtain $M_2$. Then the matrix used as input for the CNN is $M = (1/2)(M_1 + M_2)$. In figure 8 shows some examples of the maps obtained with this method. Using the steering angles as reference outputs, the CNN is trained to classify

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

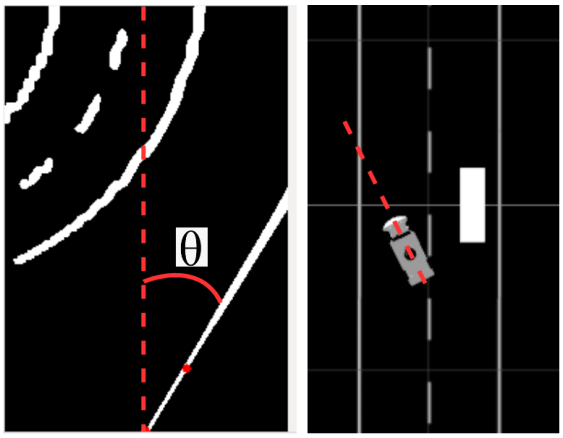



Fig. 4. Angle $\theta$ measured between the longitudinal ax of the car (red dash line) and the straight line of the road. On the left is the homography of the floor, applied to the images captured by the camera. On the right is the position of the car on the road.

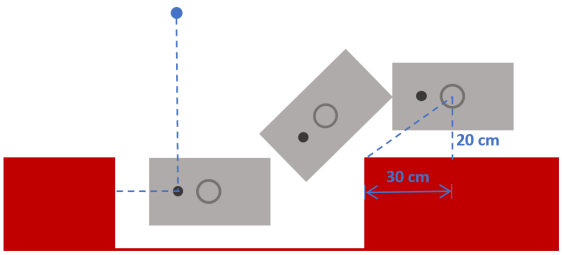



Fig. 5. Parking maneuver.

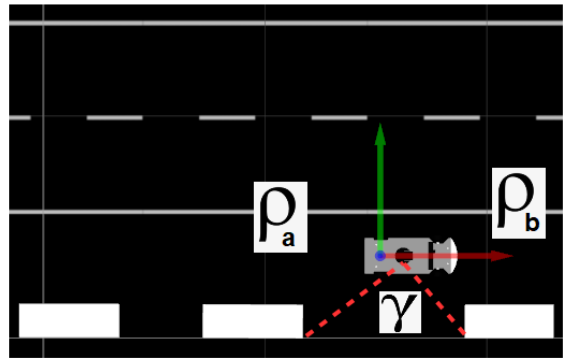



Fig. 6. Measurement of parking space $D$.

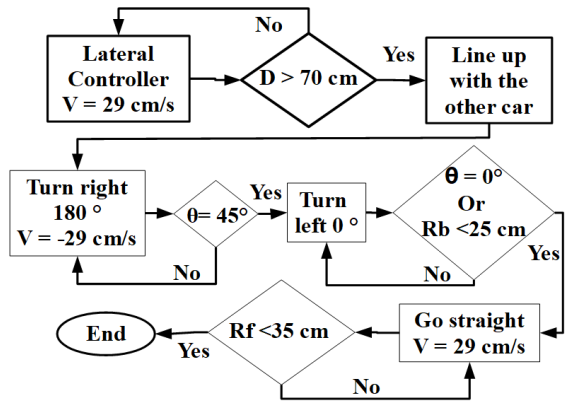



Fig. 7. Flowchart of the parking maneuver.

the inputs as 0°, 90°, or 180°.

The CNN trained for the obstacle evasion is summarized in table I. 1878 data were used for the training and 1879 for the validation. The loss function used was the cross-entropy and the trained was realized with Adam optimization algorithm with a learning parameter of 0.001. In figure 10 shows the confusion matrix obtained from the validation dataset.

Using the same architecture as in table I and the same hyperparameters a second CNN was trained for the parallel parking maneuver. In this case, the dataset consisted of a batch of lidar data and steering angles because $\theta$ cannot be measured. So, the input of this CNN is $M_1$. This dataset is a batch of 1070 data and uses 535 for the training and 535 for the validation. In figure shows the confusion matrix obtained from the validation dataset.

TABLE I

CNN USED FOR THE OBSTACLE EVASION AND PARKING.

| Layer (type) | Neurons | Kernel Shape | # Parameters | Output |
|---|---|---|---|---|
| Convolutional | 8 | $5 \times 5$ | 208 | $16 \times 16 \times 8$ |
| Max pooling | | $2 \times 2$ | 0 | $8 \times 8 \times 8$ |
| Convolutional | 16 | $3 \times 3$ | 1168 | $6 \times 6 \times 16$ |
| Max pooling | | $2 \times 2$ | 0 | $3 \times 3 \times 16$ |
| Dropout (0.5) | | | | $3 \times 3 \times 16$ |
| Flatten | | | 0 | $144 \times 1$ |
| Full conected | 100 | | 14500 | $100 \times 1$ |
| Full conected | 75 | | 7575 | $75 \times 1$ |
| Full conected | 35 | | 2660 | $35 \times 1$ |
| Output | 3 | | 108 | $3 \times 1$ |

## III. SIMULATIONS AND RESULTS

The simulator used was developed by the Freie Universitt Berlin and simulate an autonomous vehicle scale $1 : 10$ named AutoNOMOS. This simulator works on Gazebo and uses ROS Kinetic software to generate the sensors' information and control the vehicle. The CNN trained was implemented as a ROS node and the vehicle drove in a road as shown in figure 11. An optimal controller with visual feedback was used to lane-keeping [5], [6], [7]. In the half longest straight section of the road, a static box of $15 \times 40 \times 15$ $cm$ was positioned. In this way when the lidar detects an object in front of the car at a distance of 80 $cm$ or less, the evasion maneuver begins. In figure 12 compares the planned trajectory and the trajectory obtained using CNN. The error take values between $\pm 5.5$ $cm$ while the vehicle drive at 0.29 $m/s$.

In the same way, the CNN trained to carry out the parallel parking was implemented in ROS. In the simulator, many boxes were colocated in alignment and separated arbitrarily, just like in figure 13. Between two boxes there is a space greater than 70 $cm$. So, for different initial positions, the

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

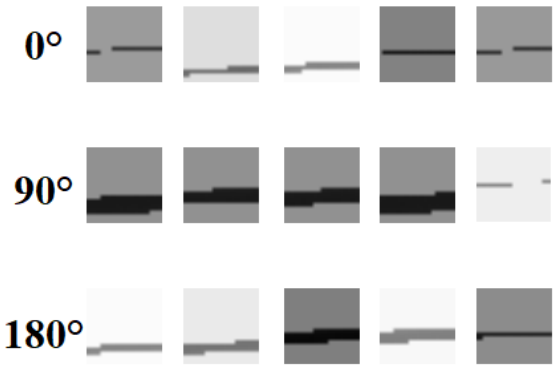



Fig. 8. Examples of maps obtained with this method.

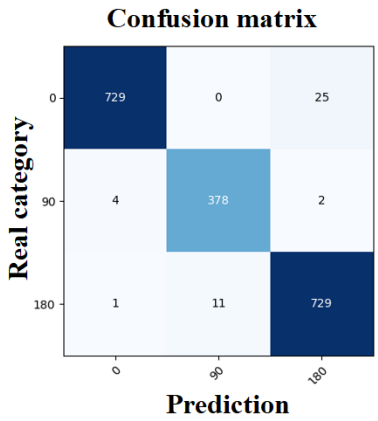



Fig. 9. Confusion matrix obtained from the validation dataset for the evasion maneuver.

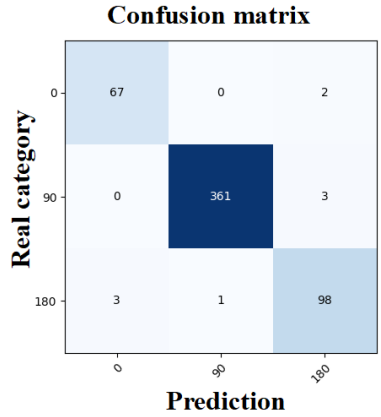



Fig. 10. Confusion matrix obtained from the validation dataset for the parking maneuver.

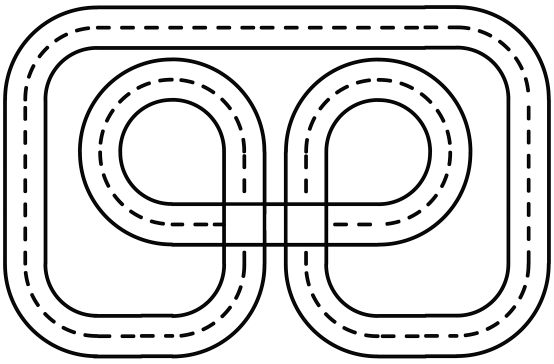


Fig. 11. Road where the AutoNOMOS was drive in the simulations.

AutoNOMOS control its distance from to the boxes and measure the space between those. When finds a space that it fits, the car change from the lateral controller to CNN and begin the parking. In figure 14 shows the trajectory draw with CNN and it is compared with the trajectory of the flowchart in figure 7. The maximum error between the trajectories is 7.1 $cm$.

## IV. CONCLUSIONS

We implement in an autonomous vehicle a method for process the lidar data with a CNN and use it to realize the obstacle evasion and parking maneuvers. Unlike the flowcharts implemented to realizing the reference trajectories, this method does not depend on yaw angle, because this can't measure easily since navigation reference. So this method uses only the onboard sensors to get information and so, realize the maneuvers mentioned, with similar performance. In future works, we'll explore how to use this method in combination with other sensors to realize other maneuvers as merge into a lane, turn in the road, etc.

## REFERENCES

[1] F. U. Berli, "Autonomos model." [Online]. Available: https://github.com/AutoModelCar/AutoModelCarWiki/wiki

[2] M. Sugeno and K. Murakami, "Fuzzy parking control of model car," in *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1984, pp. 902–903.

[3] M. F. Hsieh and U. Ozguner, "A parking algorithm for an autonomous vehicle," in *2008 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. IEEE, 2008, pp. 1155–1160.

[4] J. Pérez, V. Milanés, J. Alonso, E. Onieva, and T. De Pedro, "Adelantamiento con vehiculos autónomos en carreteras de doble sentido," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 7, no. 3, pp. 25–33, 2010.

[5] O. Gonzalez-Miranda, "Modelado y control de un vehiculo autonomo," Ph.D. dissertation, Cinvestav, 2019.

[6] O. Gonzalez-Miranda, S. Orozco-Soto, and J. Ibarra-Zannatha, "Potential field-based preview control of an autonomous vehicle using visual feedback." AMRob, 2019, pp. 13–15.

[7] O. González-Miranda, S. Orozco-Soto, and J. Ibarra-Zannatha, "Control basado en campos potenciales para un vehiculo autonomo usando realimentacion visual," vol. 148, no. 8, 2019, pp. 253–262.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

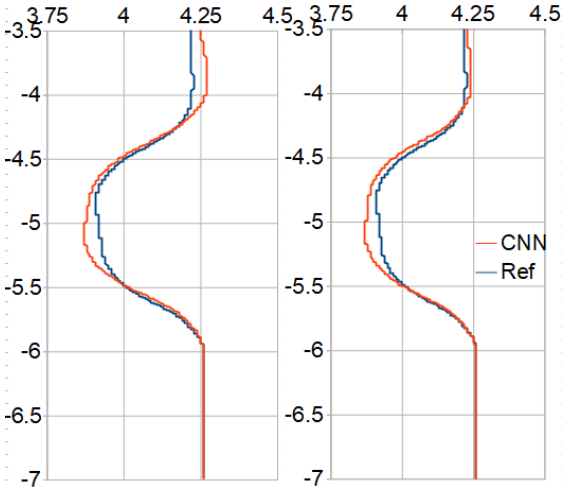



Fig. 12. Comparison between the trajectory planned (in blue) and the trajectory obtained by CNN when carrying out the evasion maneuver (in red), for two iterations.

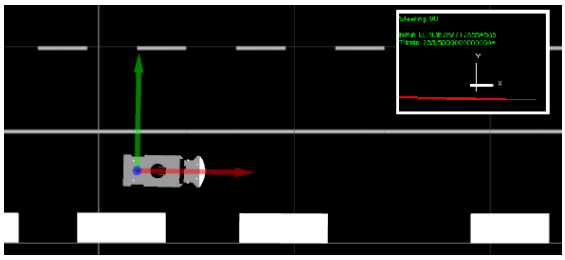


Fig. 13. Simulation of the parallel parkin maneuver.

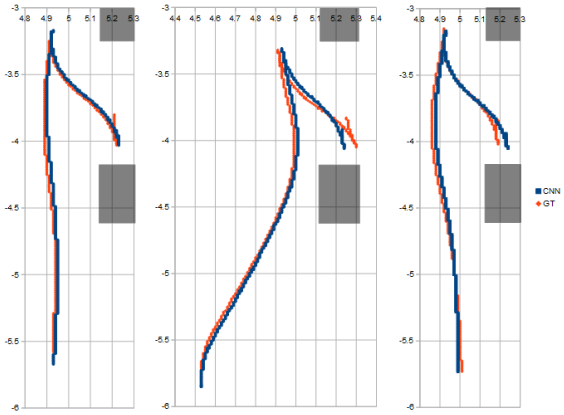



Fig. 14. Comparation between the trajectory planned (in red) and the trajectory obtained by the CNN when carry out the parking maneuver (in blue).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Reconocimiento de objetos y visión computacional para robótica móvil

Victor H. Diaz-Ramirez[1]

***Abstract*— La visión computacional permite representar e interpretar un entorno a través del procesamiento de imágenes capturadas con una cámara. En robótica móvil, la extracción de información confiable en un ambiente cambiante permite controlar de manera adecuada los actuadores de un robot durante una misión de navegación. En este trabajo, se presenta un algoritmo para el reconocimiento y rastreo de objetos aplicado a la asistencia en la navegación de un robot móvil terrestre. Se presentan fundamentos teóricos para solucionar el problema de rastreo de objetos por detección, basado en modelos de imagen y optimización de criterios de desempeño objetivos. Los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto, son evaluados y discutidos en el contexto de navegación autónoma.**

## I. INTRODUCCIÓN

La capacidad de un robot móvil para navegar por una ruta viable y segura es primordial en un gran numero aplicaciones. Por ejemplo, en procesos de fabricación industrial, vehículos autónomos, exploración espacial, entre otras. Los robots móviles, están equipados con diferentes sensores cuyo fin es el de capturar señales del entorno para un posterior análisis e interpretación. En las últimas décadas, la navegación de robots basada en visión computacional ha recibido un gran interés de investigación, debido a su gran accesibilidad, desempeño, y flexibilidad, para solucionar problemas en diferentes dominios de aplicación. Los principales desafíos en la navegación de un robot móvil a través de visión computacional son, presencia de ruido en las imágenes capturadas, objetos no deseados en la escena, iluminación no uniforme, y oclusión parcial de los objetos de interés. Estos problemas, deben resolverse mediante técnicas de procesamiento de imágenes que puedan adaptarse dinámicamente durante una misión de navegación.

A través de los años, se han propuesto diferentes métodos de reconocimiento y seguimiento de objetos para la asistencia en tareas de navegación de un robot móvil. Por ejemplo, la técnica de coincidencia de características locales se ha convertido en un enfoque ampliamente utilizado para la comparación de imágenes [1]. En este enfoque, es necesario extraer rasgos característicos de los objetos presentes en una escena observada, los cuales se representan de manera única a través de un vector numérico. Posteriormente, los rasgos extraídos son comparados con rasgos de referencia almacenados en memoria, para tomar decisiones respecto a la categoría a la que pertenece el objeto bajo análisis. En este contexto, el método de transformación de características invariables a escala (SIFT) [2], presenta una gran robustez a perturbaciones visuales de la escena. Sin embargo, este método posee una complejidad computacional alta. Por otro lado, el método de características robustas aceleradas (SURF) [3] es una alternativa computacionalmente eficiente respecto a SIFT. Es importante mencionar, que el principal inconveniente de los métodos existentes de comparación de características cuando se utilizan en tareas de navegación de robots, es que pueden no ser lo suficientemente robustos para la detección de objetos ni precisos para estimar la ubicación de los objetos detectados en presencia de ruido, fondo desordenado y condiciones de iluminación no uniforme. Una alternativa viable para abordar estas situaciones desafiantes es mediante el uso de métodos opto-digitales avanzados.

Los filtros de comparación de platillas, han recibido un gran interés de investigación en las últimas décadas debido a su gran utilidad en aplicaciones de procesamiento de imágenes y visión computacional [4]. Estos filtros, pueden estimar con alta precisión la posición de un objetivo en movimiento en escenas ruidosas, con tolerancia a iluminación no uniforme y modificaciones geométricas de un objetivo. Un filtro de comparación de plantillas, puede considerarse un sistema lineal cuya salida de intensidad es un estimador de máxima verosimilitud de las coordenadas del objetivo en la escena observada. Adicionalmente, los filtros de comparación de plantillas poséen una buena base formal y pueden implementarse en correladores opto-digitales híbridos, o en computadoras digitales de alto rendimiento para aplicaciones en tiempo real [5], [6]; por ejemplo, en control digital o planificación de rutas para robots móviles autónomos.

En este trabajo, se presenta un algoritmo para la detección y seguimiento de un objeto de referencia en una secuencia de imágenes, aplicado a la asistencia en la navegación de un robot móvil terrestre. Este algoritmo, se basa en un filtrado de comparación de plantillas que se adapta dinámicamente a cada cuadro de la escena observada. El desempeño del algoritmo propuesto es evaluado en términos de la eficiencia de detección y precisión en la ubicación de un objeto de referencia, en secuencias de video sintéticas y reales degradadas por ruido y modificaciones geométricas del objeto. Adicionalmente, el algoritmo propuesto es evaluado en el seguimiento de un objeto en movimiento utilizando un robot móvil terrestre.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. La sección II, presenta una revisión del método de comparación de plantillas para el reconocimiento de objetos. La sección III, describe el algoritmo propuesto para el reconocimiento y rastreo de objetos en una secuencia de imágenes. La sección IV, presenta los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto en el rastreo de un objeto en movimiento en escenas

[1]V. H. Diaz-Ramirez esta adscrito al Instituto Politécnico Nacional–CITEDI, Av. Instituto Politécnico Nacional 1310, Mesa de Otay, Tijuana, B.C., Mexico (vdiazr@ipn.mx).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

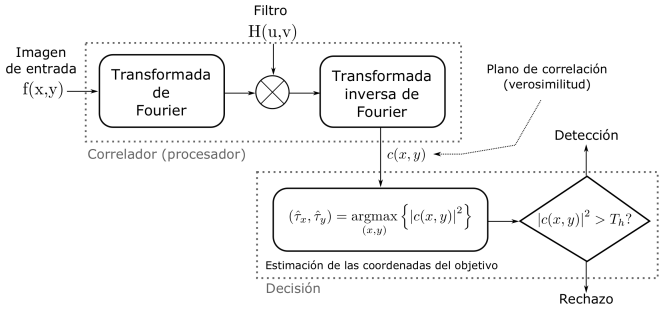



Fig. 1: Diagrama a bloques de un sistema opto-digital para el reconocimiento de objetos basado en la técnica de comparación de plantillas.

sintéticas y de la vida real. Estos resultados, son analizados en términos de la eficiencia de detección y precisión en el seguimiento de objetos. Finalmente, la sección V presenta las conclusiones.

## II. Reconocimiento de objetos basado en comparación de plantillas

El filtrado de comparación de plantillas es una técnica opto-digital que consiste en el diseño de un sistema lineal. Este enfoque permite la detección visual de un objeto y una localización precisa del mismo, en una imagen o video capturados. La Fig. 1 muestra un diagrama de bloques de un sistema básico de reconocimiento de objetos basado en comparación de plantillas.

De acuerdo con el sistema de reconocimiento de objetos ilustrado en la Fig. 1, se requiere un filtro $H(u,v)$ capaz de reconocer al objeto $t(x,y)$ y a su versiones geométricamente distorsionadas, que son esperadas en las imágenes de la escena.

A continuación, se presenta el procedimiento de diseño de un filtro de comparación de plantillas para el rastreo de objetos en escenas dinámicas. Sea $f(x,y)$ la imagen de una escena observada dada por

$$f(x,y) = t(x-\tau_x, y-\tau_y) + \bar{w}(x-\tau_x, y-\tau_y)b(x,y) + n(x,y), \tag{1}$$

donde $t(x,y)$ representa una vista única del objeto de referencia en la escena ubicada en las coordenadas desconocidas $(\tau_x, \tau_y)$, la función binaria $\bar{w}(x,y)$ representa la región de soporte inversa de $t(x,y)$, $b(x,y)$ es una imagen de fondo no traslapada, y $n(x,y)$ es ruido aditivo Gaussiano no correlacionado con valor esperado igual a cero. El objetivo principal del sistema mostrado en la Fig. 1 es detectar $t(x,y)$ en $f(x,y)$ y estimar las coordenadas $(\tau_x, \tau_y)$.

A lo largo de los años, se han propuesto varios diseños de filtros exitosos para el sistema de reconocimiento de objetos ilustrado en la Fig. 1 [7], [8]. Usualmente, se requiere un filtro robusto ante la presencia de un fondo desordenado, objetos falsos en la escena, y ruido aditivo. En este caso, la maximización del criterio pico a energía de salida (POE) [9] asegura un pico de correlación nítido en las coordenadas del objetivo en la escena, para el modelo de imagen no superpuesto dado en la Ec. (1). La POE esta dada por [9]

$$\mathrm{POE} = \frac{|\mathrm{E}\left\{c\left(\tau_x, \tau_y\right)\right\}|^2}{\mathrm{E}\left\{\left|c\left(x,y;\tau_x,\tau_y\right)\right|^2\right\}}, \tag{2}$$

donde $\mathrm{E}\{\cdot\}$ representa el operador de valor esperado, $c(x,y)$ es la correlación lineal a la salida del sistema, y el símbolo de barra denota un promediado espacial. El filtro que maximiza la POE asumiendo que la región de soporte $w(x,y)$ del objeto $t(x,y)$ es desconocida, esta dado por [10]

$$H^*(u,v) = \frac{T(u,v)}{|T(u,v)|^2 + P_b(u,v) + P_n(u,v)}, \tag{3}$$

donde $P_b(u,v)$ y $P_n(u,v)$ son funciones de densidad espectral del fondo con promedio cero $b_0(x,y) = b(x,y) - \mu_b$ y el ruido aditivo $n(x,y)$, respectivamente, y $\mu_b$ es el valor esperado de $b(x,y)$. El filtro dado en la Ec. (3) es robusto a la presencia de ruido aditivo y no superpuesto en la escena. Sin embargo, su rendimiento puede verse disminuido si el objetivo presenta modificaciones de apariencia debido a variaciones geométricas o iluminación no uniforme. Un enfoque directo para aminorar esta deficiencia es la construcción de un banco de filtros en el que cada filtro detecte una vista única del objetivo esperado en la escena. Nótese que este enfoque aumentaría considerablemente la complejidad del sistema de reconocimiento de objetos.

Alternativamente, una solución factible que permite reconocer diferentes vistas del objetivo con un solo filtro, es mediante el uso de funciones discriminantes sintéticas (SDF) [8], [11]. El enfoque SDF es una técnica conocida para el diseño de filtros combinados compuestos para problemas de reconocimiento de patrones con tolerancia a distorsiones. Sea $T = \{T_1(u,v), T_2(u,v), \cdots, T_{N_t}(u,v)\}$ un conjunto de entrenamiento que contiene las transformadas de Fourier de diferentes vistas del objeto a ser reconocido. Además, sea $R = \{R_1(u,v), R_2(u,v), \cdots, R_{N_f}(u,v)\}$ un conjunto que contiene las transformadas de Fourier de patrones conocidos para ser rechazados. Para mayor facilidad, se asumirá que todas las imágenes de entrenamiento tienen un tamaño de $N_r \times N_c$ píxeles. Sea $H = \{H_1(u,v), H_2(u,v), \cdots, H_{Nt}(u,v)\}$ un conjunto que contiene filtros construidos con la Ec. (3), diseñados para reconocer una vista única del objetivo en el conjunto $T$. La respuesta en frecuencia de un filtro SDF, puede expresarse por

$$H_{CX}(u,v) = \sum_{i=1}^{N_t} a_i H_i(u,v) + \sum_{i=N_t+1}^{N_t+N_f} a_i R_{i-N_t}(u,v), \tag{4}$$

donde los coeficientes $a_i$ se eligen para cumplir con valores preespecificados de correlación de salida $u_i$ en el origen para cada patrón del conjunto $S = T \cup R$, dados por

$$u_i = \begin{cases} \langle T_i(u,v), H_{CX}(u,v)\rangle, & i \leq N_t \\ \langle R_i(u,v), H_{CX}(u,v)\rangle, & N_t < i \leq (N_t + N_f), \end{cases} \tag{5}$$

donde $\langle\cdot\rangle$ es el producto interior.

Ahora, consideremos una matriz $\mathbf{S}$ con $N_t + N_f$ columnas, donde sus primeras $N_t$ columnas están formadas por los

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

elementos de las vistas del objetivo en el conjunto $T$ y las $N_f$ columnas restantes están formadas por los elementos de patrones no deseados en $R$. De manera similar, sea $\mathbf{Q}$ una matriz donde sus primeras $N_t$ columnas están formadas por los elementos de los filtros contenidos en el conjunto $H$ y las $N_f$ columnas restantes están formadas por los elementos de patrones no deseados en el conjunto $R$. Sea $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, \cdots, a_{N_t+N_f}\right]^T$ un vector formado por los coeficientes desconocidos $a_i$ dados en la Ec. (4). El filtro SDF compuesto definido en la Ec. (4) y las restricciones dadas en la Ec. (5), se pueden reescribir utilizando una notación matriz-vectorial como

$$\mathbf{h}_{CX} = \mathbf{Q}\mathbf{a}, \tag{6}$$

y

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^{+}\mathbf{h}_{CX}, \tag{7}$$

respectivamente, donde el superíndice $[\cdot]^{+}$ representa transpuesto-conjugado. Al sustituir la Ec. (6) en la Ec. (7), se obtiene

$$\mathbf{a} = [\mathbf{S}^{+}\mathbf{Q}]^{-1}\mathbf{u}. \tag{8}$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. (8) en la Ec. (6), el vector filtro resultante es

$$\mathbf{h}_{CX} = \mathbf{Q}[\mathbf{S}^{+}\mathbf{Q}]^{-1}\mathbf{u}. \tag{9}$$

Para un problema de reconocimiento de objetos de dos clases, las restricciones impuestas al filtro de la Ec. (9) pueden especificarse como $\mathbf{u} = [1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0]^T$, donde se asigna un valor igual a la unidad a cada vista del objeto a reconocer y un valor igual a cero para cualquier patrón no deseado.R

## III. ALGORITMO PROPUESTO PARA EL RASTREO DE OBJETOS

En esta sección se describe el algoritmo propuesto para el rastreo de objetos basado en comparación de plantillas. El algoritmo comienza con un paso de inicialización donde el objeto de referencia es definido por el usuario en una imagen de la escena observada. Posteriormente, el algoritmo genera diferentes versiones geométricamente modificadas de la imagen del objeto de referencia y construye los conjuntos de entrenamiento $T$ y $H$. Si se cuenta con información *a-priori* de patrones no deseados para ser rechazados, como objetos no deseados o fragmentos del fondo, se pueden utilizar para construir el conjunto $R$. Posteriormente, se construye un filtro compuesto utilizando la Ec. (9), como se describe en la sección II. El siguiente paso es realizar la correlación lineal entre el filtro construido y una ventana de seguimiento actualizada (tomada de un nuevo cuadro de la escena), y calcular la capacidad de discriminación (DC) del plano de correlación resultante.

La DC es una medida para caracterizar la capacidad de un filtro para distinguir un objeto de interés de objetos no deseados. La DC se define como [12]

$$DC = 1 - \frac{|c^b|^2}{|c^t|^2}, \tag{10}$$

donde $c^b$ es el valor de correlación con intensidad máxima en el área de fondo y $c^t$ es el valor de intensidad del pico de correlación generado por el objetivo. Un valor de DC cercano a la unidad indica que el filtro tiene una buena capacidad para distinguir entre el objetivo y cualquier objeto falso. Valores negativos de la DC indican que el filtro no puede detectar al objetivo. A continuación, si la DC resultante es mayor que un umbral preespecificado $(DC > DC_{th})$, entonces, el objetivo se considera detectado y el filtro compuesto se actualiza utilizando como nueva imagen de referencia, al objeto detectado en el marco actual. En caso contrario, el objeto se considera no detectado. Se puede notar que el filtro compuesto construido se actualiza dinámicamente en cada cuadro de la escena sin la necesidad de ningún proceso de entrenamiento supervisado fuera de línea. La operación del algoritmo propuesto se resume en los siguientes pasos (P):

- P1 Leer un cuadro $f_k(x,y)$ de la secuencia de video capturada y elegir el objeto de referencia por medio de una pequeña ventana $p_k(x,y)$.
- P2 Generar de forma sintética diferentes versiones geométricamente distorsionadas de $p_k(x,y)$ y construir los conjuntos de entrenamiento $T$ y $H$.
- P3 Sintetizar un filtro compuesto $H_k(u,v)$ (usando la Ec. (9)) entrenado para los conjuntos $T$ y $H$, y construir un filtro adaptativo como a continuación:

$$H_k(u,v) = \alpha H_k(u,v) + (1-\alpha)H_{k-1}(u,v), \tag{11}$$

  donde $\alpha \in (0,1)$ es un escalar, y $H_{k-1}(u,v)$ es el filtro construido para el cuadro anterior inmediato. Nótese que $H_{k-1}(u,v) = 0$ cuando $k = 1$.
- P4 Calcular la correlación lineal $c_k(x,y)$ utilizando el sistema de la Fig. 1, asumiendo como respuesta en frecuencia el filtro adaptativo $H_k(u,v)$ y la ventana $p_k(x,y)$ como entrada. A continuación, calcular la DC usando la Ec. (10).
- P5 Si $(DC > DC_{th})$, calcular la ubicación actual del objetivo como $(\hat{\tau}_x, \hat{\tau}_y) = \underset{x,y}{argmax}\left\{\left|c_k(x,y)^2\right|\right\}$. De lo contrario, capturar un nuevo cuadro de la escena y actualizar la ventana $p_k(x,y)$ colocando su origen en la estimación actual de la ubicación del objetivo. A continuación, ir al paso 2.

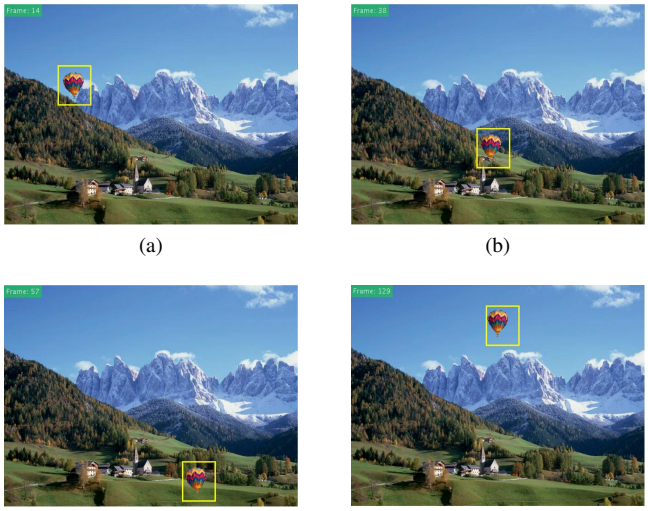
## IV. RESULTADOS

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al evaluar el algoritmo propuesto en el reconocimiento y rastreo de un objeto en movimiento. Primeramente, el algoritmo desarrollado es evaluado utilizando imágenes de prueba sintéticas. Posteriormente, el algoritmo desarrollado es evaluado al procesar secuencias de video de la vida real capturadas con una cámara montada en un robot móvil terrestre.

### *A. Evaluación del algoritmo en escenas sintéticas*

El desempeño del algoritmo propuesto es evaluado en términos de la eficiencia de detección y precisión de ubicación de un objeto de interés. La eficiencia de detección

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México



(a) (b) (c) (d)

Fig. 2: Ejemplos de cuadros de una secuencia de prueba sintética utilizados para el rastreo de objetos.

de objetos se cuantifica por medio de la DC dada en la Ec. (10), mientras que la precisión de la ubicación del objeto se caracteriza por el error de localización (LE), dado por [13]

$$LE = \sqrt{(\tau_x - \hat{\tau}_x)^2 - (\tau_y - \hat{\tau}_y)^2}, \tag{12}$$

donde $(\tau_x, \tau_y)$ y $(\hat{\tau}_x, \hat{\tau}_y)$ son las coordenadas exactas y estimadas de la localización del objeto de referencia en la escena. La Fig. 2 muestra ejemplos de diferentes cuadros de una secuencia de imágenes de prueba. Esta secuencia contiene 30 cuadros de imagen a color, cada uno con un tamaño de $640 \times 480$ pixeles. El objeto de referencia puede girar libremente dentro de un intervalo de $\pm 10$ grados. Además, el objeto de referencia puede presentar cambios de escala con un factor de $[0.8 - 1.2]$. El algoritmo desarrollado, se implementó en el lenguaje de programación Python en una computadora de escritorio Intel-i7 de 2,40 GHz con 8 GB de memoria RAM. La Tabla I muestra los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto al procesar la secuencia de imágenes degradada por ruido aditivo con diferentes valores de relación señal a ruido (SNR). De acuerdo con los resultados obtenidos, el algoritmo propuesto es capaz de detectar al objeto de referencia en todos los cuadros de la escena, aun en la presencia de ruido aditivo con valores de SNR de 100 dB y 50 dB. Con el 95% de confianza, el algoritmo propuesto logra una buena eficiencia en la detección del objetivo dado en términos de la DC, en la presencia de ruido aditivo con valores de SNR de 100 dB y 50 dB. Nótese que el algoritmo es capaz de detectar de manera confiable al objeto de referencia en la presencia de ruido aditivo con un valor de SNR de 20 dB. Adicionalmente, se puede observar que el algoritmo propuesto es capaz de localizar de forma precisa las coordenadas del objeto de referencia en la escena, al permitir errores de localización bajos en los cuadros de la secuencia de prueba.

Fig. 3: Robot móvil terrestre utilizado en los experimentos.

### B. *Evaluación del algoritmo en un robot móvil terrestre*

En esta sección, se evalúa el desempeño del algoritmo propuesto al procesar secuencias de video capturadas por una cámara montada en un robot móvil terrestre. Para este experimento, se utilizó un robot móvil tipo uniciclo AmigoBot de la empresa Adept. Este robot se equipó con una cámara Logitech C920 y una unidad de procesamiento NVIDIA Jetson TK1. La Fig. 3 muestra imágenes del robot móvil utilizado. El algoritmo desarrollado, se implementó en la unidad de procesamiento NVIDIA Jetson TK1, utilizando el lenguaje de programación Python y el sistema operativo Linux. El robot fue programado para desplazarse y orientarse de forma que mantenga al objeto de referencia observado por la cámara en el centro de las imágenes capturadas. Los resultados obtenidos se presentan en términos de la DC y velocidad de procesamiento caracterizada por los cuadros por segundo (FPS) procesados.

La secuencia de prueba contiene 365 cuadros a color, en donde cada cuadro tiene un tamaño de $640 \times 480$ pixeles. El objeto de referencia es seleccionado por el usuario como se muestra en la Fig. 4(a). El seguimiento del objetivo se indica con un recuadro de color amarillo, como se ilustra en la Fig. 4(c) y Fig. 4(e). En la secuencia de video de prueba, el objeto de referencia se mueve libremente dentro de la zona de visión de la cámara para producir cambios de apariencia debido a escalamiento, desplazamiento y orientación. La posición del objeto de referencia en el espacio físico tridimensional observado (Fig. 4(b) y Fig. 4(b)) ocasiona que el robot modifique su posición y orientación para mantener al objeto observado en el centro de la escena. Adicionalmente, cuando el objeto de referencia se encuentra a una distancia lejana respecto a la posición de la cámara, el robot se desplaza acercándose al objeto hasta ubicarse a una distancia pre-

TABLE I: Desempeño del algoritmo propuesto con el 95% de confianza al procesar una secuencia de imágenes sintéticas degradada con ruido aditivo con diferentes valores de SNR.

| **Ruido aditivo SNR** | **Detectados** | **DC** | **LE** |
|---|---|---|---|
| 100 dB | 30 | 0.91± 0.05 | 0.22± 0.1 |
| 50 dB | 30 | 0.87± 0.2 | 1.28± 0.5 |
| 20 dB | 28 | 0.71± 0.4 | 1.83± 2.1 |

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

definida. Finalmente, se evaluó la eficiencia de detección del algoritmo propuesto en términos de la DC, al procesar secuencias de imágenes de la vida real con el robot móvil. Con una confianza del 95% el algoritmo alcanzó un valor de $\mathrm{DC} = 0.82 \pm 0.21$. Esto indica que el algoritmo desarrollado basado en comparación de plantillas es confiable para el reconocimiento y rastreo de un objeto en movimiento en la presencia de ruido y distorsiones geométricas. Adicionalmente, se evaluó la velocidad de procesamiento del algoritmo propuesto utilizando el robot móvil. En este experimento, se alcanzó una velocidad de procesamiento promedio de 29.2 FPS. Esto significa que el algoritmo propuesto es viable para ser utilizado en aplicaciones de tiempo real.

## V. CONCLUSIONES

Se desarrolló un algoritmo basado en un filtro adaptativo de comparación de plantillas para el reconocimiento y rastreo de un objeto en movimiento. El algoritmo desarrollado se implementó en un robot móvil terrestre tipo uniciclo para el seguimiento de un objeto de referencia seleccionado por el usuario. El algoritmo desarrollado demostró ser robusto a cambios de pose y escala del objeto de referencia, asi como a la presencia de iluminación no homogénea, ruido aditivo, y ruido disjunto. Se verificó de manera experimental que el algoritmo desarrollado puede utilizarse en aplicaciones de tiempo real. El algoritmo desarrollado posee un gran potencial para el desarrollo de nuevos sistemas de visión computacional para navegación de robots, en tareas esenciales como reconocimiento de obstáculos, construcción de mapas, planeación de rutas, entre otras. Como trabajo futuro, se contempla mejorar la robustez del algoritmo a la presencia de perturbaciones desafiantes de la escena, asi como plantear, desarrollar e implementar técnicas formales de control automático que utilicen como referencia las imáagenes de entrada capturadas por la cámara montada en el robot.

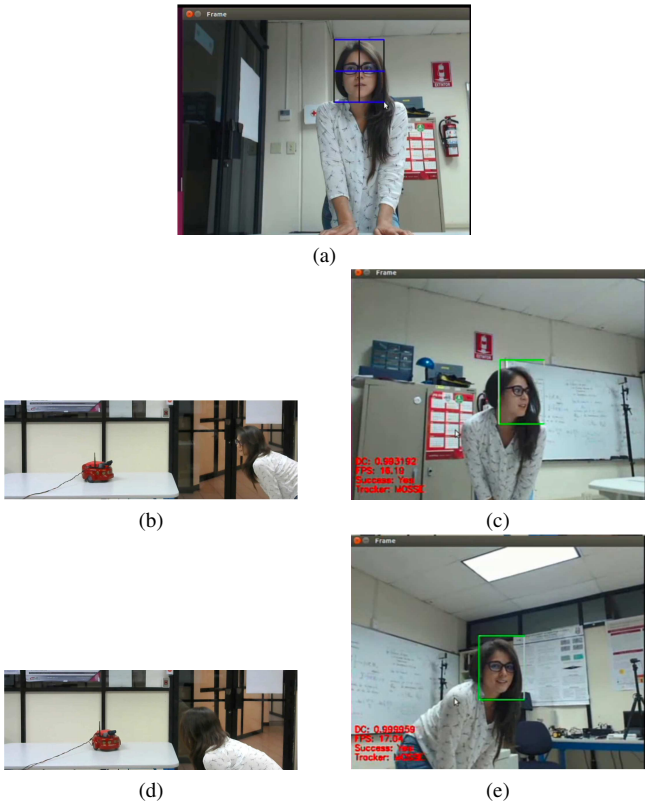



Fig. 4: Seguimiento de un objeto de referencia con un robot móvil terrestre. (a) Objeto de referencia seleccionado por el usuario. (b),(d) Imágenes del robot móvil terrestre. (c),(e) Detección y seguimiento del objeto de referencia con el algoritmo propuesto.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por el Instituto Politécnico Nacional, Secretaría de Investigación y Posgrado a través del proyecto SIP20201807.

## REFERENCES

[1] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork, *Pattern classification*. John Wiley & Sons, 2012.

[2] D. G. Lowe, "Distinctive image features from scale-invariant keypoints," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 60, no. 2, pp. 91–110, 2004.

[3] H. Bay, T. Tuytelaars, and L. V. Gool, "Surf: Speeded up robust features," in *In ECCV*, 2006, pp. 404–417.

[4] V. H. Diaz-Ramirez, L. Trujillo, and S. Pinto-Fernandez, "Advances in adaptive composite filters for object recognition," in *Advances in Object Recognition Systems*, I. Kypraios, Ed. Rijeka: IntechOpen, 2012, ch. 5. [Online]. Available: https://doi.org/10.5772/35708

[5] Q. Wang, A. Alfalou, and C. Brosseau, "New perspectives in face correlation research: A tutorial," *Adv. Opt. Photon.*, vol. 9, no. 1, pp. 1–78, 2017.

[6] J. E. Hernandez-Beltran, V. H. Diaz-Ramirez, and R. Juarez-Salazar, "Adaptive matched filter for implicit-target recognition: application in three-dimensional reconstruction," *Appl. Opt.*, vol. 58, no. 32, pp. 8920–8930, Nov 2019.

[7] B. V. K. Vijaya-Kumar, "Tutorial survey of composite filter designs for optical correlators," *Appl. Opt.*, vol. 31, no. 23, pp. 4773–4801, 1992.

[8] R. Kerekes and B. V. K. Vijaya-Kumar, "Selecting a composite correlation filter design: A survey and comparative study," *Opt. Eng.*, vol. 47, no. 6, 2008.

[9] E. M. Ramos-Michel and V. Kober, "Design of correlation filters for recognition of linearly distorted objects in linearly degraded scenes," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 24, no. 11, pp. 3403–3417, Nov 2007.

[10] L. Gaxiola, V. Diaz-Ramirez, J. Tapia, and P. García-Martínez, "Target tracking with dynamically adaptive correlation," *Opt. Commun.*, vol. 365, pp. 140–149, 2016.

[11] A. Mahalanobis, B. V. K. Vijaya-Kumar, S. Song, S. Sims, and J. Epperson, "Unconstrained correlation filters," *Appl. Opt.*, vol. 33, no. 17, pp. 3751–3759, 1994.

[12] P. M. Aguilar-González and V. Kober, "Design of correlation filters for pattern recognition using a noisy reference," *Opt. Commun.*, vol. 285, no. 5, pp. 574 – 583, 2012.

[13] V. Kober and J. Campos, "Accuracy of location measurement of a noisy target in a nonoverlapping background," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, no. 8, pp. 1653–1666, 1996.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 6

## *Robótica médica, de asistencia y reabilitación*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Diseño, simulación y control de un exoesqueleto robótico bípedo virtual con señales electromiográficas a partir de eventos generados por un clasificador basado en redes neuronales diferenciales

R. Pérez-San Lázaro[1,3] D. Llorente[2], I. Salgado[2], M. Ballesteros[1], I. Chairez[1,3]

***Resumen*— Este trabajo presenta el diseño, simulación y control por eventos del modelo virtual de un exoesqueleto robótico bípedo para rehabilitación en miembros inferiores de niños mexicanos. El algoritmo de control regula el movimiento del exoesqueleto a partir de la salida obtenida de un clasificador basado en redes neuronales diferenciales cuya entrada son las señales de electromiografía en los biceps braquial del usuario. El algoritmo de control se basa en la acción proporcional derivativa (PD) con base en el error de seguimiento. La estrategia planteada ejecuta el control basado en eventos dependiendo de una ventana de tiempo definida por el ciclo de marcha propuesto para el exoesqueleto. Como enfoque inicial, se proponen cuatro casos como salida del clasificador, los cuales representan los eventos que accionan la ejecución del algoritmo de control seleccionado en el dispositivo.**

***Palabras clave* - Exoesqueleto robótico, redes neuronales diferenciales, electromiografía, control proporcional derivativo**

## I. INTRODUCCIÓN

Un robot se puede definir como un dispositivo que tiene la capacidad de llevar a cabo una serie de acciones complejas de manera automática, las cuales se pueden programar a través de una computadora [1]. En años recientes, debido al desarrollo tecnológico que se ha presentado de manera exponencial, la robótica ha tenido un desarrollo paralelo, generando cuatro principales grupos de robots, definidos por manipuladores, vehículos, sistemas humano-máquina y sistemas biológicamente inspirados [2]. Dentro de los sistemas humano-máquina, se encuentran los exoesqueletos, los cuales son dispositivos de aplicación externa que tienen la capacidad de aumentar o restaurar las habilidades del usuario. Por lo anterior, resulta común encontrar aplicaciones médicas y militares [3].

En el caso de los exoesqueletos con aplicaciones médicas, resulta común el empleo de estos dispositivos como medios de rehabilitación que pueden mejorar el estado de salud de los pacientes que sufren de algún tipo de padecimientos neuromusculares, especialmente para la rehabilitación de miembros inferiores [4]. En relación con los exoesqueletos para rehabilitación en miembros inferiores, su implementación se realiza para pacientes con problemas de autonomía motriz, mediante la repetición asistida de ejercicios planificados, lo cual permite al paciente recuperar de manera gradual el control neural y muscular de sus extremidades, con base en el principio de neuroplasticidad [5], aplicable para pacientes que sufren accidentes cerebrales o de la enfermedad de Parkinson, entre otras [6].

Adicionalmente, debido al avance tecnológico de los últimos años, se han propuesto sistemas que involucren trabajos colaborativos con el usuario. Una de las maneras de implementar este tipo de sistemas consiste en el empleo de señales biológicas del cuerpo, las cuales son obtenidas a través de sensores, como las señales de electrooculografía (EOG), electromiografía (EMG) y elecroencefalografía (EEG), entre otras [7]. El análisis correcto de estas señales emplea comunmente algoritmos de inteligencia artificial (AI), con el objetivo de imitar la manera en la que el ser humano piensa y actúa [8]. Algunos ejemplos de AI incluyen el razonamiento basado en casos, modelos de lógica difusa y sistemas de redes neuronales artificiales, entre otros [9]. Recientemente, las redes neuronales han sido implementadas para reconocimiento de patrones, clasificación e identificación de sistemas [10]. Dentro del grupo de las redes neuronales, se encuentran las redes neuronales diferenciales, las cuales se modelan a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales, mejorando así su robustez ante incertidumbres en las señales de entrada, y en el caso particular de la clasificación de señales, logrando un porcentaje de precisión mayor al 95 % [11]. Existen estudios que mencionan el aumento del desempeño de una red neuronal si se incrementa la complejidad de su estructura, lo cual se logra añadiendo capas internas a la red [12].

El trabajo presenta los resultados de la simulación de un sistema de un exoesqueleto robótico bípedo en conjunto con un clasificador basado en redes neuronales profundas, con el cual se realiza la clasificación de las señales de electromiografía obtenidas del biceps braquial del usuario, para posteriormente, lograr definir una secuencia de movimiento a partir de los patrones en las señales obtenidas, con el objetivo de lograr un primer enfoque hacia el trabajo colaborativo entre un sistema robótico bípedo y el usuario, a través de músculos con la fuerza suficiente para generar patrones específicos y reconocibles.

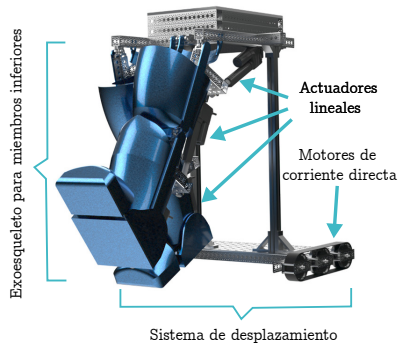
## II. MATERIALES Y MÉTODOS

### *II-A. Exoesqueleto robótico bípedo*

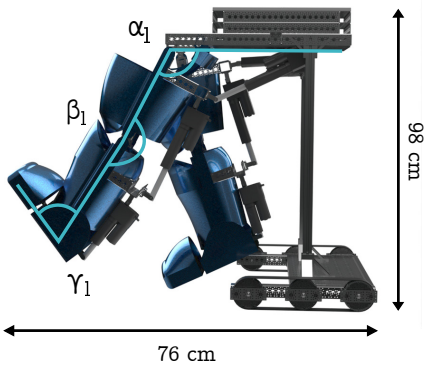
El exoesqueleto robótico bípedo fue desarrollado en un software de diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), tomando en consideración las medidas

[1] Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI) - Instituto Politécnico Nacional (IPN)
[2] Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo (CIDETEC) - Instituto Politécnico Nacional (IPN)
[3] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) - Campus Guadalajara

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Diagrama del sistema robótico




(b) Dimensiones del dispositivo

Fig. 1: Prototipo del exoesqueleto robótico bípedo

antropométricas de la población de niños mexicanos [13]. El prototipo está conformado por dos subsistemas, tal como se muestra en la figura 1a: 1) El exoesqueleto encargado de realizar los procesos repetitivos de la terapia de rehabilitación en miembros inferiores y 2) un sistema de tracción con el cual el dispositivo tiene la capacidad de deambular de manera independiente por ambientes estructurados. El sistema completo cuenta con 9 grados de libertad (GDL), 6 correspondientes al exoesqueleto y 3 al sistema de desplazamiento. En la figura 1b se muestran las dimensiones del dispositivo empleado, adicionalmente, los ángulos representados por $\alpha_l$, $\beta_l$ y $\gamma_l$ describen los ángulos formados por las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo, respectivamente, para la extremidad inferior izquierda. Por otra parte, los grados de libertad correspondientes al sistema de desplazamiento están descritos en dos dimensiones por las variables $d_x$ y $d_y$. El tercer GDL de este sistema se define por la rotación del dispositivo ($\theta$) en el plano bidimensional anteriormente descrito. Este trabajo se centra en el control de los grados de libertad correspondientes a las extremidades del robot. Debido a que la ubicación del centro de gravedad del dispositivo ocasionaría que el usuario se inclinara hacia adelante, es necesario considerar una masa con peso adecuado que compense este efecto. Esta masa se encuentra ubicada en la parte inferior del sistema de tracción.

La figura 2 muestra la instrumentación propuesta para el dispositivo, incluyendo los modelos de cada elemento. Esta

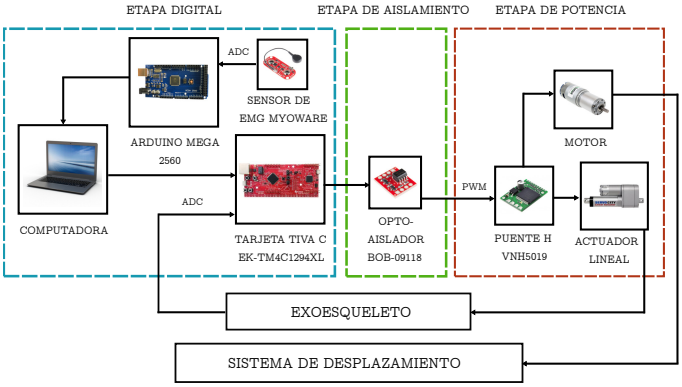



Fig. 2: Instrumentación electrónica del dispositivo

sección está compuesta por tres etapas: 1) La etapa digital comprende los sensores de electromiografía (EMG), los cuales son sensores de adquisición superficial que envían las señales a un microcontrolador, que a su vez las transmite a un ordenador, donde se realiza la implementación de la red neuronal diferencial para posteriormente entregar la terapia a realizar por el robot. Dentro de la computadora se implementará el algoritmo de control que genera el movimiento del exoesqueleto. La elección de los dos microcontroladores se realiza con base en sus características técnicas, principalmente por su capacidad de procesamiento. Al realizar el procesamiento de la información con el ordenador y los dos microcontroladores, la ejecución del clasificador basado en redes neuronales se destina exclusivamente al ordenador, para no comprometer la velocidad de procesamiento del sistema completo. 2) La etapa de aislamiento se implementa para protección eléctrica de la etapa digital, por medio de un sistema de aislamiento óptico y finalmente 3) en la etapa de potencia se sugieren los elementos necesarios para una aplicación práctica del exoesqueleto. En el caso de la etapa digital, el envío y recepción de señales se realiza a través de un proceso de conversión analógica-digital (ADC, por sus siglas en inglés) cuando se realiza el envío de señales electromiográficas hacia el primer microcontrolador y cuando se obtienen en el segundo microcontrolador las señales de posición angular de los grados de libertad del exoesqueleto. El algoritmo de control entrega un control por modulación de ancho de pulsos (PWM, por sus siglas en inglés) para finalmente ejercer el movimiento del exoesqueleto. En esta misma etapa, se sugiere el empleo de actuadores lineales, los cuales generan desplazamiento lineal, el cual a través de un mecanismo de transmisión mecánica del dispositivo, genera desplazamiento angular en cada GDL del exoesqueleto. El diseño mecánico del prototipo se encuentra descrito de manera más detallada en [14].

### *II-B. Estructura de la red neuronal diferencial*

Para realizar la clasificación de las señales de electromiografía, se propone la implementación de una red neuronal diferencial (RND) profunda de 3 capas. Los movimientos

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

se clasifican en cuatro clases distintas y cada clase se representa por un mapeo entrada-salida descrito por una ecuación diferencial no-lineal descrita por:

abra abra abra abra

$$\dot{z} = \mathcal{C}(z, t, \bar{\mu}), \quad t \in [t_{kT}, t_{kT} + T_{DNN}] \tag{1}$$

donde $z \in \mathbb{R}$ es la clase para identificar, $\mathcal{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la función continua que define el mapeo entrada-salida entre la entrada (señal de EMG) y la clase asociada. La variable $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m$ es un conjunto de señales de EMG variantes con el tiempo. Las señales de EMG se consideran como señales acotadas, debido a que su valor depende de la fuente de alimentación eléctrica conectada a los sensores de EMG, lo cual se representa de la siguiente manera: $\|\tilde{\mu}\|^2 \leq \mu^+ < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. $\mu^+$ como una constante positiva definida. El mapeo entrada-salida es desconocido pero continuo, por lo que se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i = a z_i &+ \left(W_{1i}^*\right)^\top \sigma_{1i}\left(V_{1i}^* \sigma_{2i}\left(S_{1i}^* z_i\right)\right) \\ &+ \left(W_{2i}^*\right)^\top \phi_{1i}\left(V_{2i}^* \phi_{2i}\left(S_{2i}^* z_i\right)\right) \mu_i.\end{aligned}$$

donde $W_{1i}^*$ y $W_{2i}^* \in \mathbb{R}^{p'}$ son los pesos de la capa de salida. las funciones vectoriales $\sigma_{1i} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ y $\phi_{1i} : \mathbb{R}^{q'} \to \mathbb{R}^{p' \times m}$ representan las funciones de activación de la capa de salida, $V_{1i}^* \in \mathbb{R}^{q \times r}$ y $V_{2i}^* \in \mathbb{R}^{q' \times r'}$ son los pesos de la capa interna, $\sigma_{2i} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ y $\phi_{2i} : \mathbb{R}^{s'} \to \mathbb{R}^{r'}$ son las funciones de activación en la capa oculta, $S_{1i}^* \in \mathbb{R}^s$ y $S_{2i}^* \in \mathbb{R}^{s'}$ son los pesos en la capa de entrada de la red, $a \in \mathbb{R}_+$ asegura la estabilidad de la red neuronal diferencial profunda. A pesar de que los pesos $W_i^*$, $V_i^*$ y $S_i^*$ son desconocidos, se pueden acotar de la siguiente manera:

$$\|W_i^*\|^2 \leq \bar{W}_i, \quad \|V_i^*\|_F^2 \leq \bar{V}_i, \quad \|S_i^*\|^2 \leq \bar{S}_i,$$

con $i = 1, 2$, $0 < \bar{W}_i < +\infty$, $0 < \bar{V}_i < +\infty$ y $0 < \bar{S}_i < +\infty$ como constantes reales. $\|\cdot\|_F$ representa la norma de Frobenious de una matriz determinada. Las funciones de activación se establecen con forma sigmoidal a través de la siguiente ecuación:

$$\varphi(\psi) = \frac{e}{1 + b e^{g^\top \psi}} + h,$$

donde $\psi \in \mathbb{R}^\nu$ es la variable independiente del sistema, mientras que $e, b \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathbb{R}^\nu$ son constantes reales. Se asume que las funciones $\sigma_i(\cdot)$, $\phi_1(\cdot)$ y $\phi_2(\cdot)$ son continuas con respecto a sus correspondientes argumentos. Las leyes de aprendizaje de la red estan dadas por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{1i} &= - k_{1i}\delta_i p_i \sigma_{1i}\left(V_{1i}\sigma_{2i}\left(S_{1i}\hat{z}_i\right)\right) + \\
&\quad k_{1i}\delta p_i D_{\sigma_{1i}} \tilde{V}_{1i}\sigma_{2i}\left(S_{1i}\hat{z}_i\right) + k_{1i}\delta_i p_i D_{\sigma_{1i}} \tilde{V}_{1i} D_{\sigma_{2i}} \tilde{S}_{1i}\hat{z}_i, \\
\dot{V}_{1i} &= - k_{3i} p_i \delta_i D_{\sigma_{1i}}^\top w_{1i} \sigma_{2i}^\top (S_{1i}\hat{z}_i), \\
\dot{S}_{1i} &= - k_{5i} p_i \delta_i D_{\sigma_{2i}}^\top V_{1i}^\top D_{\sigma_{1i}}^\top w_{1i}\hat{z}_i, \\
\dot{W}_{2i} &= - k_{2i}\delta_i p_i \phi_{1i}\left(V_{2i}\phi_{2i}\left(S_{2i}\hat{z}_i\right)\right)\bar{\mu}_{i,j} + \\
&\quad k_{2i} p_i \delta_i D_{\phi_{1i}} \tilde{V}_{2i}\phi_{2i}(S_{2i}\hat{z}) + k_{2i} p_i \delta_i D_{\phi_{1i}} \tilde{V}_{2i} D_{\phi_{2i}} \tilde{S}_{2i}\hat{z}_i, \\
\dot{V}_{2i} &= - k_{4i} p_i \delta_i D_{\phi_{1i}}^\top W_{2i} \phi_{2i}^\top (S_{2i}\hat{z}_i), \\
\dot{S}_{2i} &= - k_{6i} p_i \delta_i D_{\phi_{2i}}^\top V_{2i}^\top D_{\phi_{1i}}^\top W_2 \hat{z},
\end{aligned} \tag{2}$$

donde $\delta_i = \hat{z}_i - z_i$ es el error de identificación de clase, las matrices $D_{\sigma_{1i}} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $D_{\sigma_{2i}} \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $D_{\phi_{1i}} \in \mathbb{R}^{p' \times q'}$ y $D_{\phi_{2_1}} \in \mathbb{R}^{r' \times s'}$ se definen como:

$$D_{\sigma_{1i}} = \frac{\partial \sigma_{1i}(\cdot)}{\partial(\cdot)}, \qquad D_{\sigma_{2i}} = \frac{\partial \sigma_{2i}(\cdot)}{\partial(\cdot)},$$
$$D_{\phi_{1i}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi_{1ij}(\cdot)}{\partial(\cdot)} \bar{\mu}_i, \qquad D_{\phi_{2i}} = \frac{\partial \phi_{2i}(\cdot)}{\partial(\cdot)},$$

donde $\bar{\mu}_{i,j}$ es el $j$-th componente de $\bar{\mu}$, $\phi_{1ij}$ representa la $j$-th columna de la matrix $\phi_1$, $k_j$ con $j = 1 : 6$ son constantes positivas comúnmente, $\tilde{V}_j$ y $\tilde{S}_j$ con $j = 1, 2$ se definen como:

$$\tilde{V}_j = V_j - V_j^*, \qquad \tilde{S}_j = S_j - S_j^*,$$

$p_i$ es la solución positiva de la siguiente desigualdad cuadrática

$$p_i^2 r + 2 p_i a_i + q_i \leq -q_{0i}, \tag{3}$$

donde

$$r = \bar{W}_{1i} + \bar{W}_{2i},$$
$$q = L_{\sigma_{1i}} L_{\sigma_{2i}} \bar{V}_{1i} \bar{S}_{1i} + L_{\phi_{1i}} L_{\phi_{2i}} \bar{V}_{2i} \bar{S}_{2i} \bar{\mu}_i^+ - q_{0i},$$

con $\bar{\mu}_i^+$ y $q_{0i}$ es una constante real positiva. La imagen 3 muestra como se implementa un clasificador basado en redes neuronales diferenciales. 1) Se define una función objetivo para cada clase, en este trabajo se propusieron tres clases diferentes, por lo tanto, fue necesaria la programación de tres RND. 2) Cada red se entrena con los patrones de electromiografía correspondientes a cada clase. 3) Una vez entrenada la red, el patrón proveniente del usuario es evaluado, el error entre la clase objetivo, a la cual corresponde el patrón, y cada red neuronal tendrá diferentes valores. Aquel cuyo error sea menor en valor absoluto, indicará a que clase pertenece el conjunto de señales de electromiografía ingresadas a la estructura de tres RND trabajando en paralelo.

### *II-C. Algoritmo de control basado en eventos*

La configuración del robot bípedo puede ser representada a través de una estructura de un doble péndulo triple, el cual puede ser modelado a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente manera:

$$M(q)\ddot{q} + C\left(q, \dot{q}\right)\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \xi(q, t) = \tau_i \tag{4}$$

donde $q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$ representa al vector de posiciones angulares para cada uno de los seis GDL del exoesqueleto robótico bípedo. El subconjunto $\mathbb{Q}$ contiene los valores atribuibles a la posición y, en consecuencia, los valores de velocidad del sistema robótico. La matriz de inercia está representada por $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ contiene a la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el vector de friccion viscosa, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa el vector de fuerzas gravitacionales, $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ incluye las incertidumbres paramétricas y dinámica no modelada del robot. Se asume que este término está acotado. Este modelo se emplea como base para la simulación de la implementación del controlador propuesto,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

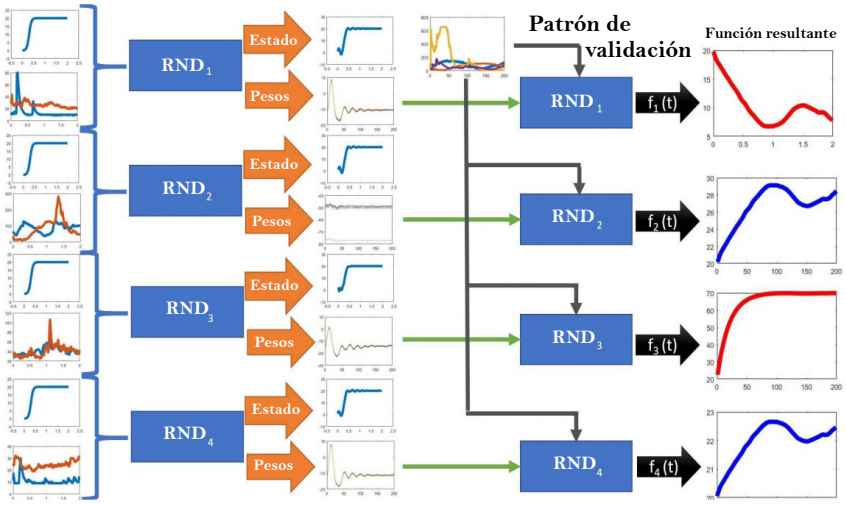



Fig. 3: Clasificador basado en redes neuronales diferenciales

en conjunto con los resultados obtenidos de la clasificación de señales de EMG basadas en la red neuronal diferencial profunda. A través de esta estrategia, el usuario tiene la capacidad de controlar el movimiento del exoesqueleto para miembros inferiores, a partir de músculos particulares que tengan la capacidad muscular requerida para activar el ejercicio de clasificación. Con esto, se pueden activar distintos patrones de rehabilitación dependiendo de los requerimientos del paciente. Los resultados presentados muestran cuatro trayectorias de referencia basada en el ciclo de la marcha en pacientes sanos, con una redución en el rango de desplazamiento angular y velocidades angulares para evitar movimientos bruscos y posibles riesgos para el usuario. Las trayectorias de referencia se obtuvieron a partir de estudios de biomecánica donde evalúan las posiciones angulares en cada articulación desde el plano sagital [15]. Estas trayectorias describen el ciclo de la marcha completo en pacientes sanos, considerando las restricciones propuestas previamente. El control basado en eventos se efectúa a partir de la información obtenida de la red neuronal diferencial profunda. Con base en esto, se define la trayectoria de referencia a partir de la siguiente modelación matemática.

El modelo dinámico para cada extremidad se puede definir considerando que se pueden representar como modelos mecánicos de segundo orden, y mediante el cambio de variables $z_a = q$ y $z_b = \dot{q}$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= z_b \\ \dot{z}_b &= f(z_a, z_b) + g(z_a) + \nu(z_a, z_b, t) \end{aligned} \tag{5}$$

con $f(z_a, z_b) := -M(z_a)^{-1}\left[C\left(z_a, z_b\right) z_b + F(z_b) + G(z_a)\right]$, $g(z_a) := M(z_a)^{-1}$, $\nu(z_a, z_b, t) := -M(z_a)^{-1}\xi(q,t)\ u = \tau$.

Este estudio supone que la función $f(\cdot,\cdot)$ satisface localmente la condición de Lipschitz:

$$\begin{aligned} \|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\| \leq L_1\|x_1 - y_1\| + \\ L_2\|x_2 - y_2\| \end{aligned} \tag{6}$$

con $L_1, L_2$ como escalares positivos. Además, la función $g(z_a)$ es siempre positiva para garantizar la controlabilidad, lo cual es una condición suficiente del sistema (5), es decir, $0 < g^- < g(z_a) < g^+ < \infty$, y c) las incertidumbres están acotadas por $\|\nu(z_a, z_b, t)\| \leq n_1\|z\| + n_0$ donde el vector $z$ está definido por $z := \begin{bmatrix} z_a^\top & z_b^\top \end{bmatrix}^\top$ y $n_1, n_0$ como constantes positivas. Las trayectorias de referencia se definen en función de las posiciones angulares de cada una de las seis articulaciones del exoesqueleto. De esta manera, las trayectorias se pueden definir como $z^*_{a,j} \in \mathbb{R}^3$, asumidas como doblemente diferenciables con derivada acotada.

De manera general, un controlador proporcional derivativo (PD) para un sistema de entrada simple y salida simple (SISO, por sus siglas en inglés), se diseña empleando la siguiente estructura:

$$u_i(t) = -k_{1,i}e(t) - k_{2,i}\dot{e}(t) \tag{7}$$

donde $k_{1,i}$ y $k_{2,i}$ son las ganancias del controlador, las cuales se deben ajustar previamente y $e \in \mathbb{R}$ es la señal de error de seguimiento del sistema definida como $e(t) = z_a(t) - z^*_a(t)$. Sin embargo, las señales obtenidas a partir de los potenciómetros empleados como sensores de posición angular son las únicas variables disponibles, por lo que, para implementar el controlador PD, es necesario obtener la derivada de la señal de error obtenida, la cual, en éste trabajo se implementó a partir de una aproximación de Euler, con un intervalo de iteración de 0.001 segundos.

## III. RESULTADOS

Se propone que se obtengan dos señales de EMG a partir de los sensores, colocados en dos músculos de interés, como primer propuesta, se proponen los músculos del biceps braquial y del triceps. La figura 4 muestra el proceso de entrenamiento de la RND. Se conjuntó una base de datos con 3 diferentes clases y un total de 20 instancias con tres distintos patrones que corresponden a las señales de EMG

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

del usuario. En la figura 4, la señal amarilla corresponde a la primera iteración con la base de datos. Una vez que se entrena la red con las veinte diferentes instancias para cada clase, se alcanza una mejor aproximación de la función objetivo (línea azul), como lo indica la línea roja. Con base en esto, las salidas de la red proporcionan cuatro señales, las cuales generan cuatro trayectorias distintas. Estas trayectorias determinan las terapias que ejecutará el exoesqueleto, las cuales están representadas por dos dígitos, teniendo los siguientes valores:

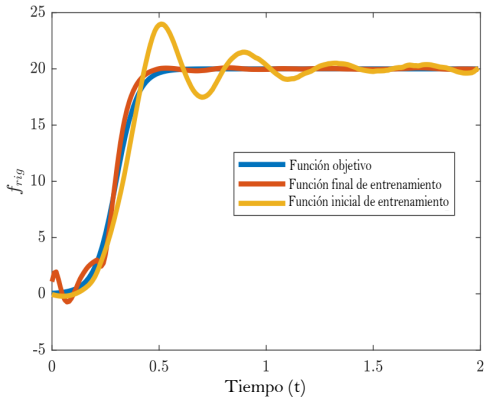
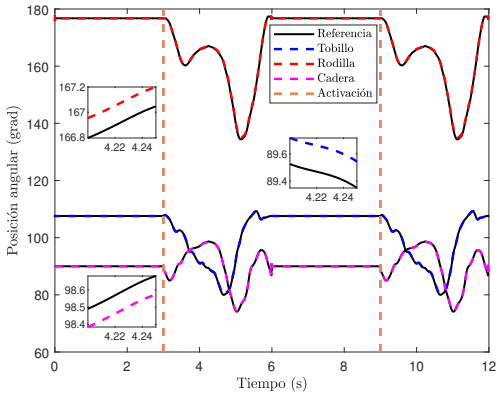


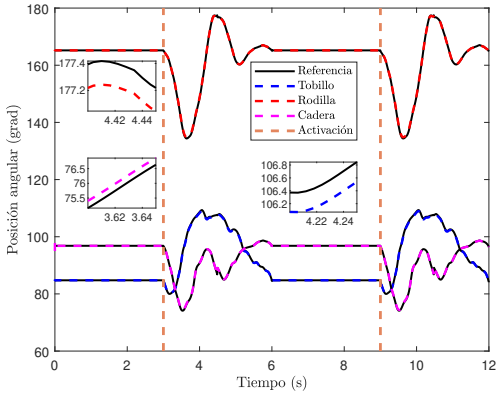

Fig. 4: Entrenamiento de la RND

- (0,0) No hay movimiento en las extremidades inferiores ni en las superiores
- (0,1) Se realiza el ciclo de la marcha solamente en la extremidad inferior derecha ocasionado por la contacción del brazo derecho
- (1,0) Se realiza el ciclo de la marcha solamente en la extremidad inferior izquierda causado por la contracción del brazo izquierdo
- (1,1) Se realiza el ciclo de la marcha completo, generando movimiento en ambas extremidades inferiores causado por la contracción de ambos brazos

En la figura 5, se muestran los seguimientos de trayectorias para los miembros inferiores basados en la activación a partir de la salida de la red neuronal, tanto para la extremidad inferior izquierda (5a) como para la extremidad inferior derecha (5b). En ambos casos, se observa que los umbrales de activación se encuentran localizados en los segundos 3 y 9 (representados por las líneas verticales naranjas). Estos umbrales se encuentran definidos por la salida de la red neuronal diferencial profunda, la cual realiza la clasificación en los instantes previamente mencionados. De igual manera, es posible apreciar que para ambos casos, el exoesqueleto no tiene ningún movimiento hasta que no recibe la señal de activación. En el instante en el que el dispositivo recibe la señal de activación, este realiza un ciclo de la trayectoria programada, para posteriormente permanecer en reposo hasta que vuelve a recibir la señal de activación, generando movimiento con base en la variación de la posición angular




(a) Seguimiento de trayectorias para la extremidad inferior izquierda




(b) Seguimiento de trayectorias para la extremidad inferior derecha

Fig. 5: Seguimiento de trayectorias

de las tres articulaciones del dispositivo, localizadas en las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo.

Mientras que la figura 5a muestra las trayectorias establecidas para las articulaciones de la extremidad inferior izquierda, la figura 5b muestra las de la extremidad inferior derecha. Se observa que en ambos casos, las trayectorias de referencia son semejantes entre sí. Sin embargo, cuentan con un desfase del 50 % con respecto la una de la otra, esto para generar el movimiento pendular natural de las extremidades inferiores durante el ciclo de la marcha.

Adicionalmente, en la figura 5 se muestra el acercamiento a algunas regiones de las trayectorias definidas. El controlador propuesto demuestra la capacidad de realizar el seguimiento de trayectorias con errores de seguimiento menores a 0.4 grados, lo cual es adecuado para la aplicación propuesta debido a que representa un intento inicial de movilizar los músculos de las extremidades inferiores en pacientes con problemas de motricidad para ejecutar el ciclo de la marcha. Las trayectorias de referencia planteadas se basan en el ciclo de la marcha humana en pacientes sanos. No

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

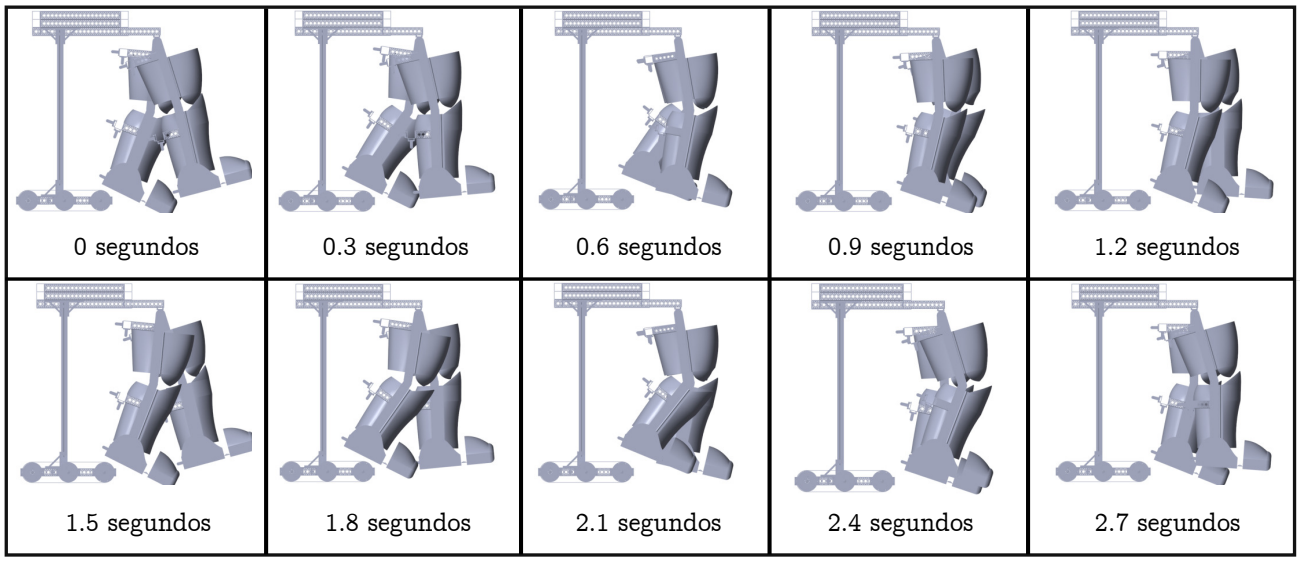



Fig. 6: Secuencia de funcionamiento del exoesqueleto durante la ejecución del ciclo de la marcha

obstante, estas trayectorias pueden ser modificadas, de acuerdo a las necesidades de cada paciente establecidas por el terapeuta. Estas terapias consisten en movimientos repetitivos diseñados con base en el tipo de patología a tratar.

La figura 6 muestra la secuencia del funcionamiento del exoesqueleto virtual con un periodo de ciclo de marcha de 3 segundos. A pesar de que la duración del ciclo de la marcha humana en pacientes sanos tiene un periodo menor, se establece el periodo de 3 segundos para evitar generar movimientos bruscos que puedan dañar las extremidades inferiores del usuario. Las imágenes mostradas para describir la secuencia de movimiento del dispositivo muestran las posiciones cada 0.3 segundos, resultando en 10 imágenes que describen un ciclo completo ejecutado por el exoesqueleto. Los porcentajes para cada fase del ciclo de la marcha se mantienen igual a los reportados en literatura sobre biomecánica básica del ciclo de la marcha [16].

## IV. CONCLUSIONES

Se presenta el diseño virtual de un exoesqueleto robótico bípedo para rehabilitación en miembros inferiores, considerando las medidas antropométricas de niños mexicanos. Asimismo, se propone la implementación de una red neuronal diferencial profunda de 3 capas para realizar la clasificación de señales de electromiografía, con un algoritmo de control basado en eventos determinados por el clasificador. El clasificador presenta una precisión del 95 % empleando el método de validación cruzada *k-fold*. El controlador propuesto tiene la capacidad de realizar el seguimiento de trayectorias de las rutinas establecidas, con base en el modelo matemático del exoesqueleto. El trabajo plantea un primer enfoque hacia un esquema colaborativo entre el dispositivo robótico y el paciente, donde se pueda controlar el movimiento del dispositivo a partir de regiones del cuerpo que no se encuentren comprometidas, incrementando la autonomía del usuario.

## REFERENCIAS

[1] M. Ben-Ari and F. Mondada, *Elements of Robotics*. Springer International Publishing, 2018.
[2] M. Mihelj, T. Bajd, A. Ude, J. Lenarčič, A. Stanovnik, M. Munih, J. Rejc, and S. Šlajpah, *Robotics*. Springer International Publishing, 2019.
[3] S. Yeem, J. Heo, H. Kim, and Y. Kwon, "Technical analysis of exoskeleton robot," *World Journal of Engineering and Technology*, vol. 07, no. 01, pp. 68–79, 2019.
[4] A. S. Gorgey, "Robotic exoskeletons: The current pros and cons," *World Journal of Orthopedics*, vol. 9, no. 9, pp. 112–119, sep 2018.
[5] B. Kolb and R. Gibb, "Principles of neuroplasticity and behavior," in *Cognitive Neurorehabilitation*, D. T. Stuss, G. Winocur, and I. H. Robertson, Eds. Cambridge University Press, pp. 6–21.
[6] G. Menga and M. Ghirardi, "Lower limb exoskeleton for rehabilitation with improved postural equilibrium," *Robotics*, vol. 7, no. 2, p. 28, jun 2018.
[7] E. Kaniusas, "Fundamentals of biosignals," in *Biomedical Signals and Sensors I*. Springer Berlin Heidelberg, nov 2011, pp. 1–26.
[8] M. Lee M., B.A., "Robotics." *Salem Press Encyclopedia of Science*, 2018.
[9] S. H. Chen, A. J. Jakeman, and J. P. Norton, "Artificial intelligence techniques: An introduction to their use for modelling environmental systems," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 78, no. 2-3, pp. 379–400, jul 2008.
[10] N. Malik, "Artificial neural networks and their applications," *National Conference on Unearthing Technological Developments their Transfer for Serving Masses*, 06 2005.
[11] M. Alfaro-Ponce, A. Argüelles, and I. Chairez, "Pattern recognition for electroencephalographic signals based on continuous neural networks," *Neural Networks*, vol. 79, pp. 88–96, jul 2016.
[12] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016, http://www.deeplearningbook.org.
[13] B. E. Del-Rio-Navarro, O. Velazquez-Monroy, J. I. Santos-Preciado, A. Lara-Esqueda, A. Berber, A. Loredo-Abdala, R. Violante-Ortiz, and R. Tapia-Conyer, "Mexican anthropometric percentiles for ages 10–18," *European Journal of Clinical Nutrition*, vol. 61, no. 8, pp. 963–975, ene 2007.
[14] R. P.-S. Lázaro, I. Salgado, and I. Chairez, "Adaptive sliding-mode controller of a lower limb mobile exoskeleton for active rehabilitation," *ISA Transactions*, oct 2020.
[15] B. F. Mentiplay, M. Banky, R. A. Clark, M. B. Kahn, and G. Williams, "Lower limb angular velocity during walking at various speeds," *Gait & Posture*, vol. 65, pp. 190–196, sep 2018.
[16] J. Watkins, "Basic biomechanics of gait," in *Neales Disorders of the Foot and Ankle*. Elsevier, 2020, pp. 145–159.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Propuesta de un guante de captura de movimiento para aplicaciones en salud ocupacional

Graciela Rodríguez Vega[1], Xiomara P. Zaldívar Colado[2], Ulises Zaldívar Colado[3], Dora A. Rodríguez Vega[4], y Rafael Castillo Ortega[5]

***Resumen*— Las actividades de manipulación manual de cargas son de gran importancia en la determinación del riesgo ergónomico de las actividades laborales. En la actualidad, existen diversas opciones tecnológicas que permiten la captura de movimiento, sin embargo, estos suelen ser de elevado costo, lo que dificulta su uso en actividades laborales. En el presente estudio se propone un guante de captura de movimiento de bajo costo, conformado por sensores inerciales y sensores resistivos de fuerza. El guante puede ser empleado en el registro de las variables descriptoras de los movimientos de la mano, mismas que permiten determinar el nivel de riesgo ergonómico que representa la actividad. Se presenta la arquitectura de hardware propuesta, así como el procesamiento de los datos crudos, además de un ejemplo de la captura de los movimientos de flexión-extensión de la mano y de agarre tipo esférico.**

## I. INTRODUCCIÓN

Las extremidades superiores, principalmente las manos, son fecuentemente utilizadas en las actividades diarias y en el sector industrial[1]. Los trabajos en la industria, se caracterizan por ser altamente repetitivos, implicar posturas no adecuadas, además de la excerción de fuerzas elevadas que en ocasiones exceden las capacidades físicas de los trabajadores[2]. Lo anterior puede causar diversos desórdenes músculo-esqueléticos, los cuales representan aproximadamente una tercera parte de las lesiones en el trabajo, un cuarto del tiempo de trabajo perdido y una quinta parte de las discapacidades permanentes[3]. Por lo anterior, se considera que es de gran importancia el emplear las tecnologías de captura de movimiento en la determinación del riesgo ergonómico de las activdades laborales.

El reconocimiento de las actividades humanas (RAH) ha sido de gran utilidad en el análisis de la interacción hombre-máquina[4],[5]. El RAH busca identificar actividades con base en información obtenida mediante sensores, lo que es posible gracias a los avances tecnológicos que permiten el uso de dispositivos pequeños, de bajo costo y de alto poder computacional[6].

En el caso del reconocimiento de actividades de manipulación de objetos(RMO), éste resulta complejo debido a que los individuos pueden seleccionar la estrategia de agarre de manera independiente y aplicar diferentes niveles de fuerza, de acuerdo con las características de los objetos[7]. Por lo anterior, se recomienda que los sistemas de captura de movimiento(MoCap) incluyan sensores táctiles y de fuerza, además de sensores inerciales [7].

La clasificación principal de las tecnologías de sensado para el RMO se basa principalmente en el nivel de invasividad de los sensores utilizados en el usuario y en el área de trabajo[7],[8]. Los sistemas de sensores para el movimiento de la mano que requieren contacto con el usuario, se clasifican en: captura mediante guantes de datos, captura mediante sensores de fuerza y captura a través de electromiografía de superficie(sEMG)[7]. Los sistemas que no requieren de contacto directo con el usuario se clasifican en: captura mediante marcadores ópticos y captura basada en visión[7],[8].

En años recientes, diversos estudios han analizado el reconocimiento de los movimientos de la mano (RMM) mediante el uso de tecnologías de sensado para el RMO. Junker et al.[9], emplearon un sistema de cuatro sensores inerciales, dos posicionados en la muñeca y otros dos colocados en el brazo y torso, respectivamente, para detectar los gestos de comer y beber en el primer grupo de estudio, así como el saludo de mano, contestar y colgar el teléfono en un segundo grupo. La desventaja de este sistema, es su limitación para detectar los movimientos de la mano y dedos.

Nathan et al.[10], desarrollaron un guante de captura de movimiento de bajo costo para la detección del alcance y agarre de objetos, que posee un electroestimulador para la rehabilitación de personas que sufrieron un evento cerebrovascular.

En la literatura existe evidencia del desarrollo de guantes de captura de movimiento de bajo costos para uso en rehabilitación de pacientes con eventos cerebrovasculares([10],[11],[12],[13]). La principal restricción de estos guantes, es que no consideran el movimiento de todos los dedos de la mano o bien no incluyen sensores que permitan registrar el esfuerzo realizado por cada dedo.

Diversos estudios han analizado el movimiento de la mano mediante sensores inerciales. Fang et al. [14], emplearon 18 sensores inerciales para la captura de movimiento de la mano con la finalidad de utilizar la información en la teleoperación de robots, mientras que Choi, et al.[15], propusieron un guante de 17 sensores inerciales. El uso de dicha cantidad de sensores representa un mayor costo computacional, además de que no considera las características del esfuerzo ejercido por la mano y los dedos en la manipulación de los objetos.

[1]Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Sinaloa. Correo electrónico: graciela.rguez.v@gmail.com
[2]Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Sinaloa. Correo electrónico: xiomara.zaldivar@uas.edu.mx
[3]Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Sinaloa. Correo electrónico: uzaldivar@uas.edu.mx
[4]Departamento de Mecatrónica, Universidad Politécnica de Sinaloa. Correo electrónico: drodriguez@upsin.edu.mx
[5]Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Sonora. Correo electrónico: rafael.castillo@unison.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Algunos trabajos relacionados con la identificación de riesgos ergonómicos emplearon el guante Cyberglove ([16],[17]), sin embargo, la principal limitante del uso de este sistema comercial es su elevado costo, además de que no cosideran el esfuerzo de la mano.

La propuesta presentada en este estudio permitirá el uso del guante en ámbitos industriales, con la finalidad de identificar el nivel de riesgo ergonómico que conllevan las tareas que conforman los procesos productivos, mediante el reconocimiento de patrones en las lecturas obtenidas a través de un número reducido de sensores inerciales y resistivos de fuerza.

## II. MATERIALESY MÉTODOS

En los siguientes apartados se describe el procedimiento llevado a cabo en el presente estudio: selección de los sensores, arquitectura de hardware, procesamiento de los datos crudos, calibración de los sensores resistivos de fuerza, comprobación de las lecturas de los sensores resistivos y experimentación.

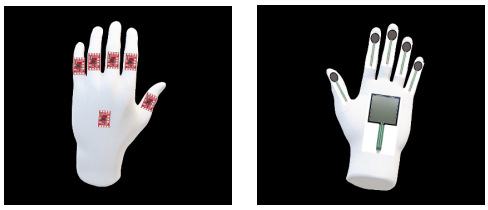
### *II-A. Selección de sensores*

Debido a los requerimientos de la captura de movimiento para el análisis en el área de salud ocupacional, se seleccionaron dos tipos de sensores: inerciales y resistivos de fuerza. Los sensores inerciales integrados al guante cuentan con 9 grados de libertad (GDL), conformados por un acelerómetro, un giroscopio y un magnetómetro, de tres ejes cada uno. Las lecturas obtenidas mediabte estos sensores, presentan errores que deben ser corregidos como parte del preprocesamiento de la señal. Las lecturas del acelerómetro se caracterizan por ser menos precisas en tiempos cortos, por lo que el sesgo en la medición se disminuye conforme se incrementa el tiempo de observación. Los giroscopios tienden a presentar una desviación de las lecturas que se acumula conforme se incrementa el tiempo de análisis [18]. En el caso de los magnetómetros, además de las imperfecciones comúnes de los sensores (sesgos, alineación inadecuada, etc), los campos magnéticos son afectados severamente por los materiales adjuntos al marco de referencia del sensor[19].

Los sensores resistivos de fuerza proporcionan el voltaje que representa la fuerza de contacto con el objeto. Los sensores empleados en el guante propuesto tienen un rango de sensibilidad de 0.2N a 20N, diámetro de 18.29mm, y área sensible de 14.68mm de diámetro o bien, área de 39.6mm x 39.6mm.

### *II-B. Arquitectura de hardware*

Para la implementación física del guante de captura de movimiento, se emplearon seis sensores inerciales de 9GDL, además de seis sensores resistivos de fuerza, mismos que fueron posicionados tal como se muestra en la figura 1. Los sensores inerciales se colocaron al final de las falanges proximales de cada dedo, así como en el dorso de la mano, mientras que los sensores resistivos de fuerza se colocaron en la parte distal de los dedos, sobre la yema. En el centro de la palma de la mano, se colocó un sensor resistivo de fuerza, con área sensible de 39.6mmx39.6mm. La selección de los puntos antropométricos para el posicionamiento de los sensores en la mano se realizó de acuerdo a la literatura[20] y considerando los tipos de agarre comúnes en el ámbito industrial[21].



(a) Dorso (b) Palma

Fig. 1. Sistema de sensores para la captura de movimiento de la mano

Se utilizó un sistema maestro-esclavo en el que los sensores inerciales se conectaron mediante el protocolo de comunicación I2C a una tarjeta de desarrollo Arduino Uno(maestro), mientras que los sensores resistivos de fuerza se conectaron a una tarjeta de desarrollo Arduino Nano(esclavo)(Fig. 2). Los datos crudos leídos de cada sensor se enviaron mediante comunicación serial a una computadora portátil con sistema operativo Windows10 con procesador Interl Core i7-8550U de 4.0Ghz y 16GB de RAM). La frecuencia de muestreo registrada es de 20Hz, misma que se encuentra dentro del rango recomendado para el reconocimiento de actividades humanas[8], permitiendo a su vez reducir el costo computacional requerido por el sistema.

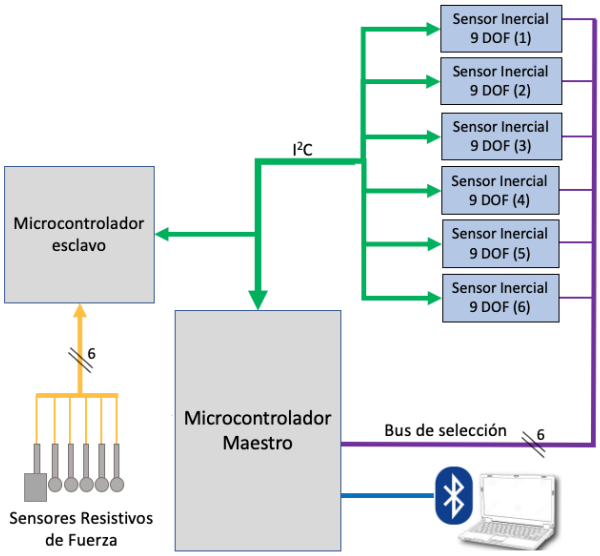



Fig. 2. Sistema de sensores para la captura de movimiento de la mano

### *II-C. Procesamiento de los datos*

Los datos crudos obtenidos a partir de los sensores inerciales, fueron procesados para ser utilizados posteriormente en aplicaciones en salud ocupacional. Debido a las desviaciones mencionadas en la sección II-A, los acelerómetros,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

giroscopios y magnetómetros fueron calibrados tal como se describe en las siguientes secciones. Finalmente, los datos calibrados fueron convertidos a $m/s^2$, $rad/s$ y $\mu T$.

*II-C.1. Calibración de sensores inerciales:* Para contrarrestar las desviaciones en las lecturas del sensor inercial mencionadas en la sección II-A, los sensores fueron sometidos a procesos de calibración. La calibración del acelerómetro se realizó mediante el procedimiento cero movimiento *zeromotion* , mientras que el procedimiento *zerorate* se utilizó para la calibración del giroscopio.

El $offset$ del acelerómetro se obtuvo mediante el promedio de 1000 lecturas del sensor en estado de reposo en una superficie plana, y el eje $z$ en la dirección opuesta a la superficie (ecuaciones 1, 2 y 3).

$$acc_{offset_x} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} Aceleracion_{xi}}{1000} \tag{1}$$

$$acc_{offset_y} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} Aceleracion_{yi}}{1000} \tag{2}$$

$$acc_{offset_z} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} Aceleracion_{zi}}{1000} \tag{3}$$

El $offset$ del giroscopio en sus tres ejes se obtuvo de forma similar a las ecuaciones 1, 2 y 3, en las que las componentes de la aceleración son reemplazadas por las componentes de la velocidad angular de 1000 lecturas del sensor en estado de reposo.

En el caso del magnetómetro, éste fue calibrado tanto para las desviaciones magnéticas blandas, como para las desviaciones magnéticas duras, para lo cual se empleó el software Matlab 2019a©.

En las figuras 3 y 4 se presentan los resultados de la calibración del acelerómetro y del giroscopio, respectivamente. En ambas figuras se puede observar que los datos calibrados(color azul) se encuentran centrados en el valor 0, lo que representa una reducción del desajuste de la medición.

La calibración de las desviaciones magnéticas duras se presenta en la figura 5. La correción de las lecturas se puede observar al graficar la componente $x$ con respecto a la componente $y$, la componente $x$ con respecto a la componente $z$ y la componente $y$ con respecto a la componente $z$ de las lecturas de magnetómetro. Los datos calibrados, indicados en color azul, se encuentran cercanos al origen de la gráficas. Los resultados de la calibración de las desviaciones magnéticas blandas, se presentan en la figura 5, en donde se puede observar que los datos calibrados tienen una forma esférica mejor definida que los datos no calibrados, además de estar más cercanos al origen.

Una vez calibradas las lecturas, los datos crudos fueron convertidos a las unidades correspondientes.

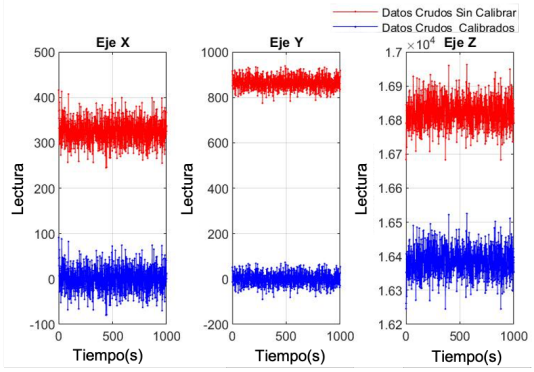



Fig. 3. Calibración del acelerómetro

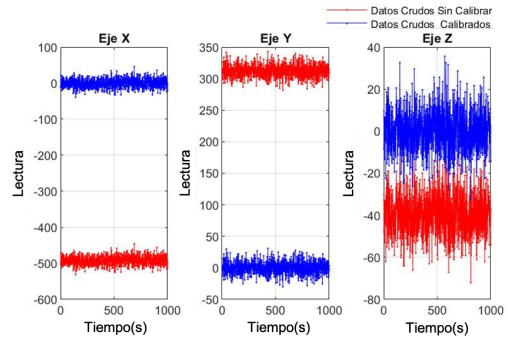



Fig. 4. Calibración del giroscopio

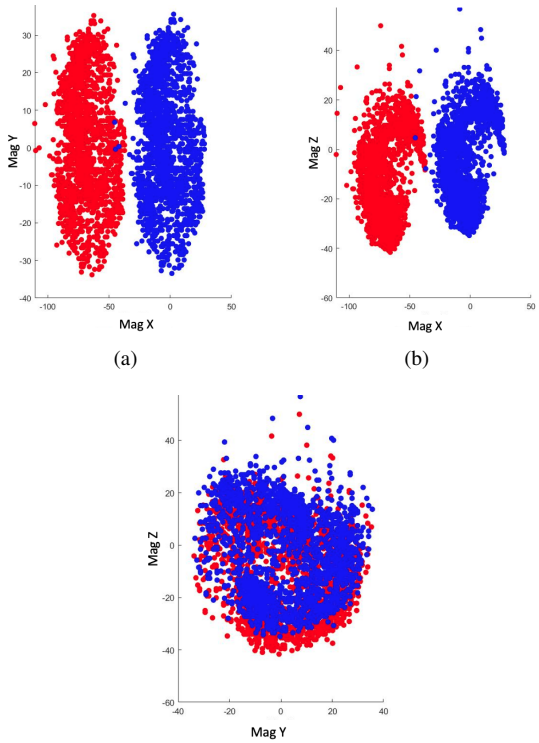



Fig. 5. Calibración del magnetómetro

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

### *II-D. Calibración de los sensores resistivos de fuerza*

En el caso de los sensores resistivos de fuerza, se registraron las lecturas analógicas a través del microcontrolador. La lectura fue convertida a voltaje mediante la ecuación 4, donde $x$ representa el voltaje. Ejemplos de los datos crudos provenientes de los sensores resistivos de fuerza se muestran en la figura 6.

$$x = (lectura * 5)/1023 \tag{4}$$

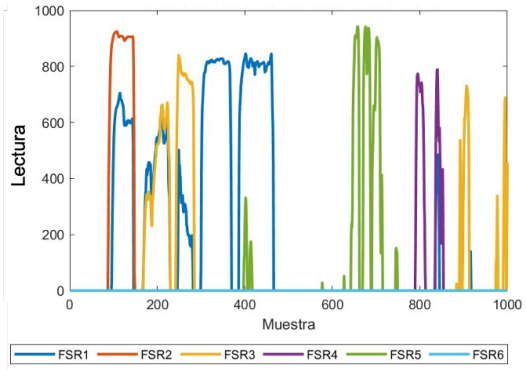



Fig. 6. Datos crudos sensores resistivos de fuerza

### *II-E. Comprobación de las lecturas de los sensores resistivos*

Se empleó un protocolo de validación que permite detectar los movimientos de flexión-extensión, abducción y aducción de la mano y los dedos, así como pronación y supinación de la mano. El protocolo de validación de los sensores resistivos de fuerza consistió en tocar cada una de las yemas de los dedos con el dedo pulgar, mientras que para el sensor colocado en la palma de la mano, se realizó un movimiento de presión entre el dedo medio y la palma de la mano.

### *II-F. Experimentación*

Para mostrar el uso del guante propuesto, se realizó la captura de un movimiento básico y un movimiento complejo. El primero de ello consiste en la flexo-extensión de muñeca. De acuerdo a la literatura, el movimiento de flexión-extensión de muñeca penaliza la determinación del riesgo ergonómico postural. En la metodología Rapid Upper Limb Assessment(RULA)[22], cuando el movimiento se encuentra dentro del rango de 0-15°, se considera riesgo bajo, por lo que la penalización es menor en comparación con la penalización de movimientos superiores a 15° (Fig. 7).

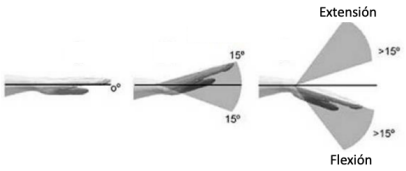



Fig. 7. Flexión-extensión de muñeca

El movimiento complejo consiste en un agarre de tipo esférico, tal como se muestra en la figura 8 de un objeto compresible, en el que se involucran los cinco dedos.

Fig. 8. Movimiento complejo: agarre tipo esférico con 5 dedos

## III. RESULTADOS

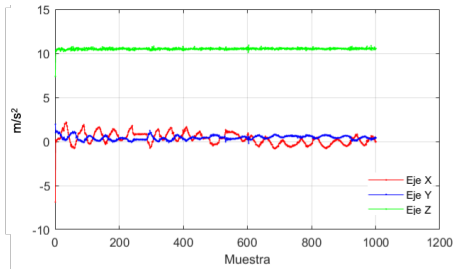
En los siguientes apartados se muestran las gráficas de los resultados obtenidos a mediante el guante MoCap propuesto para los movimientos básico y complejo.

- Movimiento básico
  En las figuras 9 y 10 se presentan los valores de las diferentes variables obtenidas mediante el guante de captura de movimiento para el sensor inercial colocado en el dorso de la mano. Debido a que no se requirió la excerción de fuerza, los resultados de las variables de los sensores resistivos de fuerza fueron omitidos.
  La figura 9 muestra los cambios en las variables para el movimiento de flexión-extensión en el rango de 0-15°, mientras que la figura 10 presenta los resultados para movimientos extremos, superiores a 15°. En las figuras se pueden observar los diferentes rangos en los que se encuentran las variables.
- Movimiento complejo
  En la figura 11 se muestran los datos obtenidos de los sensores inerciales durante la ejecución del movimiento complejo. La figura 12 presenta los datos correspondientes a los sensores resitivos de fuerza, en la se puede observar la activación de los sensores colocados en la yema de los dedos, mientras que el sensor correspondiente a la palma de la mano no presentó variación alguna, ya que no estuvo en contacto con el objeto manipulado.

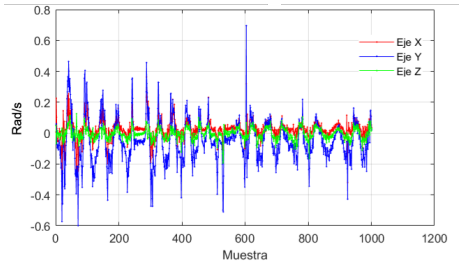
## IV. CONCLUSIONES

En el presente artículo se planteó la propuesta de un guante de captura de movimiento con fines de aplicación en el ámbito de salud ocupacional. Se considera que la inclusión de seis sensores inerciales de 9GDL y seis sensores resistivos de fuerza, es suficiente para la identificación del riesgo ergonómico ocasionado por actividaddes manuales, principalmente aquellas relacionadas con el agarre del objeto. Se mostraron los resultados del procesamiento de los datos para movimientos básicos de flexión-extensión de muñeca y complejos que involucran los dedos de la mano y la aplicación de fuerza en los mismos. Como trabajo futuro, se considera implementar filtros para la fusión de datos,

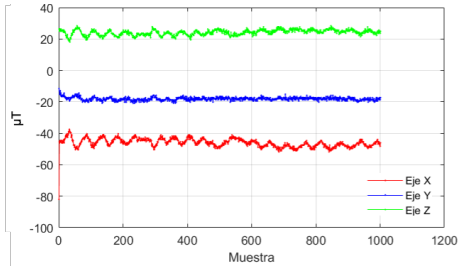
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Aceleración

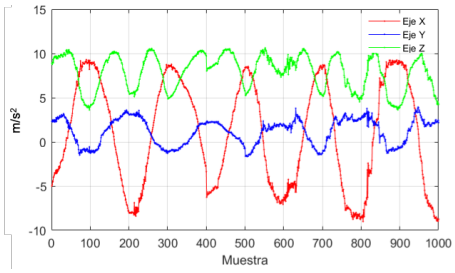



(b) Velocidad Angular

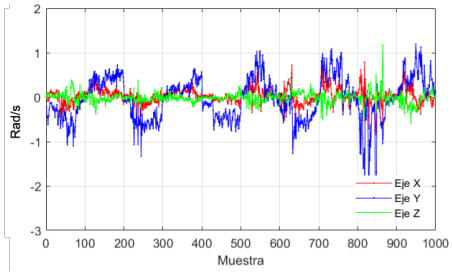



(c) Campos magnéticos

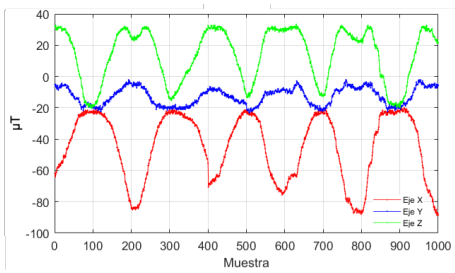
Fig. 9. Lecturas para la postura neutra




(a) Aceleración




(b) Velocidad Angular




(c) Camposmagnéticos

Fig. 10. Lecturas para el movimiento de flexión-extensión

tales como el filtro complementario y el filtro Kalman, para obtener los ángulos de movimiento indicados por las metodologías de evaluación ergonómica.

## REFERENCIAS

[1] Lee, KS, & Jung, MC. (2015). Ergonomic evaluation of biomechanical hand function. Safety and health at work, vol. 6, num. 1, pp. 9–17.

[2] Armstrong TJ, Foulke JA, Joseph BS & Goldstein SA.(1982) Investigation of cumulative trauma disorders in a poultry processing plant. Am Ind Hyg Assoc J. vol.43, num.2, pp.103-116.

[3] Marty J, Porcher B & Autissier R. (1983). Traumatismes de la main et accidents du travail. Statistiques et prévention. Hand injuries and occupational accidents. Statistics and prevention. Ann Chir Main. vol. 2, num. 4, pp.368-370.

[4] Nweke H, Wah T, Al-garadi, M, Alo, U. (2018). Deep Learning Algorithms for Human Activity Recognition using Mobile and Wearable Sensor Networks: State of the Art and Research Challenges. Expert Systems with Applications.

[5] Wang, Jindong & Chen, Yiqiang & Hao, Shuji & Peng, Xiaohui & Lisha, Hu. (2017). Deep Learning for Sensor-based Activity Recognition: A Survey. Pattern Recognition Letters.

[6] Lara, O.D. & Labrador M. A.(2013), A Survey on Human Activity Recognition using Wearable Sensors, IEEE Communications Surveys & Tutorials, vol. 15, no. 3, pp. 1192-1209.

[7] Y. Xue, Z. Ju, K. Xiang, J. Chen &H. Liu. (2019). Multimodal Human Hand Motion Sensing and Analysis—A Review,ïn IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems, vol. 11, no. 2, pp. 162-175.

[8] Khusainov, R., Azzi, D., Achumba, I. & Bersch, S. (2013). Real-Time Human Ambulation, Activity, and Physiological Monitoring: Taxonomy of Issues, Techniques, Applications, Challenges and Limitations. Sensors (Basel, Switzerland). vol. 13. num. 12, pp.852-902.

[9] Junker H, Amft O, Lukowicz P &Tröster G.(2008). Gesture spotting with body-worn inertial sensors to detect user activities, Pattern Recognition, vol. 41, num. 6,pp. 2010-2024.

[10] Nathan DE, Johnson MJ & McGuire JR(2009). Design and validation of low-cost assistive glove for hand assessment and therapy during activity of daily living-focused robotic stroke therapy. J Rehabil Res Dev. vol. 46, num. 5, pp.587-602.

[11] Chiu HY, Lin SC, Su FC, Wang ST & Hsu HY (2000). The use of the motino analysis system for evaluation of loss of mvoement in the finger. The Journal of Hand Surgery: British & European, vol. 25, num. 2, pp. 195-199,

[12] Oess, N.P., Wanek, J. & Curt, A.(2012). Design and evaluation of a low-cost instrumented glove for hand function assessment. J NeuroEngineering Rehabil. vol. 9, num. 2.

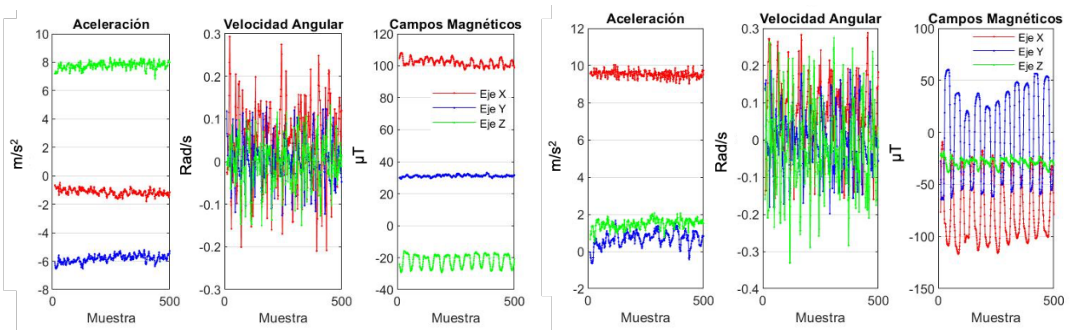
[13] Polygerinos P, Galloway KC, Savage E, Herman M, Donnell KO & Walsh CJ. (2015). Soft robotic glove for hand rehabilitation and task specific training. 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, 2015, pp. 2913-2919.

[14] Fang, B., Sun, F., Liu, H. and Guo, D. (2017). A novel data glove using inertial and magnetic sensors for motion capture and robotic arm-hand teleoperation. Industrial Robot, Vol. 44 No. 2, pp. 155-165.

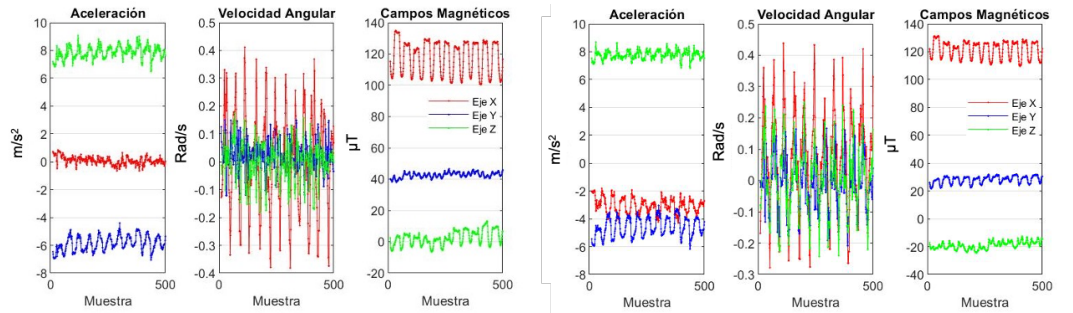
[15] Choi, Y., Yoo, K., Kang, S.J. (2018). Development of a low-cost wearable sensing glove with multiple inertial sensors and a light and fast orientation estimation algorithm. J Supercomput. Vol. 74, pp. 3639–3652.

[16] Sánchez-Margallo, FM, Pérez-Duarte FJ, Sánchez-Margallo JA, Lucas-Hernzandez M Matos-Azevedo AM, Díaz-Güemes. (2014). Use of a motion capture data glove for hand and wrist ergonomic analysis

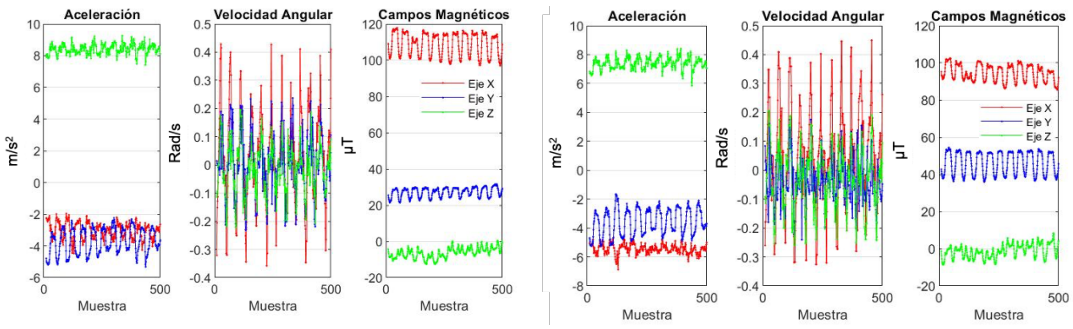
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Dorso de la mano (b) Dedo pulgar




(c) Dedo índice (d) Dedo medio




(e) Dedo anular (f) Dedo meñique

Fig. 11. Lecturas de los sensores inerciales para el movimiento complejo

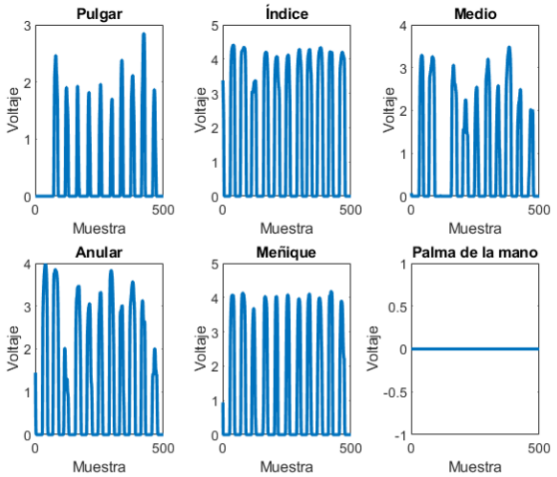



Fig. 12. Lecturas de los sensores resistivos de fuerza para el movimiento complejo

during laparoscopy. Surgery Endoscopy. 22ndInternational Congress of the European Associationfor Endoscopic Surgery (EAES).

[17] Grinyagin, I & Biryukova, Elena & Maier, MA. (2005). Kinematic and Dynamic Synergies of Human Precision-Grip Movements. Journal of neurophysiology. 94. 2284-94.

[18] O-larnnithipong, N. & Barreto, A. (2016)."Gyroscope drift correction algorithm for inertial measurement unit used in hand motion tracking. IEEE Sensors. pp. 1-3.

[19] Papafotis, K. & Sotiriadis, P. (2020). Accelerometer and Magnetometer Joint Calibration and Axes Alignment. Technologies. vol. 8. num. 11.

[20] Moschetti A, Fiorini L, Esposito D, Dario, P & Cavallo F. (2016). Recognition of Daily Gestures with Wearable Inertial Rings and Bracelets. Sensors vol. 16.

[21] Kang, SB & Ikeuchi, K. (1997). Toward automatic robot instruction from perception-Mapping human grasps to manipulator grasps. Robotics and Automation, IEEE Transactions on. vol. 13. pp.81 - 95.

[22] McAtamney L, Corlett NE.(1993). RULA: a survey method for the investigation of work-related upper limb disorders. Appl Ergon. vol. 24, num. 2, pp. 91-99.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Design, Modeling, and Control of a Variable Stiffness Device for Wrist Rehabilitation

O. Manolo Flores[1], Jesus H. Lugo[2], Alejandro González[3], Mauro Maya[1], Emilio J. Gonzalez-Galvan[1], Matteo Zoppi[2], and Antonio Cardenas[1]

***Abstract*— At a point in the future there may be few physical therapists for the number of patients who need treatment. To address the problem, we have created a device that can rehabilitate the wrist movements like flexion/extension and abduction/adduction, in addition to being able to fit either the left or right wrist. This paper presents the design and development of a single degree of freedom (DOF) rehabilitation device driven by a pneumatic Variable Stiffness Actuator (pVSA). This mechanism is intended to rehabilitate and aid with wrist movements. The proposed device is designed to be stationary, placing the patient's forearm on the device, where he/she grabs a handle.**

**The dynamic model of the apparatus is presented along with a suitable control law. For this, a kinematic analysis of the mechanism and dynamic modeling of the pneumatic cylinder were developed. The pneumatic system allows the control of both the output force and stiffness of the system by pressure control.**

## I. INTRODUCTION

The use of robots in rehabilitation helps both the patient and the therapist. The former with precise, variable, and long-lasting therapeutic exercises; by reducing physical effort during treatment and collecting data on the patient's progress. To restore the wrist's ability to move, a physiotherapeutic protocol should be chosen under the severity of injury in the wrist. Such a protocol should describe the type of active or passive exercise to be performed involving flexion/extension movements on the wrist's sagittal plane and adduction/abduction in its frontal plane [1].

The use of a pneumatic Variable Stiffness Actuator (pVSA) in rehabilitation devices makes for safer patient interaction by controlling the force exerted on the patient due to the VSA being compliant and back-drivable [2]. This allows the patient to be safely moved by the device, and in turn, move the device if required.

Rehabilitation-oriented devices with compliant systems usually rely on variable stiffness springs. Examples of this include: a floating spring acting bidirectionally in an antagonistic way and is intended for robotic assistance of gait training therapies to restore normal impaired knee function [3]; as well as a leg orthosis with the use of surface Electromyography (sEMG) sensors to estimate knee torque and provide biofeedback [4]. However, other mechanisms do not rely on compliant elements for the stiffness variation: they use controllers to mimic the behavior of a spring. For example, Claros *et al.* [5] proposed a Rotational Interactive Actuator with Active Compliance (RIAwAC) attached to an active knee orthosis that can be used for both upper and lower limbs and obtained a reduction in mechanical impedance. Nonetheless, this solution has a limited bandwidth, determined by the response time of the controller using the information from the sensors [6]. To enhance the bandwidth, it is recommended to use an actuator which behaves like a spring. Yu *et al.* show this by using a compliant actuator with excellent force control fidelity and high bandwidth; they also presented a conceptual design of the actuator in a portable exoskeleton for gait rehabilitation [2].

This paper presents the novel design, modeling, and control of a pVSA rotary joint designed for wrist rehabilitation. The novel design is based on anthropometric values and meets the requirements to provide safe and appropriate rehabilitation of the wrist [7]–[12]. To the authors' knowledge, the use of a Variable Stiffness Actuators (VSAs) for rehabilitation has, as of yet, only been explored for use in lower limbs [2]–[5] and has not been tested on patients with wrist injuries or upper limbs. Our device achieves good performance on position and stiffness control, only showing a small offset concerning the position and stiffness setpoints; probably as a result of oscillating pressures coming from the chosen solenoid valve arrangement and internal friction of the mechanism.

The paper is structured as follows: section II presents the description of the device and its operation; section III shows the analysis of the device and its characteristics, followed by the implemented control law presented in section IV; and test configuration with the experimental results and their discussion in section V; finally, section VI provides our conclusions and details avenues for future work.

## II. DEVICE DESCRIPTION

The device shown in Figure 1a is capable of performing rehabilitative movements on the wrist, i.e. flexion/extension and abduction/adduction, refer to Figure 2. Even though these motions belong to different planes, they can be achieved simultaneously. To allow for both of these motions to be performed in a safe manner a special handle was

[1]OMF Author, MM, EJG, and JAC are with the Department of Engineering, Mechanical Engineering, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Av. Dr. Manuel Nava 304, Zona Universitaria, 78210 San Luis Potosí, S.L.P., México o-m-f-r@outlook.com, {mauro.maya, egonzale, antonio.cardenas}@uaslp.mx

[2]JHL and MZ are with the Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica, Gestionale e dei Trasporti, Universita degli Studi di Genova,Via Balbi, 5, 16126 Genova GE, Italia jesus.lugo@uaslp.mx, zoppi@dimec.unige.it

[3]AG is with the CONACYT-Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Av. Dr. Manuel Nava 304, Zona Universitaria, 78210 San Luis, S.L.P., México alejandro.gonzalez@uaslp.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE I: Bill of materials

| Component | Model | Quantity |
|---|---|---|
| Solenoid valve 3/2 | SMG SY523-5L0Z-01 | 1 |
| Solenoid valve 3/2 | SMG SY513-5L0Z-01 | 1 |
| Solenoid valve 5/3 | SMG SY5320-5LZ-01 | 1 |
| Double-acting pneumatic cylinder | SMG CDG1BN25-100Z | 1 |
| Bolt | SMG CG-T025 | 2 |
| Pivot bracket | SMG CG-025-24A | 1 |
| Piston rod ball joint | Camozzi KJ10D | 1 |
| Pressure sensor module | XGZP6847 | 2 |
| Flow control fitting | SMC AS2201FG-01-04-J | 2 |
| Throttle valve | Camozzi 8512 4-1_8 | 2 |
| Filter regulator | SMC AW20-01E-B | 1 |
| The single-action relief valve | SMC VHS20-01B | 1 |
| Power supply unit | Generic 24V-10A | 1 |
| Microcontroller | Arduino Mega 2560 | 1 |
| Microcontroller | Arduino UNO | 2 |
| Sliding surface | PTFE-V | 1/32x12x24” |

designed. A close-up view of this handle is depicted in Figure 1b. Its design is based on the human hand model developed by Harih and Dolš, allowing the patient to apply a powerful and ergonomic grip helping her or him to better manipulate the device and improving the execution of the rehabilitation exercises [13].

The pVSA consists of a double-acting pneumatic cylinder with three valves. Two of these valves are connected to behave as two 3-way valves as shown in the pneumatic system in Figure 3. This configuration was preferred due to the availability of material. Additionally, the use of a pneumatic system satisfies safety requirements for wrist applications [7].

The main components of the pVSA are: SY523-5L0Z-01 for valve 1, SY513-5LOZ-01 for valve 2, SY5320-5LZ-01 for valve 3, and CDG1LN25-100 for the pneumatic cylinder. The Bill of Materials of the rehabilitation prototype is given in Table I. It is worth noting that parts 14, 15, 17, 18, and 19 (Figure 1) were 3D printed. Their geometry was obtained using a topological optimization on basic geometries (cube, cylinder) subjected to the forces generated by the patient and the pVSA. The topological optimization gave an initial geometry for these parts which were later validated using finite element analysis. The controller is composed of three Arduinos communicated by $I^2C$, suitable for an initial prototype oriented to education. Later it will be changed for a robust controller to be used in patients.

## III. MODELING

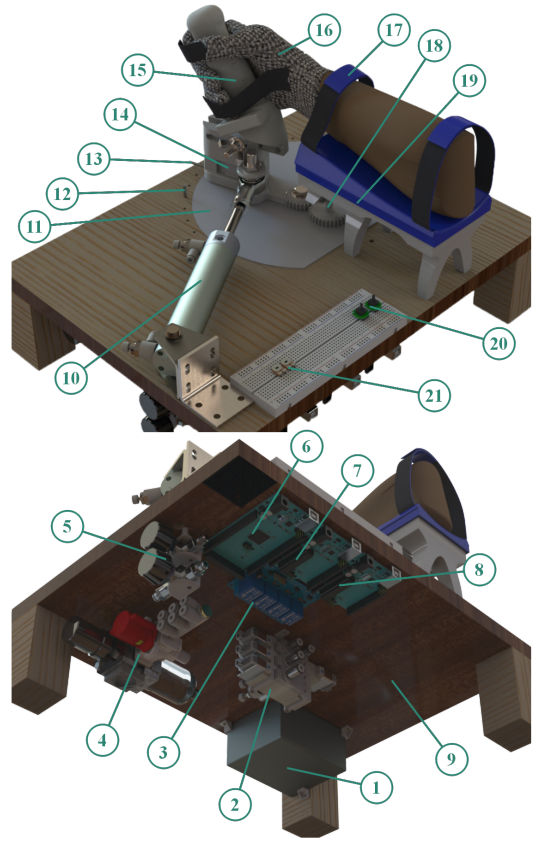
For the work presented here, a kinematic inversion of the slider-crank mechanism (shown in Figure 4) was studied and evaluated for use as a wrist rehabilitative device. The pVSA is used as the sole actuator of the mechanism.

- From Figure 4, it is obtained the functions with which it will be found the position

$$q - l\cos\phi - S\cos\theta = 0 \tag{1}$$

$$S\sin\theta - l\sin\phi = 0 \tag{2}$$

(a) design layout




(b) handle

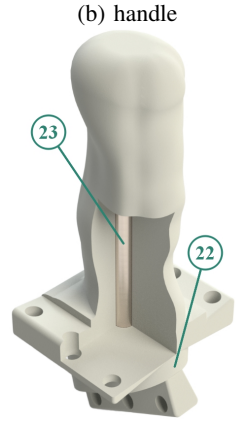



Fig. 1: 1: power supply, 2: solenoid valves, 3: relay module, 4: maintenance unite, 5: flow control valves, 6: Arduino MEGA (as master), 7: Arduino UNO (slave for chamber A), 8: Arduino UNO (slave for chamber B), 9: base support, 10: pneumatic cylinder (pVSA), 11: sliding surface, 12: safety limit pin, 13: safety pin, 14: handle base, 15: handle, 16: grasping glove, 17: velcro straps to hold the forearm, 18: potentiometer joined to idle gear, 19: forearm support, 20: pressure sensors, 21: potentiometers, 22: handle with the attachment for three joints, and 23: steel insert bar.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México


Fig. 2: Setups for abduction/adduction and flexion/extension movements on the device.

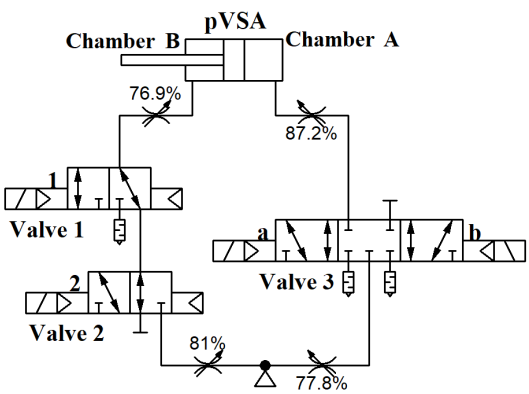



Fig. 3: Pneumatic system of the pVSA

reorganizing for $S$

$$S\cos\theta = q - l\cos\phi \tag{3}$$

$$S\sin\theta = l\sin\phi \tag{4}$$

by squaring and adding equations (3) and (4), it is possible to solve for $S$

$$S = \sqrt{q^2 - 2ql\cos\phi + l^2} \tag{5}$$

Then, reorganizing equations (1) and (2) to solve for $\theta$ by using arc-tangent, to ensure that the solutions are in the proper quadrant [14]:

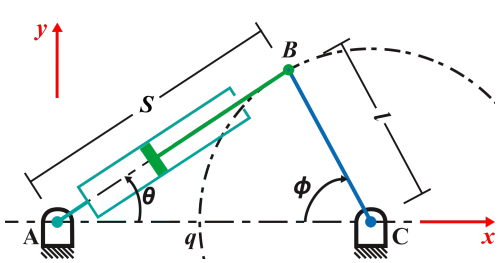



Fig. 4: Mechanism of the rehabilitation device, where $S$ is the cylinder stroke, the rocker arm is $l$ swings from the frame $q$ to form $\phi$.

$$\cos\theta = \frac{q - l\cos\phi}{S} \tag{6}$$

$$\sin\theta = \frac{l\sin\phi}{S} \tag{7}$$

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{l\sin\phi}{S + q - l\cos\phi}\right) \tag{8}$$

- The time derivatives of (1) and (2) are found to be:

$$l\dot{\phi}\sin\phi - \dot{S}\cos\theta + S\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{9}$$

$$\dot{S}\sin\theta + S\dot{\theta}\cos\theta - l\dot{\phi}\cos\phi = 0 \tag{10}$$

which are simultaneously solved as:

$$\dot{S} = \dot{\phi}l\sin(\phi+\theta) \tag{11}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\phi}l\cos(\phi+\theta)}{S} \tag{12}$$

- In turn, the time derivatives of (9) and (10) are found to be

$$\begin{aligned} &l\ddot{\phi}\sin\phi + l\dot{\phi}^2\cos\phi - \ddot{S}\cos\theta \\ &+2\dot{S}\dot{\theta}\sin\theta + S\ddot{\theta}\sin\theta + S\dot{\theta}^2\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{S}\sin\theta + 2\dot{S}\dot{\theta}\cos\theta + S\ddot{\theta}\cos\theta \\ &-S\dot{\theta}^2\sin\theta - l\ddot{\phi}\cos\phi + l\dot{\phi}^2\sin\phi = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Which can be solved simultaneously as:

$$\begin{aligned} \ddot{S} = &\dot{\phi}^2 l\sin\theta\sin\phi - \dot{\phi}^2 l\cos\theta\cos\phi - S\dot{\theta}^2 \\ &-\ddot{\phi}l\cos\theta\sin\phi - \ddot{\phi}l\cos\theta\sin\theta \end{aligned} \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = &\frac{2\dot{S}\dot{\theta} - \ddot{\phi}l\cos^2\theta + \dot{\phi}^2 l\sin\theta\cos\phi}{S} \\ &+\frac{\dot{\phi}^2 l\cos\theta\sin\phi + \ddot{\phi}l\sin\theta\sin\phi}{S} \end{aligned} \tag{16}$$

Regarding the pneumatic cylinder modeling, the study is based on the formulation presented by Xiangrong *et al.* [15], where the force generated by the actuator is given by

$$F = P_A A_A - P_B A_B - P_{atm} A_r \tag{17}$$

where $P_A$ is the pressure in the chamber A as $P_B$ of chamber B, $A_A$ is the surface from the chamber A of the cylinder as $A_B$ of chamber B (being this the side where the rod is, which surface is $A_r$), and $P_{atm}$ is the atmospheric pressure. The stroke of the cylinder is defined as $L$ and its value is 0.1 m (according to the selected physical model). The position of the piston is given by $s$, where the zero value is right in the middle of the stroke, having its limits at $\pm$ 0.05 m. The actuator stiffness ($K$) is defined as the partial derivative of $F$ to the position of the piston ($x$):

$$K = \frac{\partial F}{\partial x} = RT\left(\frac{m_A}{\left(\frac{L}{2}+s\right)^2} + \frac{m_B}{\left(\frac{L}{2}-s\right)^2}\right) \tag{18}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE II: Simulation parameters

| Parameter | Value |
|---|---|
| Maximum input pressure ($P_{max}$) | $1MPa$ |
| Minimum input pressure ($P_{min}$) | $0.15MPa$ |
| Stroke length ($L$) | 0.1 m |
| Chamber A piston surface ($A_A$) | $4.9087x10^{-4}m^2$ |
| Chamber B piston surface ($A_B$) | $4.1233x10^{-4}m^2$ |

where $R$ is the universal gas constant, $T$ is the air temperature, $m_{A,B}$ is the air mass inside each chamber. From this equation is easy to realize that the total stiffness of the actuator is the sum of the stiffness of each chamber ($K_A$ and $K_B$ accordingly).

In order to identify the possible stiffness range of our pVSA, a computation was executed using (18), the ideal gas law ($PV = MRT$), and the values in Table II. The stiffness is affected by $s$ due to its proportionality to the volumes of the chambers, as shown in Figure 5. The minimum stiffness value ($K_{min}$) is obtained when the actuator is fully retracted (volume of chamber A is zero) and $P_B$ is equal to the minimum operational pressure ($P_{min}$). The working range of stiffness is delimited by the black lines in Figure 5, it is recommended to use positions away from the stroke limits to maintain achievable stiffness values. The individual chamber ranges are delimited with blue and red lines, providing useful information for single actuation modes and collision algorithms. Figure 6 displays the achievable range of stiffness for a constant position and different pressures in the chambers, in this case, the equilibrium position ($s = 0$).

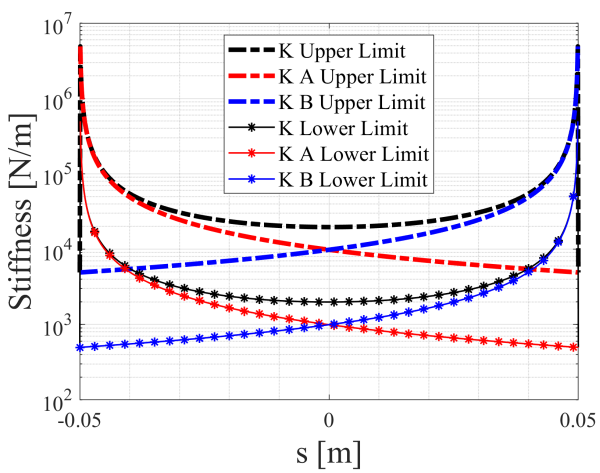



Fig. 5: PVSA stiffness range for different positions of the actuator's stroke (vertical axis is given in logarithmic scale). The stiffness tends to infinity when the volumes of chambers A and B tend to zero (stroke limits), however, the stiffness lowers when the limits are reached.

## IV. Control Law

Figure 7 represents the flowchart used to control position and stiffness in the pVSA. It is worth noting that the controller is composed of low-level and high-level sections.

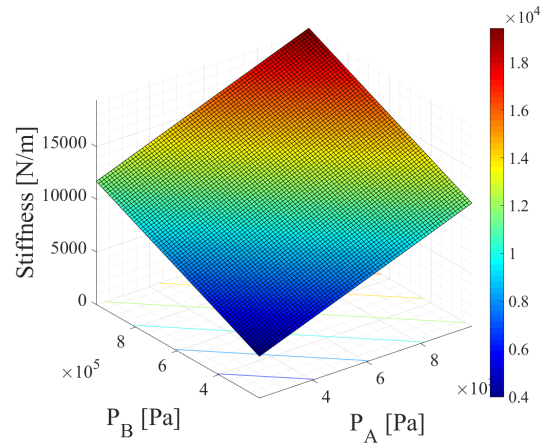



Fig. 6: PVSA stiffness range for a constant position. The position of the piston ($s$) is considered zero.

A Proportional-Integral-Derivative (PID) controller, defined in (19) and (20), was implemented to control the pressure of each chamber (low-level control). For the high level, (21) was obtained from (17) and (18), enabling the computation of air masses based on the desired position $s_{eq}$ and stiffness. After this, (22) uses the masses to calculate the needed pressure for each chamber, being these the input values for the PIDs, as shown next:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + K_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

$$e(t) = P_{Ad,Bd} - P(t)_{A,B} \tag{20}$$

where $e(t)$ and $e(\tau)$ are the errors from the differences of current values (pressures of chambers A,B) with the desired ones (desired pressures of chambers A,B) in the instantaneous time, $K_p$ is the proportional gain, $K_i$ is the integral gain, and $K_d$ is the derivative gain. The PID gains were tunned using the modified Ziegler–Nichols tuning rules called *The rule by Yu no overshot method* [16]. To have simultaneous controlled stiffness and position, the absolute pressure of the chambers and the atmospheric pressure ratio were used to determine the desired pressure to provide stiffness in the actuator. Finally, the angular relationships of the mechanism were included to compute the displacement of the rod [17], to control the angular position of the orthosis.

Individual pressure control of each chamber is performed by a set of three Arduino boards. A master Arduino measures the system's pressures and computes the desired chamber pressure which is then sent to the Arduino slaves in charge of controlling its respective chamber. A representation of the electronics is shown in Figure 8. To pressurize or depressurize the chambers, solenoid valves are used to open or block the airflow. An on/off type control was implemented, similar to the use of a Pulse Width Modulation (PWM), with a maximum frequency of 15Hz for on/off relay switching to activate the solenoids. The valve opening time is calculated from the Arduino PID feedback.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

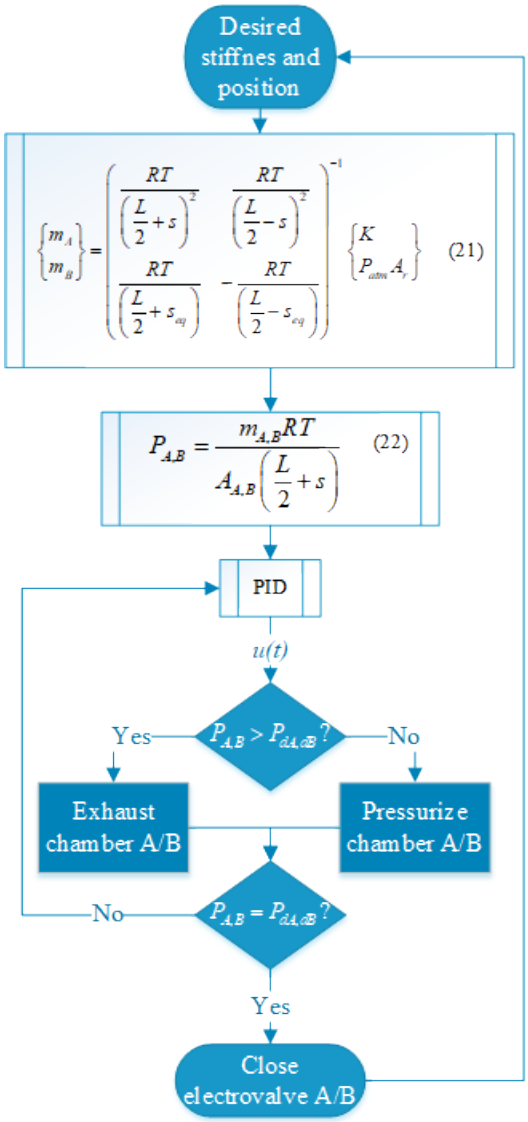



Fig. 7: Desired pressure computation of equations (21) and (22) to control pressure in each chamber and thus achieve control of position and stiffness.

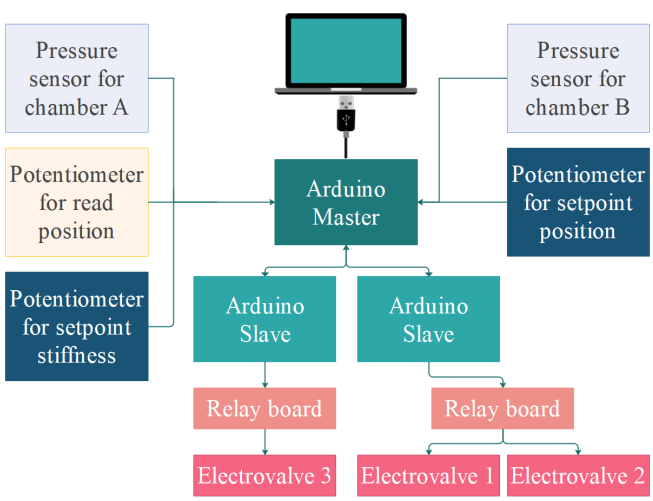



Fig. 8: Electronic experimental setup.

## V. EXPERIMENTAL SETUP AND RESULTS

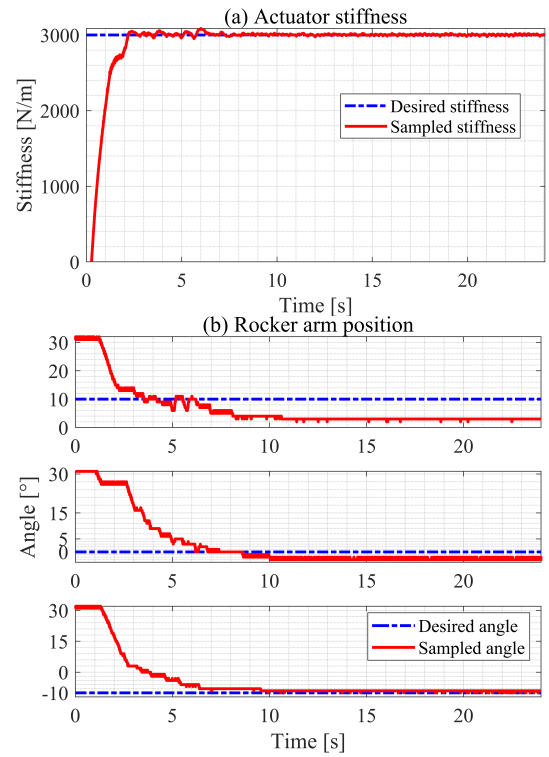



Fig. 9: Results of stiffness which corresponds to the 10° position of the three different test positions.

The orthosis was subjected to $1kg$ load on the handle, simulating the weight of the hand and wrist on the handle. A step-like input was given to the stiffness and position values, this is shown with a blue line in Figure 9. From this, the desired pressure for each chamber was obtained as shown in Figure 10. The experiment showed a satisfactory behavior of the system with a small steady-state error (under 0.5%).

The orthosis moves due to the difference of pressures produced; this has not been directly controlled, resulting in a greater error in the position compared to the pressures and stiffness obtained. But a non-significant 5% error compared to the full range of motion (138°). Besides, the position control obtained is sufficient for rehabilitation, in which the most important thing is stiffness control.

Multiple tests were conducted with different PID parameters. The *Yu no overshot method* presented a good, fast response to the set-points and with no overshoot. The orthosis was commanded to three different test positions: -10°, 0°, and 10° while asked to maintain a constant stiffness of 3000N/m. In this document, the results are shown with the desired position of -10° for stiffness and pressures as shown in Figure 9 and Figure 10. As the desired position is greater than -10°, a greater error is observed in the starting position, while the pressures and stiffness do not increase or decrease their error. It is believed that this is due to the lack of control over the pressure difference between the chambers, which is responsible for the movement, and also to the desired

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

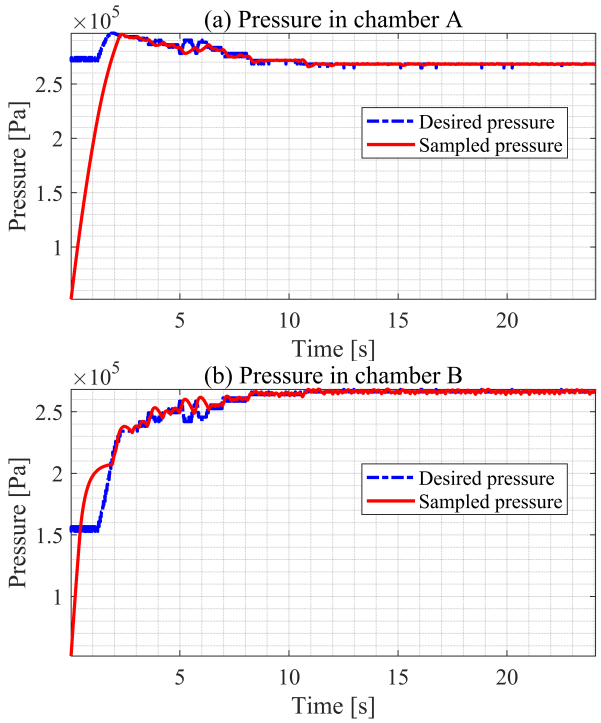



Fig. 10: Pressure control results at 10° of reference.

stiffness, since as the piston reaches the ends of the cylinder the stiffness increases.

The results show small oscillations, caused by the on/off controller, the low working frequency of the solenoid valves. And the fact that the pressure in each chamber is controlled independently causes a series of disturbances between them. It is necessary to emphasize that the results in question show better performance than those of Zheng *et al.* [17], without mentioning that the prediction of pressures that supposedly improved their control was not used in our project.

## VI. CONCLUSIONS

The device satisfies the requirements to be considered as a wrist rehabilitator [9], [12]. The tests performed on the prototype's position and stiffness have shown that it can be controlled with it having a fast and accurate response; to be used in rehabilitation, otherwise, it would not be considered a fast response. Also, we observe that the independent control of the pressures of the cylinder chambers shows a good performance, with a steady-state error under 0.5%. It is possible to control the stiffness and the position of the rocker arm through a relation of pressures and position, with a continuous calculation of desired pressures.

### *Future work*

The solenoid valves can be improved with a higher working frequency. Once we have test results on healthy humans, we will check the ability of the orthosis to rehabilitate. We will even compare its performance with conventional orthoses and treatments, and without variable stiffness. It is recommended to use a means of establishing stiffness values appropriate to the patient, for which sEMG sensors could be used to mimic the stiffness of the muscles to the orthosis.

## REFERENCES

[1] A. I. Kapandji, *Fisiología Articular: esquemas comentados de mecánica humana, Tomo 1*. Madrid: Médica panamericana, 6th ed., 2006.

[2] H. Yu, S. Huang, N. V. Thakor, G. Chen, S. L. Toh, M. Sta Cruz, Y. Ghorbel, and C. Zhu, "A novel compact compliant actuator design for rehabilitation robots," *IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, pp. 1–6, 2013.

[3] R. R. Torrealba, S. B. Udelman, and E. D. Fonseca-Rojas, "Design of variable impedance actuator for knee joint of a portable human gait rehabilitation exoskeleton," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 116, pp. 248–261, 2017.

[4] L. Liu, M. Lüken, S. Leonhardt, and B. J. E. Misgeld, "Emg-driven model-based knee torque estimation on a variable impedance actuator orthosis," in *2017 IEEE International Conference on Cyborg and Bionic Systems (CBS)*, pp. 262–267, 2017.

[5] M. Claros, R. Soto, J. J. Rodriguez, C. Cantu, and J. L. Contreras Vidal, "Novel compliant actuator for wearable robotics applications," *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS*, pp. 2854–2857, 2013.

[6] W. Friedl, L. Visser, G. Ganesh, D. Caldwell, D. Lefeber, E. Burdet, R. Van Ham, M. Laffranchi, A. Albu-Schaeffer, M. Catalano, M. Grebenstein, F. Petit, R. Carloni, B. Vanderborght, S. Wolf, H. Hoppner, S. Haddadin, M. Garabini, A. Bicchi, S. Stramigioli, G. Grioli, A. Jafari, M. Van Damme, O. Eiberger, and N. Tsagarakis, "Variable impedance actuators: A review," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 61, no. 12, pp. 1601–1614, 2013.

[7] K. Plewa, J. R. Potvin, and J. P. Dickey, "Wrist rotations about one or two axes affect maximum wrist strength," *Applied Ergonomics*, vol. 53, pp. 152–160, 2016.

[8] A. F. Barr and J. Bear-Lehman, "Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System," in *Biomechanics of the Wrist and Hand* (M. Nodin and V. H. Frankel, eds.), ch. 14th, pp. 691–747, Wolters Kluwer-Health, 4th ed., 2012.

[9] M. Dvorznak, K. Fitzpatrick, A. Karmarkar, A. Kelleher, and T. McCann, "Orthotic devices," in *An Introduction to Rehabilitation Engineering* (R. A. Cooper, H. Ohnabe, and D. A. Hobson, eds.), pp. 262–283, Pennsylvania: CRC Press, 2018.

[10] H. Al-Fahaam, S. Davis, and S. Nefti-Meziani, "Wrist rehabilitation exoskeleton robot based on pneumatic soft actuators," *2016 International Conference for Students on Applied Engineering, ICSAE 2016*, pp. 491–496, 2017.

[11] J.-h. Bae and I. Moon, "Design and Control of an Exoskeleton Device for Active Wrist Rehabilitation," *2012 12th International Conference on Control, Automation and Systems*, pp. 1577–1580, 2012.

[12] M. Carrozza, N. Ng Pak, E. Cattin, F. Vecchi, M. Marinelli, and P. Dario, "On the design of an exoskeleton for neurorehabilitation: design rules and preliminary prototype," *The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, vol. 2, pp. 4807–4810, 2005.

[13] G. Harih and B. Dolšak, "Tool-handle design based on a digital human hand model," *International Journal of Industrial Ergonomics*, vol. 43, no. 4, pp. 288–295, 2013.

[14] J. J. Cervantes-Sánchez, H. I. Medellín-Castillo, J. M. Rico-Martínez, and E. J. González-Galván, "Some improvements on the exact kinematic synthesis of spherical 4R function generators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, no. 1, pp. 103–121, 2009.

[15] S. Xiangrong and M. Goldfarb, "Simultaneous force and stiffness control of a pneumatic actuator," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, vol. 129, no. 4, pp. 425–434, 2007.

[16] M. Chidambaram and N. Saxena, *Relay Tuning of PID Controllers*. Tamil Nadu: Springer, 2018.

[17] H. Zheng, M. Wu, and X. Shen, "Pneumatic Variable Series Elastic Actuator," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, vol. 138, no. 8, pp. 1–10, 2016.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Sistema de asistencia para usuarios invidentes en el uso del transporte público

Jereidy Cano, Salvador Martínez, Luis Alberto Morales, Gerardo Israel Pérez, *Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería*

***Resumen*— En este artículo, se presenta el desarrollo de un sistema de asistencia para personas invidentes en el uso de transporte público, el cual, tiene como principal objetivo ayudar a los usuarios invidentes a desplazarse en este medio de transporte, y así, aportar en la inclusión social y mejorar su calidad de vida. El sistema funciona a través de una aplicación móvil que sirve como medio de comunicación entre el sistema y usuario, está basado en tecnología bluetooth de bajo consumo a través de módulos Beacon BLE y escaneo de código de respuesta rápida (QR) que brindan al usuario una alternativa para identificar las unidades de transporte. Los resultados muestran que los usuarios sienten mayor confianza a salir para viajar de forma independiente ya que con el uso del sistema no necesitan pedir ayuda a terceros cuando abordan o descienden de un autobús. Los módulos usados brindan la información de manera oportuna y certera que el GPS de un teléfono además que no necesitan conexión a internet para su funcionamiento.**

## I. INTRODUCCIÓN

La búsqueda de la inclusión social es un campo de investigación activa y un tema generador de proyectos dirigidos a personas con alguna discapacidad, como lo es la ceguera y la debilidad visual. Así como, Markiewicz *et al.* en [1] presentan un sistema de asistencia para personas ciegas y con discapacidad visual con el objetivo de facilitar el uso de medios de transporte público. El proyecto se desarrolla con el uso de teléfonos celulares como medio para el sistema de información de pasajeros y bajo el sistema de posicionamiento global (GPS), el sistema global para comunicaciones móviles (GMS) y comunicación bluetooth para fines de ubicación y comunicación. En la propuesta elaborada se envían mensajes auditivos a los usuarios a través de sus teléfonos móviles, los cuales cuentan con un software específico. Benatre *et al.* en [2] diseñaron UBIBUS, la cual es una aplicación móvil con el objetivo de ayudar a personas ciegas o con un grado de discapacidad visual a utilizar el transporte público. La aplicación permite al usuario solicitar con antelación el autobús de su elección y ser notificado cuando ha llegado el autobús correcto. El usuario puede utilizar un PDA (equipada con una interfaz WLAN) o un teléfono móvil con bluetooth.

Moromenacho *et al.* en [3] realizaron la propuesta de un lazarillo robótico apoyado en la visión artificial, con la finalidad de guiar a las personas invidentes en un entorno controlado. El dispositivo cuenta con una Raspberry Pi 3 B+ que permite el control del sistema, un dispositivo de computación neuronal conocido como Intel Neural Compute Stick 2 (INTEL NCS 2) que recibe imágenes captadas de la cámara y determina el tipo de imagen, una cámara Web la cual cumple dos funciones; la primera es adquirir las imágenes del entorno, la segunda es detectar una línea guía de color rojo y finalmente la comunicación del lazarillo robótico está compuesta por una tarjeta Arduino Uno y un módulo Bluetooth HC-05 cuya función es informar a la persona invidente el sentido en el que se está moviendo mediante mensajes de voz.

Por su parte Varón *et al.* en [4] crearon un módulo asistente a invidentes para el sistema de transporte público en Bogotá, Colombia. Su objetivo era brindar una herramienta a los discapacitados visuales para obtener la información correspondiente a los camiones, misma que se brinda a la ciudadanía a través de paneles informativos en las estaciones de transporte, para lograrlo implementaron la integración de los OCR, enfocados en el reconocimiento de caracteres, y un algoritmo (DTPB+RT) de detección de texto. Bischof *et al.* en [5] desarrollaron NAVCOM, que es un sistema de navegación en el transporte público dirigido a personas invidentes y discapacitados visuales con el objetivo de facilitar tareas específicas, que son, encontrar el camión correcto e identificar su estación de destino, se usaron componentes estándar de WLAN y un teléfono inteligente los cuales fungen como emisor y receptor de información, la cual se le hace saber al usuario por notas sonoras.

Lavanya *et al.* en [6] propusieron un sistema de autobús que utiliza redes de sensores inalámbricos (WSN), en el cual las personas invidentes cuentan con una unidad ZigBee que es reconocida por el ZigBee en el autobús y se hace la indicación en el autobús sobre la presencia de un usuario invidente en la estación, de esta forma el camión se detiene en la estación en particular. El usuario selecciona su lugar de destino y mediante el sistema de reconocimiento de voz se analiza en un microcontrolador que genera los números de autobús correspondientes a la parada y estos se anuncian al usuario por medio de audios. Baudoin *et al.* en [7] desarrollaron el proyecto RAMPE, el cual es un sistema de información interactivo y auditivo para la movilidad de personas ciegas en los transportes públicos con la finalidad de aumentar su movilidad y autonomía en este medio. El sistema está basado

[1]*Research supported by ABC Foundation.

F. A. Author is with the National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO 80305 USA (corresponding author to provide phone: 303-555-5555; fax: 303-555-5555; e-mail: author@ boulder.nist.gov).
S. B. Author, Jr., was with Rice University, Houston, TX 77005 USA. He is now with the Department of Physics, Colorado State University, Fort Collins, CO 80523 USA (e-mail: author@lamar. colostate.edu).
T. C. Author is with the Electrical Engineering Department, University of Colorado, Boulder, CO 80309 USA, on leave from the National Research Institute for Metals, Tsukuba, Japan (e-mail: author@nrim.go.jp).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

en un asistente digital personal (PDA) de mano inteligente con síntesis de voz incorporada y capaz de comunicarse mediante WiFi con las estaciones de autobús, así como, gestionar la base de datos a través de un archivo XML. Krajnc *et al.* en [8] presentaron un concepto de interfaz de usuario para pantallas táctiles que permite a las personas ciegas o con deficiencias visuales controlar las aplicaciones de manera óptima. La solución sugerida para los teléfonos móviles con Android es proporcionar "toques hablados", como una lista táctil hablada que permiten la entrada rápida con retroalimentación de audio.

Kiers *et al.* en [9] desarrollaron el proyecto WAYS4ALL, en el que implementaron etiquetas de identificación por radiofrecuencia (RFID) para identificar rutas interiores, así como en vía pública. El sistema consta de colocar estas etiquetas en puntos estratégicos de los destinos que se contemplen, mismas que envían un código único a través de un lector RFID al teléfono inteligente del usuario, este procesa el código y lo envía a un servidor de base de datos RFID donde toda la información se almacena como puntos de ubicación. De esta manera cuando el usuario salga de casa ingresa su destino en el teléfono inteligente y el servidor calcula la ruta óptima en función de la ubicación, dirección de movimiento y perfil de usuario. El sistema brinda al usuario la información de la ruta a través de notificaciones auditivas. Petrie *et al.* en [10] presentaron MOBIC: Diseño de ayuda de viaje para personas ciegas y ancianas, el cual busca incrementar la movilidad independiente de este grupo de personas, el sistema se basa en las tecnologías de los sistemas de información geográfica (GIS) y GPS. MOBIC consta de dos componentes que se interrelacionan, el primero es el sistema de pre viaje MOBIC MOPS en el cual el usuario planifica su viaje, para dar paso al segundo elemento MOBIC MOODS el cual ayuda a ejecutar el traslado planeado dando asistencia de orientación y navegación. El proyecto está diseñado como un sistema complementario a las ayudas primarias que ellos poseen como el bastón o el perro guía.

De acuerdo con la problemática existente se desarrolló el sistema expuesto en el presente artículo, el cual está enfocado en convertirse en una ayuda para los discapacitados visuales en el uso de transporte público, con el objetivo de generar un incremento en la independencia e inclusión social de estas personas en la sociedad. La innovación de este trabajo es la implementación de módulos bluetooth de bajo consumo (Beacons BLE) para la geolocalización de las unidades de transporte y las estaciones. Estos módulos se comunican inalámbricamente con una aplicación móvil desarrollada en la plataforma Android Studio© que se instala en el teléfono móvil del usuario, de esta forma es posible conocer la ubicación en tiempo real de los autobuses cercanos y después de abordar el autobús permite conocer las estaciones por las que pasa a través de retroalimentación por voz. El usuario también tiene la opción de identificar el autobús con un escaneo de códigos de respuesta rápida (QR). Los módulos Beacon BLE envían una señal al usuario sin un retraso significativo y con una precisión de distancia centímetros. Los resultados parciales muestran que los usuarios son capaces de reconocer el autobús que se acerca a la parada con un tiempo de anticipación de hasta 50 s, dependiendo de la velocidad de la unidad, también son capaces de identificar la estación de destino desde 40 m de distancia, con esto tienen tiempo suficiente para abordar el autobús y anticipar su bajada. Con este desarrollo los usuarios tienen mayor confianza de salir a la calle de forma independiente, les brinda mayor inclusión social e influye de manera positiva en su calidad de vida.

El presente escrito está organizado de la siguiente forma: en la sección I se describen una serie de proyectos que están vinculados con la problemática que abordamos y nos contextualizan sobre lo que se ha experimentado y creado, seguido a esta sección, en la numero II, se expone la configuración técnica del sistema que presentamos, en la cual se abordan todos los detalles tecnológicos que se utilizaron para su desarrollo. En la sección III se plasman los resultados de las pruebas que se han realizado a base de comprobar el funcionamiento del sistema y en las cuales se han evaluado una serie de variables que influyen en el uso de este, para cerrar en la IV sección se exponen una serie de conclusiones y prospectivas del proyecto.

## I. METODOLOGÍA

En esta sección se describe el procedimiento seguido para el desarrollo del sistema. En la Figura 1, se muestra el diagrama a bloques de la metodología.

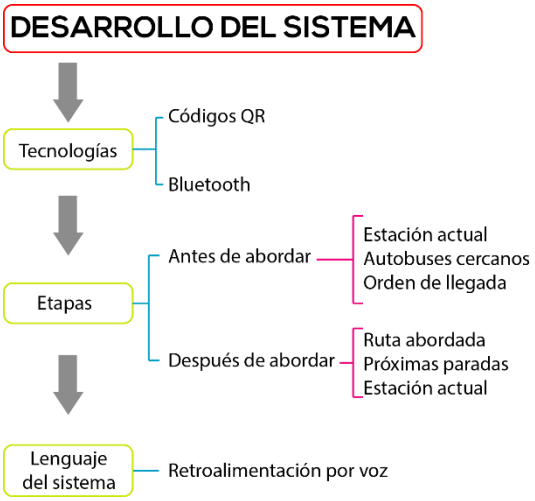



Figura 1. Diagrama de desarrollo de sistema.

El funcionamiento consta de tres etapas principales. El usuario inicia la aplicación móvil al salir de casa en dirección a la estación más cercana, en cuanto entra en la región de alcance del Beacon bluetooth recibe una notificación por mensaje de voz que le indica su ubicación exacta. Una vez en la estación la aplicación le informa en tiempo real sobre los autobuses que se acercan, de esta manera puede abordar la ruta deseada. Después de abordar el autobús la aplicación informa al usuario sobre las estaciones por las que pasa, así, puede anticipar su bajada en la estación de destino.

### A. *Colocación de módulos*

Para conocer la ubicación en tiempo real de los autobuses y de cada una de las estaciones se colocan los módulos BlueBeacon Forte que funcionan con tecnología Bluetooth Low Energy (BLE) en cada unidad. Estos dispositivos envían

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

una señal bluetooth en una sola dirección, es decir, no reciben información, solo la envían. Cada módulo envía un paquete de datos que contiene un identificador único (ID) con el que se asigna un mensaje de voz al usuario correspondiente a la información que contiene. Las Figuras 2a y 2b muestran la ubicación de los Beacons en cada estación y en cada unidad del transporte público.


a)


b)

Figura 2. a) Localización de Beacons en la unidad de transporte público. b) Localización de Beacons en la estación de autobuses.

La Figura 2 a) muestra que hay 3 posiciones ideales para colocar el módulo Beacon BLE; A. En la parte frontal de la unidad. B. En la parte lateral inferior. C. En la parte lateral superior, cualquiera de estas tres opciones es viable para la instalación de los módulos y el alcance de la señal no se ve afectado.

La Figura 3 muestra uno de los módulos BlueBeacon BLE Forte, los cuales, se alimentan con una batería de 3.2 volts de litio que puede durar desde 3 hasta 10 años de acuerdo al uso que se le dé.

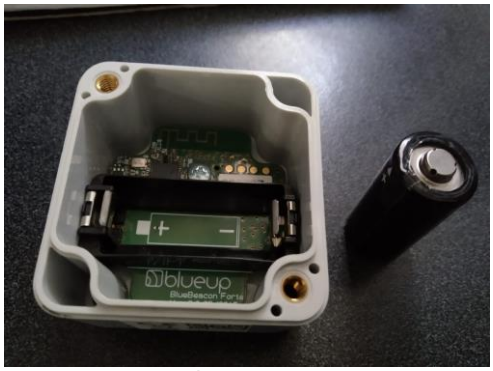


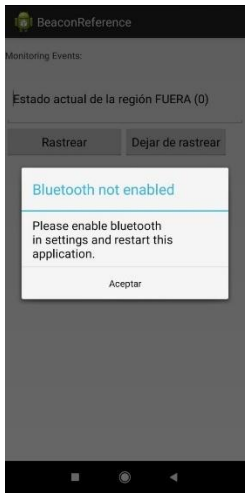

Figura 3. Módulo BlueBeacon Forte.


Figura 4. Colocación de códigos QR.

Los códigos QR se colocan como lo muestra la Figura 4. En la cual se observan 3 opciones para pegar el código QR: La opción A, corresponde a la parte superior derecha, la opción B a la parte central altura media y la opción C, a la parte inferior izquierda. Estas son las posiciones en las que la vista del conductor no se ve obstruida por el código QR y en la que los usuarios pueden escanear el código desde una distancia relativamente larga, de esta manera, cuentan con tiempo suficiente para detener el autobús y abordarlo.

### *B. Interfaz de la aplicación*

Para la comunicación entre el sistema y el usuario se desarrolla una aplicación móvil que permite obtener información en tiempo real de la ubicación de los autobuses. La Figura 5, muestra las partes que componen la interfaz de la aplicación móvil.



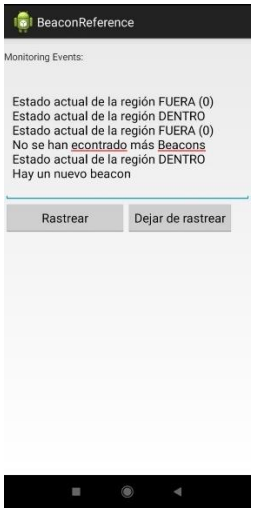

a)


b)

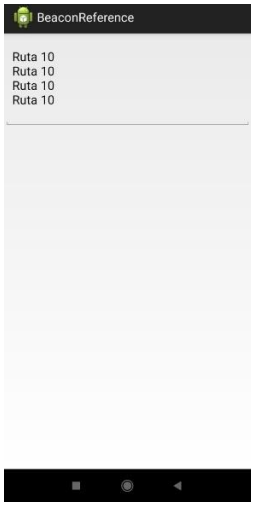

c)


d)

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




e)




f)

Figura 5. Etapas de la interfaz de usuario de aplicación móvil. a) Activación de bluetooth. b) Estado actual de la región. c) Cambio de estado en la región. d) Arribo a una estación. e) Unidad de transporte acercándose. f) Numero de ruta que se acerca.

En la Figura 5 a) la aplicación solicita al usuario activar el bluetooth. En la Figura 5 b) la pantalla muestra el estado de la región, este puede ser DENTRO si hay un Beacon cerca o FUERA si no hay ningún Beacon cerca. Cuando detecta un Beacon cerca, como se muestra en la Figura 5 c) el estado de la región cambia a DENTRO y el usuario debe dar clic en el botón *rastrear*, una vez hecho esto se abre una nueva pantalla que muestra la información correspondiente al Beacon en cuestión, como se observa en la Figura 5 d), en este caso el usuario recibe el mensaje de voz "*Estación constituyentes Alameda*" indicando su ubicación en tiempo real. Cuando sale de la región de Beacons el estado vuelve a ser FUERA hasta que encuentra un nuevo Beacon, como se muestra en la Figura 5 e). En este caso el nuevo Beacon indica el número de ruta que se acerca al usuario, para que esté consciente del autobús al que debe abordar.

*C. Funcionamiento*

Para comprender el funcionamiento de la aplicación se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos de funcionalidad:

- Tecnología; Módulos Beacon BLE Bluetooth y QR scanning.
- La aplicación móvil habilita el uso del bluetooth del teléfono.
- Funciona en segundo plano.
- Una persona con discapacidad visual es capaz de usar un teléfono celular Android o iPhone y sus aplicaciones.
- Los usuarios pueden dirigir la cámara del teléfono en una dirección deseada.

Antes de abordar el autobús: Cuando el usuario llega a la estación recibe un mensaje de confirmación desde la aplicación indicando su llegada y la ubicación de esta, por ejemplo; "*Usted se encuentra en la estación QRO-BUS Constituyentes Alameda".* Esta etapa se ilustra en la Figura 6.

Figura 6. Funcionamiento antes de abordar el autobús.

Identificando el autobús: En esta etapa el usuario tiene dos opciones para identificar los autobuses; 1. Por escaneo de códigos QR. El usuario tiene la opción de sacar su teléfono y dirigir la cámara hacia los autobuses que se acercan para saber las rutas que se aproximan. De acuerdo a las pruebas realizadas bajo condiciones ideales esto les da un tiempo de reacción de hasta 50s 2. Mediante comunicación bluetooth. Además del escaneo de QR, el usuario recibe desde la aplicación mensajes de voz que indican el número ruta que se aproxima a la estación, por ejemplo; "*Ruta diez."* Cuando se aproximan varias rutas al mismo tiempo los mensajes llegan en el orden que vienen los autobuses, por ejemplo; "*Ruta diez, Ruta ocho, Ruta quince."* Así, el usuario sabe qué autobús debe abordar de acuerdo al orden de llegada. Esta etapa se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Identificando el autobús

Después de abordar el autobús: Cuando el usuario está viajando en el autobús, recibe automáticamente mensajes de voz desde la aplicación que le indican cada estación por la que pasa, por ejemplo; "*Constituyentes Alameda."* Con un tiempo de reacción de 15 s aproximadamente de acuerdo a las primeras pruebas realizadas. De esta manera el usuario es capaz de ejecutar su bajada con tiempo suficiente en el punto deseado sin necesidad de pedir ayuda a terceros, esta etapa se ilustra en la Figura 8.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Figura 8. Información durante el trayecto.

## II. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las pruebas del sistema que se han realizado hasta el momento han sido hechas por personas con un nivel de visión normal que simulan ser un usuario discapacitado, esta etapa se llama validación. Las pruebas se llevan a cabo en el estacionamiento de la Facultad de Ingeniería de la UAQ campus San Juan del Río. Se sigue un circuito con un vehículo de prueba que simula ser la unidad del transporte público, a este se le colocan los códigos QR en la parte frontal y en la parte lateral, así como un módulo bluetooth BlueBeacon Forte. Primero se evalúa el alcance del módulo bluetooth y la capacidad de un teléfono convencional con sistema operativo Android en su versión Lollipop 5.1.1 para escanear el código QR, para esto se coloca el teléfono con la cámara digital en un punto estratégico con ayuda de un tripié, como se muestra en la Figura 9.

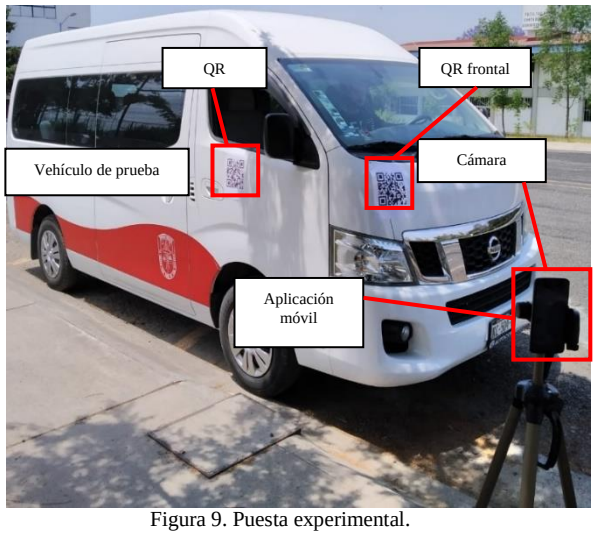



Figura 9. Puesta experimental.

En la Figura 9, se muestra la puesta en la cual se observa que se utiliza un vehículo de transporte de personal tipo URVAN con capacidad para 22 pasajeros. 2 códigos QR impresos con un tamaño de 22x22 cm. La aplicación se desarrolló en la plataforma Android Studio© para una versión de Android Lollipop 5.1.1 que de acuerdo con la misma plataforma puede correr en el 94.1 % de todos los dispositivos Android existentes hasta el momento.

Una vez que se llevan a cabo las pruebas y se recopilan los datos, es posible hacer una evaluación de desempeño del sistema. Las variables medidas son:

- Detection (Ct); puede tomar dos valores, 0 para cuando la instrucción no fue detectada y 1 cuando la señal es detectada.
- Distance (D); es la distancia más lejana del vehículo al usuario cuando se logra la interconexión.
- Time remaining estimating (Tre); es el tiempo que tarda el vehículo en llegar a la parada desde que lo detecta el usuario.

Todas las variables fueron medidas con el mismo rango de velocidades (Vel) en el vehículo.

La Tabla 1, muestra los resultados de las pruebas en el escaneo de los códigos QR. En este caso el sistema se prueba a diferentes ángulos θ (es la orientación del teléfono celular), debido a que este factor afecta directamente los resultados.

| θ (°) | Vel (Km/h) | Ct | D (m) | Tre (s) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | ND |
| | 5 | 1 | 0 | 0 |
| | 10 | 1 | 0 | 0 |
| | 15 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 1 | 0 | ND |
| | 5 | 1 | 0 | 0 |
| | 10 | 1 | 0 | 0 |
| | 15 | 1 | 0 | 0 |
| | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 30 | 0 | 1 | 6 | ND |
| | 5 | 1 | 6 | 4.32 |
| | 10 | 1 | 6 | 2.16 |
| | 15 | 1 | 6 | 1.44 |
| | 20 | 1 | 6 | 1.08 |
| 45 | 0 | 1 | 18 | ND |
| | 5 | 1 | 18 | 12.96 |
| | 10 | 1 | 18 | 6.48 |
| | 15 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | 21 | ND |
| | 5 | 1 | 21 | 15.12 |
| | 10 | 1 | 21 | 7.56 |
| | 15 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 75 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 |
| | 15 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 90 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | 0 | 0 | 0 |
| | 15 | 0 | 0 | 0 |
| | 20 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 1. Resultados de escaneo de códigos QR.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Los datos mostrados en la Tabla 1 revelan que cuando la cámara digital se coloca a un ángulo de 0° el sistema detecta el QR solo a velocidades bajas y con el vehículo justo frente al usuario, lo que evita que tenga un periodo de tiempo para interpretar la información antes de que llegue el vehículo. Cuando la cámara se coloca a 15° el sistema detecta el QR en todas las velocidades, sin embargo, presenta el mismo problema de hacer la detección cuando el vehículo ya llegó a la parada. Colocar la cámara a 30° es una de las posiciones que da mejores resultados ya que detecta el QR en todas las velocidades y a una distancia de 6 m antes de llegar a la ubicación del usuario, esto le da un tiempo entre 1.08 s y 4.32 s para reaccionar y tomar el autobús. La posición de 45° muestra resultados muy favorables porque el sistema detecta el QR a una distancia de 18 m, lo que le da al usuario un tiempo de reacción entre 6.48 s y 12.96 s, pero se observa que en esta posición el sistema no detecta el QR a velocidades altas. 60° es una de las mejores posiciones de la cámara cuando el vehículo viaja a velocidades bajas, detecta el QR a una distancia de 21m dándole al usuario un tiempo de 7.56 s a 15.12 s para reaccionar. Cuando se coloca la cámara a los ángulos 75° y 90° el sistema es incapaz de detectar la información encriptada en código QR.

Los resultados de las pruebas realizadas con el sistema de comunicación bluetooth se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados de la comunicación Bluetooth.

| Vel (Km/h) | Ct | D (m) | Tre (s) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 70 | ND |
| 5 | 1 | 70 | 50.4 |
| 10 | 1 | 57.5 | 20.70 |
| 15 | 1 | 45 | 10.8 |
| 20 | 1 | 30 | 5.4 |

De la Tabla 2, se deduce que la telecomunicación por bluetooth es una buena opción para ser implementada en el sistema, el bluetooth usado se mantiene conectado en una distancia máxima de 70 m, dando al usuario un tiempo de reacción máximo de 50.4 s, sin embargo, mientras el vehículo viaja a mayor velocidad el sistema se conecta a una distancia más cercana, lo que le da un menor tiempo de reacción al usuario.

## III. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo, se presentó el desarrollo tecnológico de un sistema de asistencia a personas invidentes en el uso de transporte público, el cual en las pruebas de funcionamiento que se han realizado hemos obtenido resultados parciales positivos en los que el sistema cumple con los objetivos marcados al inicio del proyecto. Una de las ventajas que nos diferencia de las aplicaciones existentes es la que nos brinda la tecnología bluetooth ya que el usuario no requiere de una conexión a internet para hacer uso de la app, de igual forma no se requiere de un celular de última generación, únicamente con que cuente con bluetooth y cámara digital. El diseño de interfaz es muy simple dado que los usuarios dominan el uso de aplicaciones con pocas opciones en el menú de la misma, de esta forma el sistema operativo se diseñó de manera que les facilite la memorización de uso.

Como trabajo futuro se plantea realizar las adaptaciones necesarias para realizar pruebas de funcionalidad del sistema en el transporte público de Querétaro, estos cambios van en función de acoplar una terminal para los camiones, debido a que de acuerdo al jefe de operaciones del sistema QroBus, los camiones cambian de ruta diariamente por lo que no se puede fijar un módulo único en los camiones. También se espera implementar el código QR en paradas convencionales, las cuales al tener otra configuración y arquitectura se adaptan mejor a esta tecnología. Además, se pretende probar el sistema con usuarios invidentes en el contexto real y finalmente hacer la aplicación pública para todos los usuarios que la necesiten.

## REFERENCIAS

[1] Markiewicz M., Skomorowski M. (2010), Public Transport Information System for Visually Impaired and Blind People, *In: Mikulski J. (eds) Transport Systems Telematics. TST 2010. Communications in Computer and Information Science*, vol 104. Springer, Berlin, Heidelberg.https://doi.org/10.1007/978-3-642-16472-9_30

[2] Banâtre M., Couderc P., Pauty J., Becus M. (2004) Ubibus: Ubiquitous Computing to Help Blind People in Public Transport. *In: Brewster S., Dunlop M. (eds) Mobile Human-Computer Interaction - MobileHCI 2004. Mobile HCI 2004. Lecture Notes in Computer Science*, vol 3160. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-28637-0_28

[3] Moromenacho O., & Yanguicela J., (2019, agosto), Desarrollo de un lazarillo robótico apoyado con visión artificial para el guiado de personas invidentes.

[4] Varón J., & Díaz M. (2018, Julio), Módulo asistente de invidentes para el sistema de transporte transmilenio.

[5] Bischof W., Krajnc E., Dornhofer M., Ulm M. (2012) NAVCOM – WLAN Communication between Public Transport Vehicles and Smart Phones to Support Visually Impaired and Blind People. *In: Miesenberger K., Karshmer A., Penaz P., Zagler W. (eds) Computers Helping People with Special Needs. ICCHP 2012. Lecture Notes in Computer Science*, vol 7383. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31534-3_14

[6] G. Lavanya, W. Preethy, A. Shameem and R. Sushmitha, "Passenger BUS alert system for easy navigation of blind," *2013 International Conference on Circuits, Power and Computing Technologies (ICCPCT)*, Nagercoil, 2013, pp. 798-802, doi: 10.1109/ICCPCT.2013.6529043.

[7] Baudoin, G., Venard, O., Uzan, G., Rousseau, A., Benabou, Y., Paumier, A., Cesbron, J.: The RAMPE Project: Interactive, Auditive Information System for the Mobility of Blind *People in Public Transports. In: Proc. of the 5th International Conference on ITS Telecommunications, Brest, France* (2005).

[8] Krajnc E., Knoll M., Feiner J., Traar M. (2011) A Touch Sensitive User Interface Approach on Smartphones for Visually Impaired and Blind Persons. *In: Holzinger A., Simonic KM. (eds) Information Quality in e-Health. USAB 2011*. Lecture Notes in Computer Science, vol 7058. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25364-5_41

[9] Kiers, M., Bischof, W., Krajnc, E., Dornhofer, M.: Evaluation and Improvements of an RFID Based Indoor Navigation System for Visually impaired and Blind People. *In: 2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation; Paper*, Guimarães, Portugal (September 2011).

[10] Petrie H., Johnson V., Strothotte T., Raab A., Fritz S., & Michel R. (1996, January), MOBIC: Designing a travel aid for blind and elderly people. *In Journal of navigation* Vol. 49. pp. 45-52.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 7

## *Robótica móvil*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Inverse Kinematics of a RSRR HeIse wheel using Neural Networks

Jose F. Flores
*F.I.M.E., U.N.*
*Universidad Autńoma de Coahuila*
Monclova, Coah. Mexico
email: fidencio.flores@uadec.edu.mx

Hector A. Moreno
*F.I.M.E., U.N.*
*Universidad Autónoma de Coahuila*
Monclova, Coah. Mexico
email: h_moreno@uadec.edu.mx

Isela G. Carrera
*F.I.M.E., U.N.*
*Universidad Autónoma de Coahuila*
Monclova, Coah. Mexico
email: isela.carrera@uadec.edu.mx

Mario A. Garcia
*D.I.M, DICIS*
*Universidad de Guanajuato*
36885 Salamanca, Gto., Mexico.
email: garcia.mario@ugto.mx

Roberto G. Adan
*F.I.M.E., U.N.*
*Universidad Autónoma de Coahuila*
Monclova, Coah. Mexico
email: robertoadan@uadec.edu.mx

***Abstract*—The RSRR HeIse wheel is a 2 DOF mechanism that can transform a circular wheel into a hybrid wheel with multiple limbs. Solving the inverse kinematics of this mechanism requires solving a system of non-linear equations with multiple solutions. In order to find an efficient algorithm for on-line computation of the inverse kinematics, in this work we explore the use of artificial neural networks. The analytical solution of forward kinematics is used to generate the data set for the neural networks training. Different structures of networks are tested and their performance in terms of accuracy is discussed. The results of a simulation using the obtained model shows the efficacy of this method.**

***Index Terms*—Inverse Kinematics, Neural Networks, Transformable Wheel**

## I. Introduction

Mobile robotic platforms have been used in different applications, such as assistance in household activities, surveillance and security, health-care and rehabilitation, agriculture and space exploration. The presence of mobile robots is expected to be much greater in the near future, given the new applications that are emerging, such as, for example, the automated delivery of goods [1]. Therefore, many researcher are looking for new robust and flexible methods of locomotion for mobile robots.

Various designs of hybrid locomotion systems combining methods such as wheels and legs have been proposed in recent years. Some types of hybrid sytems are robots with wheels and legs [2], [3], robots with wheeled legs [4], [5] and robots with legged wheels [6]. These wheels permit the vehicles to traverse rough terrain (e. g., gravel and rubble), to improve traction in sliding surfaces (e.g., sand, mud and snow) [7]. There are some designs of legged wheels that permit to control the extension or configuration of the limbs, we termed these designs as Variable Geometry Legged Wheels (VGLWs). Different desings of VGLWs have been proposed in the literature, some of them are pasive mechanisms, others consist of 1 [8] or 2 [9]–[13] degrees of freedom mechanisms actuated by electric motors, and others employ neumatic [14] and hydraulic fluids [15] to perform the transformation. One particular case of VGLWs are the wheels that can transform into legs [16], [17].

In [18] Moreno and Carrera introduced the HeIse wheels, a series of mechanism for implementing VGLWs. These mechanisms have two degrees of freedom and their motion can be controlled using a pair of actuators, one extends/flexes the limbs and the other rotates the wheel. Figure 1 shows the design of a RSRR HeIse wheel. An interesting feature of this mechanism is that actuators are placed on the chassis of the vehicle and not inside of the wheels, in this way the volume and mass of the wheel is reduced. On the other hand, the mechanism allows the motion of the links that have contact with the ground be performed in a plane orthogonal to the rotation axis of the wheel, avoiding the drawback of excessive forces generated in some VGLWs because of the dragging of the limbs against the ground during their extension.

In this paper we present the solution of the inverse kinematics of a RSRR HeIse wheel using neural networks. Solving the inverse kinematics of this mechanism requires solving a system of four non-linear equations whose analytical solution is difficult. In a previous work [19] the system of equations was reduced to a pair of quadratic equations in two variables with 8 possible solutions obtained by using a numerical method. This research explores the use of neural networks as a method for efficient on-line computation of the inverse kinematics. In the next section, a description of the mechanism is given and the solution of the forward kinematics is presented. The forward kinematics is used to generate the data set for the neural networks training. Later the results in terms of positioning errors of several structures of neural networks are discussed. After that, the results of a simulation using the obtained model will be presented. Finally the conclusions and future work for this research are presented.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

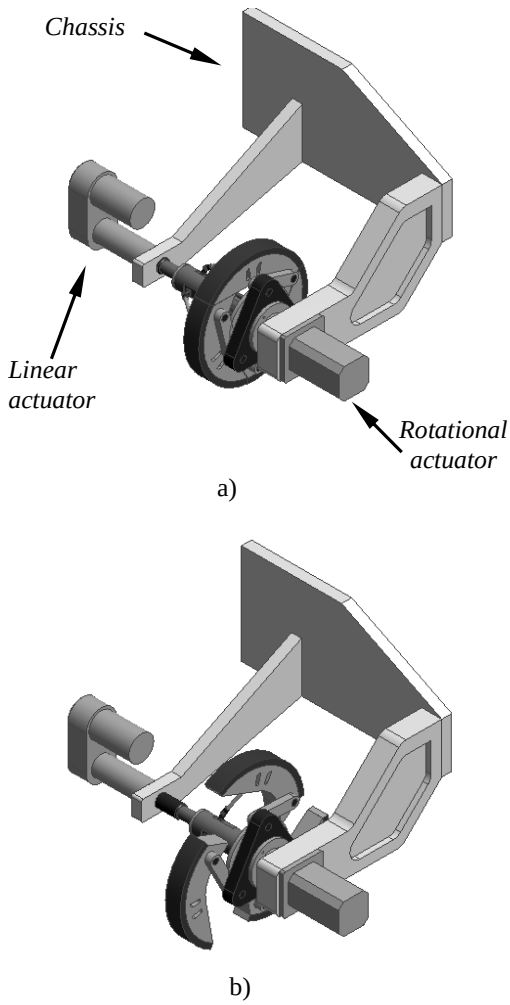



Fig. 1: RSRR wheel in its a)closed position and b)open position

## II. Forward Kinematics

Figure 1 shows a 3RSRR Helse Wheel in open and closed position. The mechanism consists of a sliding shaft, a rim and a series of deployable limbs. The kinematic chain of one limb consists of binary links connected by the following sequence of kinematic pairs: revolute ($R_1$), spherical ($S$), revolute ($R_2$) and revolute ($R_3$). Figure 2 presents a kinematic scheme and the considered vectors for the analysis of the $i$-th leg of a RSRR HeIse wheel. Two reference frames are defined for the analysis. The first one, denoted by $\Sigma_1$, is attached to the chassis of the vehicle, its origin is placed on the axis of the wheel and its plane $x_1$-$y_1$ contains the motion of the traction link. It should be noted that reference frame $\Sigma_1$ will not rotate with the wheel due to a change in the variable $q_r$. On the other hand, the reference frame $\Sigma_{l_i}$ is attached to the wheel and oriented in such a way that the motion of the rod is contained in the plane $x_{l_i}$-$y_{l_i}$, and axis $z_{l_i}$ is parallel to axis $z_1$ of the frame $\Sigma_1$, but in the opposite direction. The geometrical parameters of the mechanism are: $L_1 = \|\mathbf{a}_i\|$ is the length of the connecting rod, $L_2 = \|\mathbf{b}_i\|$ is the distance from the joint $R_2$ to the joint $S$, $L_3 = \|\mathbf{c}_i\|$ is the distance from the joint $R_2$ to the joint $R_3$, $R_{c1} = \|\mathbf{r}_{1i}\|$ is the distance from the wheel axis to the joint $R_3$, $R_{c2} = \|\mathbf{r}_{2i}\|$ is the distance from the wheel axis to the position of joint $R_1$, and $l_p$ is the distance from the plane $x_1$-$y_1$ to the reference point from which the value of variable $q_p$ is measured. The angles $\rho_{1i} = q_r + \gamma_i$ and $\sigma_i = q_r + \gamma_i + \delta$ indicate the orientation of the corresponding vectors and are measured from the $x_1$ axis of the $\Sigma_1$ frame as shown in in Fig. 2. $\delta$ is the angle between vectors $\mathbf{r}_{1i}$ and $\mathbf{r}_{2i}$. Angle $\gamma_i$ is a parameter that defines the orientation of the vector $\mathbf{r}_{1i}$ for each leg. We define a vector $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_{N_p}\end{bmatrix}^T$ to indicate the orientation of each leg.

For the RSRR wheel, the joint variables are defined by vector $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}q_r\,, q_p\end{bmatrix}^T$, where $q_r$ is the joint variable associated with the rotational motor and $q_p$ is associated with the linear actuator. The operational coordinates are defined by vector $\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix}t_{xi}\,, t_{yi}\end{bmatrix}^T$, where $t_{xi}$ and $t_{yi}$ are the coordinates of the end of the traction link with respect to a reference frame located on the chassis of the vehicle, when the traction link moves in an orthogonal plane to the wheel's axis of rotation.

From Fig. 2, it is possible to write the following closed loop equations:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{p} = \mathbf{s}_i \tag{1}$$

and

$$\mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i + \mathbf{r}_{1i} = \mathbf{s}_i \tag{2}$$

From (1) it is possible to calculate the angle between the connecting rod and the sliding shaft, $\theta_1$, and the magnitude of vector ${}^{l_i}\mathbf{s}_i$ denoted by $S_p$ as follows:

$$\theta_1 = \arctan\left(\pm\sqrt{\left(\frac{L_1}{l_p - q_p}\right)^2 - 1}\right) \tag{3}$$

and

$$S_p = R_{c2} \pm \sqrt{L_1^2 - (l_p - q_p)^2} \tag{4}$$

From (2) it is possible to compute the angle of the traction link $\theta_2$, and the angle of the proximal link $\theta_3$, both with respect to the axis $x_1$:

$$\theta_2 = 2\arctan\left(\frac{Q_2 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - P_1^2}}{P_1 + Q_1}\right) \tag{5}$$

and

$$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{Q_2 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - P_2^2}}{P_2 + Q_1}\right) \tag{6}$$

where $Q_1 = S_p\cos\sigma_i - R_{c1}\cos\rho_{1i}$, $Q_2 = S_p\text{sen}\sigma_i - R_{c1}\text{sen}\rho_{1i}$, $P_1 = (S_p^2 + R_{c1}^2 - 2S_pR_{c1}\cos(\sigma_i - \rho_{1i}) + L_2^2 - L_3^2)/2L_2$ and $P_2 = (S_p^2 + R_{c1}^2 - 2S_pR_{c1}\cos(\sigma_i - \rho_{1i}) + L_3^2 - L_2^2)/2L_3$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

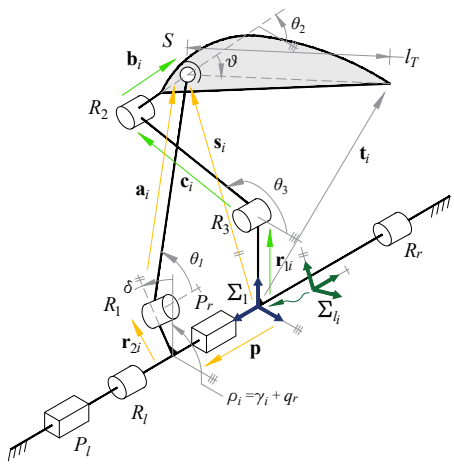



Fig. 2: Kinematic scheme of the $i$-th leg of a RSRR wheel

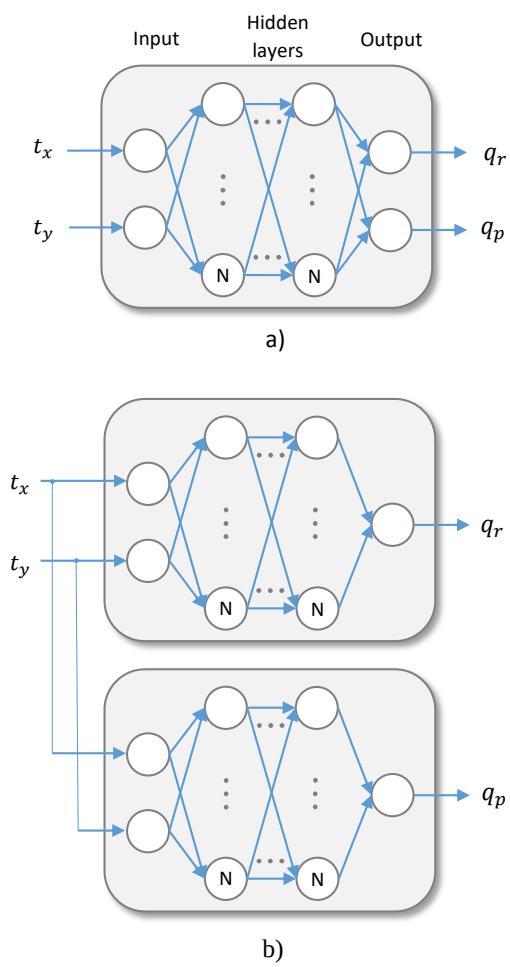



Fig. 3: ANN topologies considered a)SNS and b)DNS

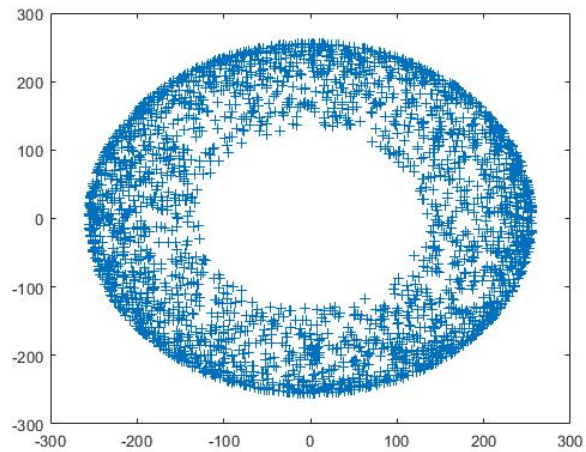



Fig. 4: Data set used to train the neural networks

Finally, the position of the tip of the $i$-th leg is obtained as follows:

$$\mathbf{t}_i = \left[(l_T/L_2)\mathbf{R}_\vartheta + \mathbf{I}_2\right] {}^1\mathbf{b}_i + {}^1\mathbf{c}_i + {}^1\mathbf{r}_{1i} \tag{7}$$

where $l_T$ is the length of the traction link and $\mathbf{I}_2$ is an identity matrix. $\mathbf{R}_\vartheta$ is a rotation matrix around the axis perpendicular to the plane of motion of the traction link for a given value of angle $\vartheta$.

## III. Inverse Kinematics using Neural Networks

The inverse kinematics consist in determining the joint variables given a desired position and orientation of the end-effector. Solving the inverse kinematics problem of the RSRR HeIse wheel is not an easy task because it implies the solution of the system of four non-linear equations presented in (1) and (2). In a previous work [19] the system of equations was reduced to a pair of quadratic equations in two variables and using the Matlab function *fsolve* it was obtained 8 possible solutions.

In this work we explore the use of artificial neural networks for solving the inverse kinematic problem of the presented mechanism. The artificial neural networks approach has been employed for solving the forward and inverse kinematics problems of different robotic mechanism [20] [21].

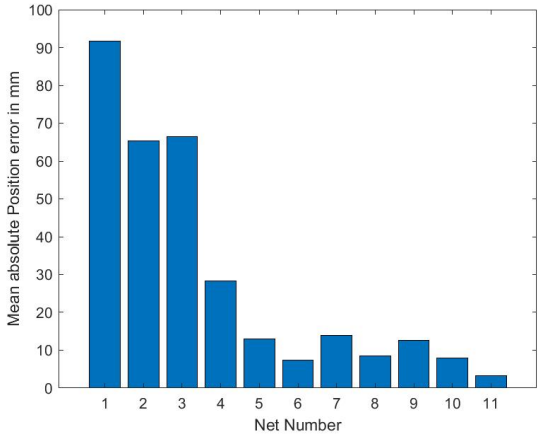
An important design choice is the output configuration of the network, i.e., the number of outputs to be estimated. It seems reasonable that a complex mapping problem will require less hidden layer neurons if its outputs are estimated separately by different ANNs [20]. For the particular case of the RSRR wheel, and the inverse kinematics a pair of ANN topologies can be chosen:

- Single Network Structure (SNS), that handles the entire mapping problem, i.e, from the desired operational variables, the net estimates the independent joint variables
- Double Network Structure (DNS), that provides the estimation of each joint variable, see Fig. 3.

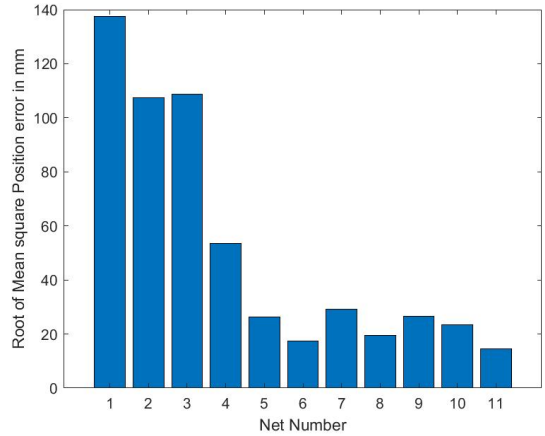
TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

| Number of ANN | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SNS | [10] | [15] | [20] | [10 10] | [10 20] | [15 15] | [20 10] | [20 20] | [10 10 10] | [15 15 15] | [20 20 20] |
| DNS $Q_r$ | [10 10] | [20 20] | [30 30] | [10 10 10] | [20 20 20] | [30 30 30] | - | - | - | - | - |
| DNS $Q_p$ | [10] | [20] | [30] | [10 10] | [20 20] | [30 30] | - | - | - | - | - |

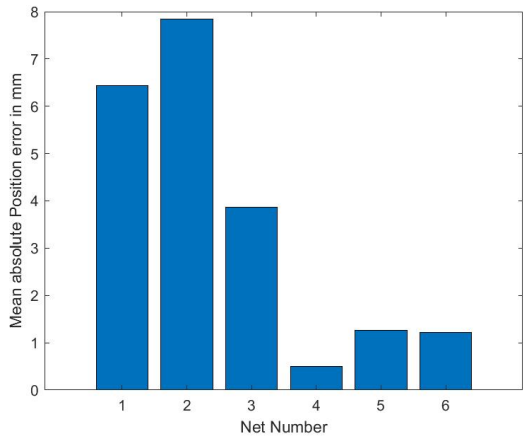
TABLE I: Structure of the studied ANNs



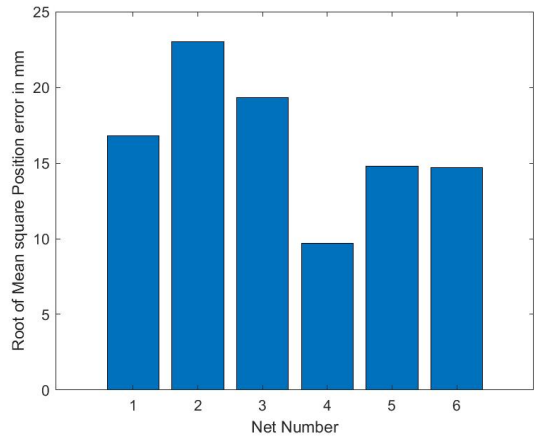

(a) Mean absolute error in SNS




(b) Root mean square error in SNS




(c) Mean absolute error in DNS




(d) Root mean square error in DNS

Fig. 5: Error measuring in group 1

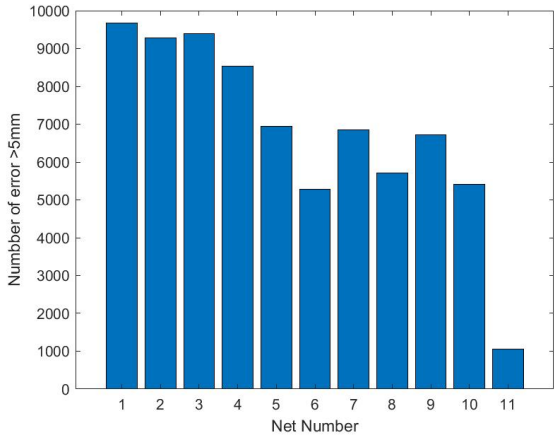
The objective for this approach is to find the most suitable network in terms of accuracy and efficiency. The limits in size for the studied network structures were a maximum of three hidden layers and a maximum of 30 neurons per hidden layer. The activation function used for neurons was tangent-sigmoid. From the solution of the forward kinematics, we use equations (3)-(7) to create a data set for the neural networks training, like the one shown in 4. The Levenberg-Marquardt algorithm was used for training, the error goal was set at 1e-7 and the maximum number of epochs was 10000.

Graphs presented next belong to the group with best performance of each type of ANN, we used a measurement in Mean Absolute Error (MAE) and Root of Mean Square Error (RMSE) to determine whether or not a network was appropriate for using in solving the inverse kinematics of the mechanism.

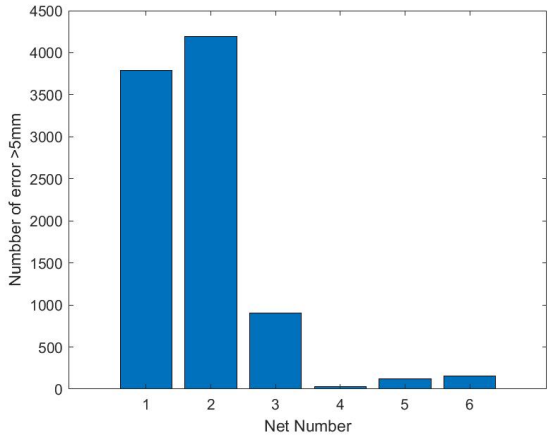
For testing a data set with 10000 points was used, in 5a the mean absolute error of the SNS networks presented, showing that as we increase the number of neurons and hidden layers the overall performance improves significantly, the minimum error is 3.36 mm and was obtained in network number 11, which has three hidden layers and 20 neurons per layer, this was repeated in 5b where the minimum was 14.62 mm.

Performance of DNS networks is shown in 5c and 5d, as seen in the graph the maximum amount of error decreased for the second half of the group, this was expected as this half has one extra hidden layer than the first one, the best was network number 4 which have MAE of 0.50 mm and RMSE of 9.68 mm. The next test for comparison is to filter the points that had an error greater than 5 mm, the results are shown in

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

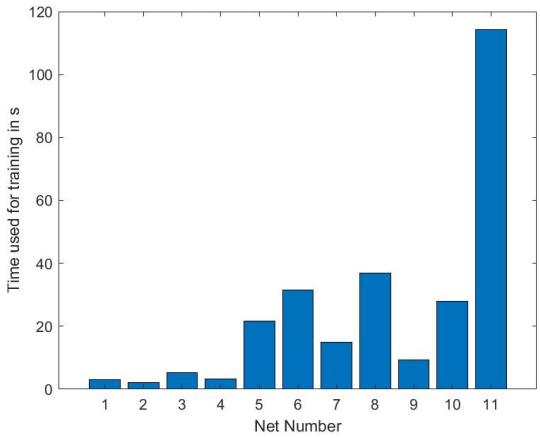



(a) Number of points with error greater than 5 mm in SNS

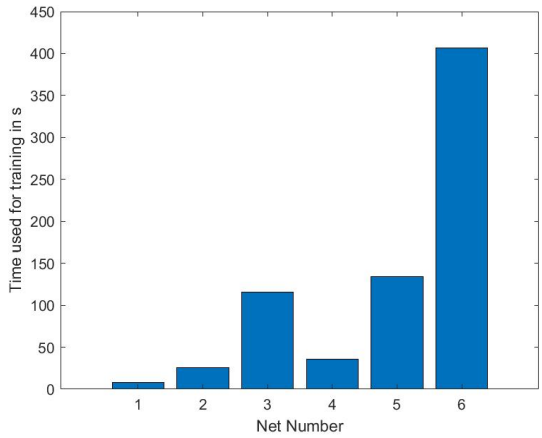



(b) Number of points with error greater than 5 mm in DNS

Fig. 6: Comparison between different networks, best was 26 points in net 4




(a) Time used for training in SNS




(b) Time used for training in DNS

Fig. 7: Comparison between both structures in training time

6a for the first group which had a poor performance with up to 90 percent of the points with an error higher than 5 mm, this shows that all these networks are inadequate for use in following of trajectory, on the other hand, second group was much better as the maximum was under 4200 points, and the minimun only reached 26 points, this can easily be observed in 6b.

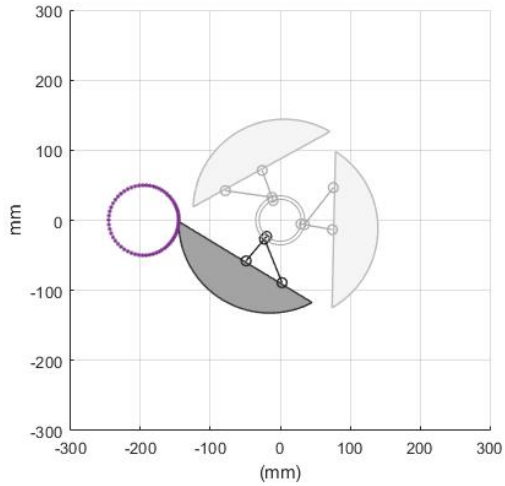
Figures 7a and 7b show the time needed to train each network measured in seconds. As observed in both graphs, as we increase the amount of neurons and layers the time needed for training is increased as well, reaching a maximum of 114 seconds in the first group and over 400 in second group. With this information we can conclude that for this particular case handling the joint variables in two separate networks work better than using them both in one single network, just as the graphs show, the best network in terms of training time is the fourth one in the DNS.

A simulation was performed to visualize the solution of the inverse kinematics provided by an ANN trained in this work. The trajectory defined to follow was a circle. The results of the simulation is shown in 8a and the behavior of the joint variables during the trajectory can be observed in 8b.

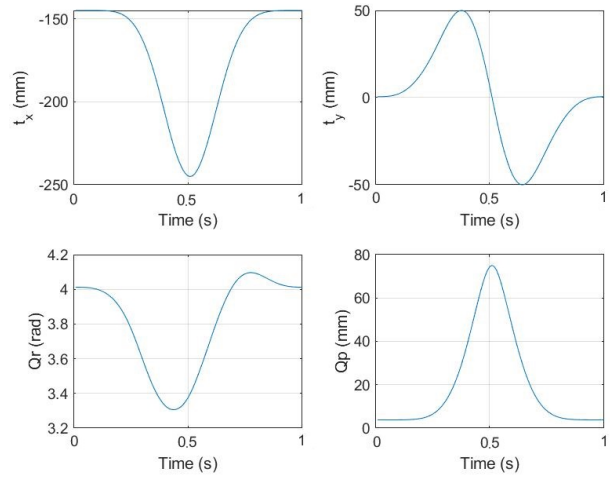
## IV. Conclusion

In this paper the solution of the inverse kinematics of a RSRR HeIse wheel using neural networks was presented. The analytical solution of forward kinematics was used to generate the data set for the neural networks training. 17 different networks were tested considering two topologies: first a Single Network Structure, that handles the entire mapping problem, i.e, from the desired operational variables, the networks estimates both joint variables; on the other hand, it was considered a Double Network Structure, that provides the estimation of each joint variable using two separate neural networks. The performance of the networks were measured in terms of accuracy, using the MAE, RMSE and the number of points

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Wheel at the end of the simulation




(b) Change in coordinates and joint variables

Fig. 8: Results obtained with simulation of inverse kinematics

with absolute errors greater than a threshold value, in this case 5mm. Additionally, the training time of the different networks was presented. Finally, the results of a simulation using the obtained model based in ANNs were presented showing that this approach can be used to follow a given trajectory for the described mechanism.

## References

[1] N. Boysen, S. Schwerdfeger, and F. Weidinger, "Scheduling last-mile deliveries with truck-based autonomous robots," *European Journal of Operational Research*, vol. 271, no. 3, pp. 1085 – 1099, 2018.

[2] D. Lu, E. Dong, C. Liu, M. Xu, and J. Yang, "Design and development of a leg-wheel hybrid robot hytro-i," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2013, pp. 6031–6036.

[3] G. Qiao, G. Song, Y. Zhang, J. Zhang, and Z. Li, "A wheel-legged robot with active waist joint: Design, analysis, and experimental result," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 83, pp. 485–502, 2016.

[4] F. Cordes, A. Dettmann, and F. Kirchner, "Locomotion modes for a hybrid wheeled-leg planetary rover," in *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, 2011, pp. 2586–2592.

[5] R. Siegwart, P. Lamon, T. Estier, L. Lauria, and R. Piguet, "Innovative design for wheeled locomotion in rough terrain," *Robotics and Autonomous Systems.ISSN 0921-8890*, vol. 40, pp. 151–162, 2002.

[6] M. Eich, F. Grimminger, and F. Kirchner, "A versatile stair-climbing robot for search and rescue applications," in *2008 IEEE International Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics*, Oct 2008, pp. 35–40.

[7] ——, "A versatile stair-climbing robot for search and rescue applications," in *2008 IEEE International Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics*, Oct 2008, pp. 35–40.

[8] I. T. Burt and N. P. Papanikolopoulos, "Adjustable diameter wheel assembly, and methods and vehicles using same," US 6860346, 2005.

[9] K. Nagatani, M. Kuze, and K. Yoshida, "Development of transformable mobile robot with mechanism of variable wheel diameter," *J. Robot. Mechatron.*, vol. 19, pp. 252–253, 2007.

[10] R. Rafique, "Reconfigurable mechanism for mobile robotic platform," in *Proceedings of the National Conference on Machines and Mechanisms (iNaCoMM2013), IIT Roorkee, India*, 2013, pp. 714–721.

[11] J. Zhang, P. Zhang, L. Zhang, Y. Hu, and L. Zheng, "Folding combined obstacle detouring wheel," *CN 102350917 A*, 2011.

[12] T. Sun, X. Xiang, W. Su, H. Wu, and Y. Song, "A transformable wheel-legged mobile robot: Design, analysis and experiment," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 98, pp. 30 – 41, 2017.

[13] Y. Lin, H. Lin, and P. Lin, "Slip-model-based dynamic gait generation in a leg-wheel transformable robot with force control," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 804–810, April 2017.

[14] S. S. Yun, J. Y. Lee, G. P. Jung, and K. J. Cho, "Development of a transformable wheel actuated by soft pneumatic actuators," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, pp. 36–44, 2017.

[15] Y. Hu, "Automotive cat-claw-shaped telescopic antiskid wheel," CN 202716669 U, 2013.

[16] K. Tadakuma, R. Tadakuma, A. Maruyama, E. Rohmer, K. Nagatani, K. Yoshida, A. Ming, M. Shimojo, M. Higashimori, and M. Kaneko, "Mechanical design of the wheel-leg hybrid mobile robot to realize a large wheel diameter," in *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Oct 2010, pp. 3358–3365.

[17] P. Lin and S. Shen, "Mobile platform," US 8307923 B2, 2012.

[18] H. Moreno, I. Carrera, J. P. García, and J.Baca, "Heise wheels: a family of mechanisms for implementing variable geometry hybrid wheels," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 15, no. 4, 2018.

[19] H. A. Moreno, I. G. Carrera, M. Saucedo, and M. A. Garcia-Murillo, "Kinematic analysis of the r subfamily of the heise wheels," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 234, no. 15, pp. 3004–3018, 2020. [Online]. Available: https://doi.org/10.1177/0954406220912005

[20] A. Zubizarreta, M. Larrea, E. Irigoyen, I. Cabanes, and E. Portillo, "Real time direct kinematic problem computation of the 3prs robot using neural networks," *Neurocomputing*, vol. 271, pp. 104 – 114, 2018. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231217312225

[21] A.-V. Duka, "Neural network based inverse kinematics solution for trajectory tracking of a robotic arm," *Procedia Technology*, vol. 12, pp. 20 – 27, 2014, the 7th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2013, 10-11 October 2013, Petru Maior University of Tirgu Mures, Romania. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212017313006361

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Controlador de regulación de posición con saturación en la entrada para robots móviles tipo uniciclo

Luis Montoya-Villegas[1], Ricardo Pérez-Alcocer[2] y Javier Moreno-Valenzuela[1]

***Resumen*— La tarea de regulación de posición en robots móviles es un tema de interés actual. Por otra parte, el número de controladores que toman en cuenta las limitaciones de los actuadores en el diseño ha crecido entre la comunidad de control, debido a que este es un fenómeno presente en casi cualquier sistema. Por tanto, en este artículo se presenta el desarrollo de un nuevo controlador para regulación de posición sujeto a restricciones de entrada que parte de la modificación de uno de los controladores más clásicos que existen en la literatura. El controlador es validado teórica y experimentalmente. Los resultados muestran que el controlador propuesto presenta un buen desempeño a pesar de las restricciones de velocidad existentes en el robot.**

***Palabras clave*— Regulación de posición, experimentos en tiempo real, entrada saturada, robot móvil.**

## I. Introducción

Los robots móviles se encuentran cada vez más presentes en la vida cotidiana desempeñando múltiples trabajos ya sea en la industria, en los servicios, en la agricultura, en la exploración, etc. Por tanto, ha surgido mucho interés en diseñar leyes de control que permitan llevar al robot de un punto a otro. Algunos trabajos en la literatura que proponen soluciones para lograr estabilización o regulación de posición en robots móviles tipo uniciclo son por ejemplo en [1], donde los autores desarrollaron un controlador por retroalimentacion basado en visión para estabilizar al robot en una posición deseada. En el trabajo reportado en [2] se propuso una estrategia de control en tiempo finito para la estabilización de la postura de un robot. Los resultados dados en [3] muestran dos controladores robustos cinemáticos para regulación de la pose en presencia de perturbaciones en la entrada de control. En [4], se trató el problema de estabilización, lidiando con incertidumbres como dinámica no modelada, parámetros desconocidos y perturbaciones externas. Jin y Gans [5] presentaron un algoritmo de control de múltiples robots para realizar una formación libre de colisiones y alcanzar el consenso, lo anterior lo logran trasformando el problema a uno de regulación de pose. Mediante técnicas de backstepping y control conmutado, una ley de control de retroalimentación de estados fue propuesta en [6] para lograr una estabilización global. Ibrahim *et al.* [7] diseñaron un controlador discontinuo para estabilización en un punto. En [8], un controlador por retroalimentación de salida fue diseñado para regular la posición y orientación a un punto deseado. Los autores de [9] propusieron dos estrategias de control cinemático para la estabilización de postura. Finalmente, los resultados en [10] muestran un método de control predictivo con modelo robusto para el problema de estabilización.

Por otro lado, los actuadores de estos robots móviles tienen un límite de velocidad el cual no pueden superar por razones físicas. Por lo tanto, es necesario tomar en cuenta estas restricciones en los diseños de los algoritmos de control para asegurar que el robot logre cumplir con la tarea que se desee mediante acciones de control específicamente ajustadas para los límites de velocidad que dicho robot posee. Lo anterior ha traído como consecuencia que diversas investigaciones se centren en diseñar o modificar leyes de control para asegurar que la acción de control que se le exija a los robots móviles tipo uniciclo pueda ser entregada. En [11] se diseñó un controlador para seguimiento predictivo basado en Lyapunov para robots sujetos a restricciones en la entrada de control. Una familia de controladores que contemplan saturación a la entrada fue propuesta en [12]. Serrano *et al.* [13] desarrollaron un controlador de seguimiento no-lineal de trayectorias para esta clase de robots bajo limitaciones de velocidad mediante regulación de parámetros del controlador. Los autores de [14] realizaron una estrategia de control de retroalimentación de estados mediante un enfoque de backstepping recursivo y la técnica input-state-scaling como solución al problema de estabilización global de robots móviles tipo uniciclo con restricciones de velocidad angular. En [15] propusieron un controlador neuronal adaptable de seguimiento de trayectorias para robots con perturbaciones externas y saturación en los actuadores. Por último, los resultados de [16] muestran un buen desempeño del controlador propuesto de estabilización de postura para robots sujetos a saturación de la entrada y restricciones en el tiempo de estabilización, lo cual logran mediante algoritmos iterativos.

Las contribuciones del presente documento son:

- El diseño de un nuevo controlador de regulación de posición con saturación en la entrada.
- La obtención de las cotas generales del nuevo controlador

[1]Instituto Politécnico Nacional–CITEDI, Ave. Instituto Politécnico Nacional 1310, Nueva Tijuana, Tijuana B.C. 22435, México lmontoya@citedi.mx, moreno@citedi.mx

[2]CONACyT-Instituto Politécnico Nacional–CITEDI, Ave. Instituto Politécnico Nacional 1310, Nueva Tijuana, Tijuana B.C. 22435, México rrperez@citedi.mx

Trabajo apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT-Fondo Sectorial de Investigación para la Educación con el proyecto A1-S-24762, y por la Secretaría de Investigación y Posgrado-Instituto Politécnico Nacional, México. Proyecto Apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

- La validación teórica y experimental realizada.

Este documento se encuentra organizado de la siguiente manera. La sección II introduce los preliminares. En la sección III se presenta el modelo cinemático para robots móviles tipo uniciclo. El objetivo de control para regulación de posición se establece en la sección IV. En la sección V se obtiene el sistema en lazo abierto. El diseño y análisis del controlador propuesto es desarrollado en la sección VI. Los resultados obtenidos son dados en la sección VII. Finalmente, en la sección VIII se encuentran las conclusiones sobre el presente trabajo.

## II. Preliminares

Con el objetivo de desarrollar el controlador propuesto y validarlo teóricamente, los siguientes lemas deben ser introducidos.

Lema 2.1 [18]: Si $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ está acotada para $t \in [0, \infty)$, entonces $f(t)$ es uniformemente continua para todo $t \in [0, \infty)$.

Lema 2.2 [19]: Si una función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $t \in [0, \infty)$ y si la integral $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, existe y es finita, entonces: $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Lema 2.3 [20]: Dada una función diferenciable $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cual tiene un límite finito cuando $t \to \infty$ y si $f(t)$ tiene derivada en el tiempo definida como $\dot{f}(t)$ que puede ser reescrita como la suma de dos funciones, denotadas por $g_1(t)$ y $g_2(t)$ como: $\dot{f}(t) = g_1(t) + g_2(t)$, donde $g_1(t)$ es una función uniformemente continua y $\lim_{t\to\infty} g_2(t) = 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} g_1(t) = 0$.

## III. Modelo cinemático

El robot móvil tipo uniciclo en este trabajo es considerado como un punto en medio del eje virtual de sus ruedas, el cual coincide con su centro de masa (punto de interés en la figura 1).

El modelo cinematico es dado en [17] como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}, \tag{1}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ representan la posición del punto de interés del robot móvil, $\theta(t)$ representa la orientación, $V(t)$ y $W(t)$ son las entradas de control de velocidad lineal y angular, respectivamente.

## IV. Objetivo de control

El problema de regulación consiste en hacer coincidir la pose del robot móvil con una posición y orientación de referencia constante. El error de regulación de posición y orientación es definido como

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}, \tag{2}$$

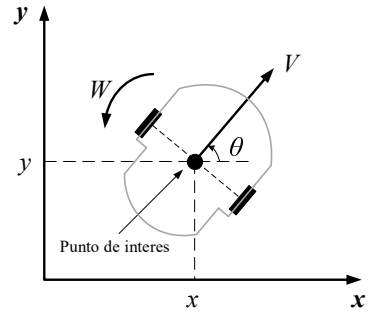



Figura 1. Robot móvil tipo uniciclo referido al punto $(x, y)$ del punto de interés.

donde $x_r$, $y_r$ y $\theta_r$ representan la posición constante en el plano Cartesiano y la orientación de referencia es dada por

$$\theta_r = \text{atan2}(\tilde{\text{y}}, \tilde{\text{x}}). \tag{3}$$

El objetivo de control, radica en diseñar las entradas de control $V(t)$ y $W(t)$ de modo que se cumpla el límite

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

mientras se garantiza que en todo momento el acotamiento de las entradas de control este dado por

$$-V_{max} \leq V(t) \leq V_{max}, -W_{max} \leq W(t) \leq W_{max}, \forall\, t \geq 0. \tag{5}$$

## V. Error del sistema en lazo abierto

Para obtener la representación del error en lazo abierto se hace uso de una transformación global invertible reportada en [17], representando el error con respecto al marco de referencia del robot móvil. Bajo esta representación, el error de pose está dado por

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Obteniendo la derivada temporal de (6), sustituyendo el modelo (1) y considerando que $\dot{x}_r = \dot{y}_r = \dot{\theta}_r = 0$, la ecuación dinámica en términos de la nueva variable de estados $[e_1\ e_2\ e_3]^T$ está dada como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V + We_2 \\ -We_1 \\ -W \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Al ser invertible la matriz de la ecuación (6), se puede establecer que si se logra que

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

entonces, también se alcanza el objetivo de control (4).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## VI. Nuevo controlador

A continuación se presenta la ley de control diseñada para el modelo transformado que se muestra en la ecuación (7), con el objetivo de llevar la pose del robot a los valores de posición y orientación de referencia constantes.

El controlador propuesto está inspirado en el trabajo reportado en [17] el cual presenta la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e_1 \\ k_2 e_3 - e_2^2 \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ son ganancias positivas.

Con el objetivo de limitar la acción de control, se ha incluido la función $\tanh$ en los errores de seguimiento, obteniéndose así el controlador propuesto definido por:

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \tanh(e_1) \\ k_2 \tanh(e_3) - \tanh(e_2^2)\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Sustituyendo la ley de control en el espacio de estados en términos del error (7) se obtiene la representación del error en lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \tanh(e_1) + W e_2 \\ -W e_1 \\ -k_2 \tanh(e_3) + \tanh(e_2^2)\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Por otra parte, las cotas simétricas superiores de la ley de control (10) están dadas por

$$\begin{aligned} |V(t)| \leq V_{max} &= k_1, \\ |W(t)| \leq W_{max} &= k_2 + 1. \end{aligned} \tag{12}$$

donde se han usado las propiedades $|\tanh(x)|$, $|\mathrm{sen}(x)| \leq 1 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$.

### A. Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad del sistema se parte del supuesto que la ley de control propuesta en la ecuación (10) asegura regulación de posición y orientación asintótica en forma global en el sentido de que el límite (4) se satisface.

Primero, debe notarse que la dinámica de $e_1(t)$ y $e_2(t)$ es independiente del estado $e_3(t)$, ver ecuación (11). Para probar que el límite (4) es válido se propone la función no negativa

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2, \tag{13}$$

donde su derivada temporal es

$$\dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2, \tag{14}$$

y sustituyendo $\dot{e}_1$ y $\dot{e}_2$ de la ecuación (11), se obtiene

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1 \tanh(e_1). \tag{15}$$

Debido a que $e_1 \tanh(e_1) \geq 0 \ \forall \ t \geq 0$, es posible concluir que $\dot{V}_1 \leq 0 \ \forall \ t \geq 0$. De las ecuaciones (13) y (15), resulta evidente que $e_1(t), e_2(t) \in L_\infty$. Así mismo, como $e_2(t) \in L_\infty$ y $e_3(t)$ está sujeto a la perturbación producida por $\tanh(e_2^2)\mathrm{sen}(t)$, y dado que esta perturbación está acotada entonces por argumentos de sistemas lineales, es claro que $e_3(t) \in L_\infty$. Entonces basados en el hecho que $e_1$, $e_2$ y $e_3 \in L_\infty$, se puede probar que $V$, $W$ y $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3 \in L_\infty$ por medio de las ecuaciones (10) y (11), y por tanto es posible invocar al lema 2.1, para concluir que $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ son uniformemente continuas. Una vez que se tiene la derivada de (10) y por los hechos que se han determinado, se puede demostrar que $\dot{V}(t)$, $\dot{W}(t) \in L_\infty$ y por lo tanto $V(t)$, $W(t)$ son uniformemente continuas.

Hasta ahora se ha demostrado que $e_1(t)$, $\dot{e}_1(t) \in L_\infty$, ahora integrando ambos lados de la ecuación (15):

$$-\int_0^\infty \dot{V}_1(t)dt = k_1 \int_0^\infty e_1(t)\tanh(e_1(t))dt, \tag{16}$$

y evaluando del lado izquierdo se obtiene

$$\int_0^\infty e_1(t)\tanh(e_1(t))dt \leq \frac{V_1(0)}{k_1} < \infty, \tag{17}$$

donde se ha usado el hecho que $V_1(0) \geq V_1(\infty) \geq 0$. Ademas, sabiendo que $e_1$ es uniformemente continua y que la integral (17) existe y es finita es posible concluir que

$$\lim_{t\to\infty} e_1(t) = 0 \tag{18}$$

haciendo uso del lema 2.2.

Para continuar con la demostración es necesario calcular la derivada del producto $e_1(t)e_2(t)$, obteniendo

$$\frac{d}{dt}(e_1 e_2) = (e_1\dot{e}_2 - k_1\tanh(e_1)e_2) + [We_2^2]. \tag{19}$$

Dado que el $\lim_{t\to\infty} e_1(t) = 0$, y el término entre corchetes en (19) es uniformemente continuo, se puede invocar al lema 2.3, para concluir que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}(e_1(t)e_2(t)) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} e_2^2(t)W(t) = 0. \tag{20}$$

También resulta claro que de la ecuación (20) se puede concluir que

$$\lim_{t\to\infty} e_2(t)W(t) = 0. \tag{21}$$

Después de utilizar las ecuaciones (10), (11), (18) y (21) es posible concluir que

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\dot{e}_1(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty}\dot{e}_2(t) = 0. \tag{22}$$

Para facilitar el análisis posterior se toma la deriva temporal del producto $e_2(t)W(t)$ y utilizando las ecuaciones (7) y (10) se logra obtener la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e_2 W) &= [e_2\tanh(e_2^2)\cos(t)] - k_2\,\mathrm{sech}^2(e_3)e_2 W \\ &\quad + \dot{e}_2(W + 2e_2^2\,\mathrm{sech}^2(e_2^2)\mathrm{sen}(t)). \end{aligned} \tag{23}$$

Debido a que el término en corchetes de la ecuación (23) es uniformemente continuo y que $\lim_{t\to\infty}\dot{e}_2(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} e_2(t)W = 0$, es posible invocar al lema 2.3, para concluir que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}(e_2(t)W(t)) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} e_2\tanh(e_2^2)\cos(t) = 0. \tag{24}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

A partir del segundo límite en (24), resulta evidente que

$$\lim_{t\to\infty} e_2(t) = 0, \tag{25}$$

y por argumentos de sistemas lineales, entonces

$$\lim_{t\to\infty} e_3(t) = 0. \tag{26}$$

Finalmente al invertir la matriz en la ecuación (6) y después de haber obtenido (18), (25) y (26) es posible concluir estabilidad asintótica en forma global y por tanto el límite (4) se satisface.

## VII. Resultados experimentales

El controlador propuesto fue implementado con la plataforma experimental que se muestra en la figura 2. La plataforma experimental está compuesta por un robot móvil tipo uniciclo modelo Pioneer P3-DX fabricado por Adept MobileRobots®. Este robot posee una computadora con Ubuntu GNU/Linux® 12.04 LTS y mediante ROS™ Indigo Igloo (Robot Operating System) recibe las entradas de control. La acción de control es calculada en Matlab-Simulink® (R2015a) mediante una computadora remota con Windows® 7 y es trasmitida de forma inalámbrica utilizando el toolbox ROS™ del entorno de Matlab®. Por último, la adquisición de la pose del robot se logra mediante la colocación de un arreglo de marcadores reflectantes sobre el robot y un sistema de visión Optitrack™ constituido por 6 cámaras modelo Flex 3.

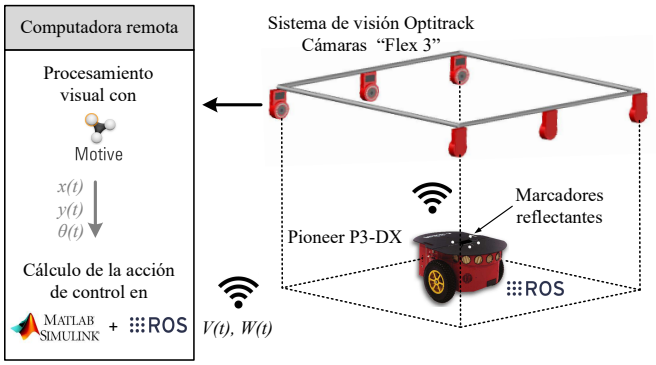



Figura 2. Configuración de la plataforma experimental.

Se realizó un experimento de 20 [s] con un tiempo de muestreo de 0.02 [s], el cual consistió en llevar y estabilizar al robot en el punto

$$x_r = 1.0 \text{ [m]}, \tag{27}$$
$$y_r = 2.0 \text{ [m]}, \tag{28}$$

donde $\theta_r$ es calculada como se indica en (3) y estableciendo que $W = 0$ [rad/s] si $|V| \leq 0.005$ [m/s] para evitar oscilaciones no deseadas en el ángulo cuando $t > 10$ [s].

La configuración inicial del robot fue configurada como

$$x(0) = -1.0 \text{ [m]}, \tag{29}$$
$$y(0) = 1.0 \text{ [m]}, \tag{30}$$
$$\theta(0) = -\pi \text{ [rad]}. \tag{31}$$

Las velocidades máximas seleccionadas para este experimento fueron configuradas en

$$V_{max} = 0.75 \text{ [m/s]}, \tag{32}$$
$$W_{max} = 2.0 \text{ [rad/s]}. \tag{33}$$

Finalmente, las ganancias obtenidas para cumplir las cotas (12) son

$$k_1 = 0.75, \tag{34}$$
$$k_2 = 1.0. \tag{35}$$

Los resultados obtenidos son mostrados en las figuras 3-6. Es posible observar cómo los errores de posición y orientación son prácticamente nulos a los 12 [s] de iniciado el experimento. Sin embargo, para obtener una métrica más confiable, se calcularon los valores RMS de las señales de error de pose en el intervalo de tiempo de 15 $[s] \leq$ tiempo $\leq$ 20 $[s]$, donde las señales no presentan transitorios visibles. Los resultados de estos errores pueden verse en la Tabla I.

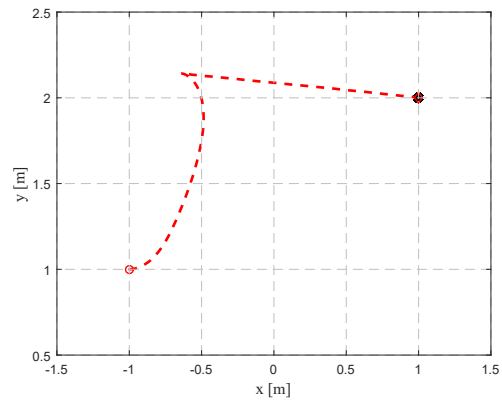



Figura 3. **Resultados experimentales:** Ruta realizada en vista $xy$.

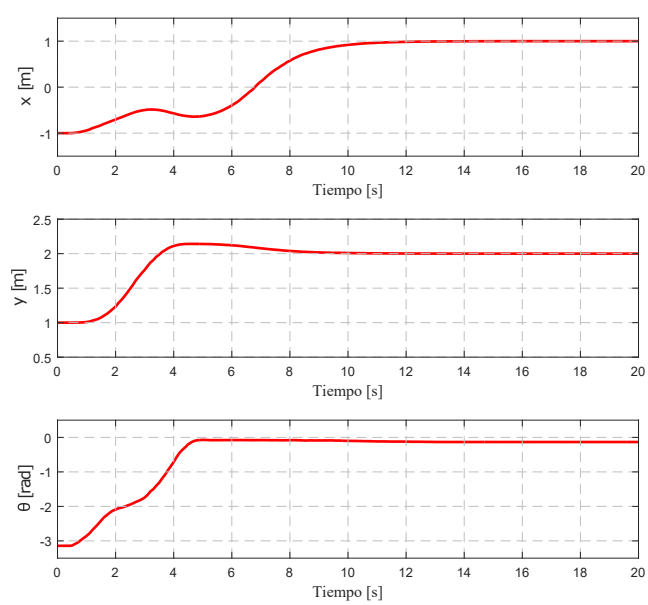



Figura 4. **Resultados experimentales:** Evolución temporal de la pose.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

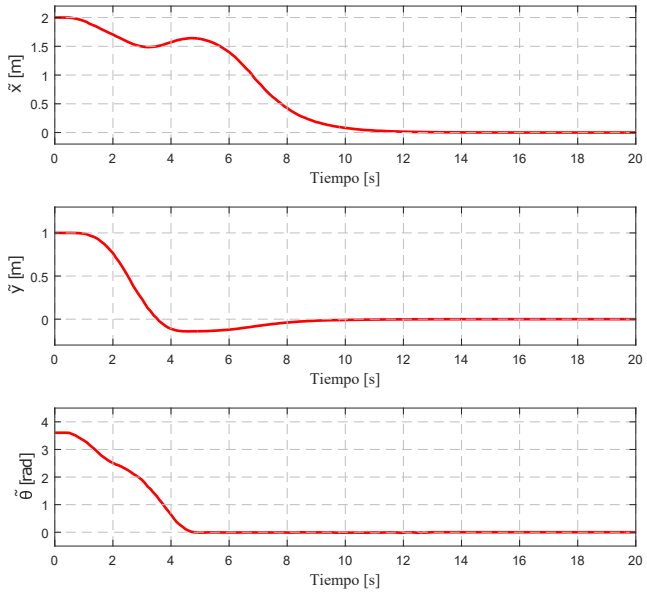



Figura 5. **Resultados experimentales:** Errores de posición y orientación.

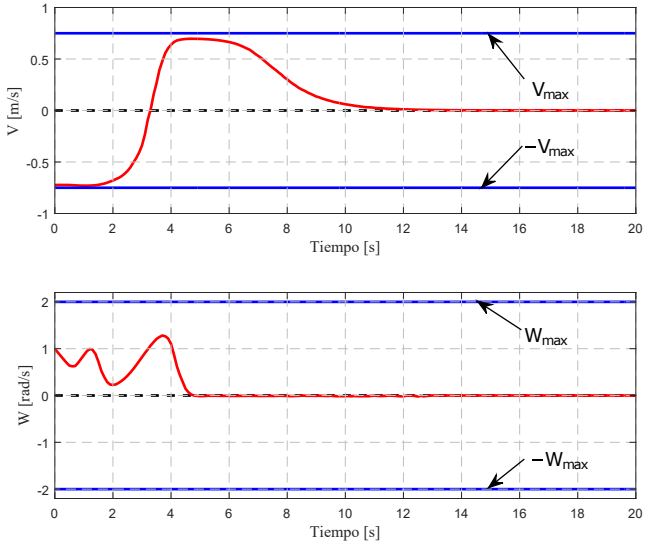



Figura 6. **Resultados experimentales:** Entradas de control dentro de los límites de saturacion.

TABLA I

**RESULTADOS EXPERIMENTALES:** ERRORES RMS DE POSICIÓN Y ORIENTACIÓN.

| $15$ [s] $\leq t \leq 20$ [s] | | | |
|---|---|---|---|
| **RMS** | $\tilde{x}$ [mm] | $\tilde{y}$ [mm] | $\tilde{\theta}$ [rad] |
| **Controlador propuesto** | 0.5785 | 0.1273 | 0.0 |

## VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un nuevo controlador de regulación de posición tomando en cuenta saturación a la entrada para robots móviles tipo uniciclo. Se obtuvieron las cotas de velocidad máxima del controlador propuesto. Se realizó la validación teórica garantizando estabilidad asintótica de forma global. Se realizó la validación experimental en tiempo real. Los resultados muestran un buen desempeño del controlador manteniendo las acciones de control dentro de los límites de velocidad máxima seleccionados.

## REFERENCIAS

[1] P. Petrov, y V. Georgieva, "Vision-based position regulation of differential-drive mobile robots". En memorias del *2018 20th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies (SIELA)*, Bourgas, Bulgaria, junio, 2018, pág. 1-4.

[2] M. Thomas, B. Bandyopadhyay, L. Vachhani, "Posture stabilization of unicycle mobile robot using finite time control techniques". *IFAC-PapersOnLine*, 2016; 49(1): 379-384.

[3] H. M. Becerra, J. A. Colunga, y J. G. Romero, "Robust trajectory tracking controllers for pose-regulation of wheeled mobile robots". En memorias del *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Daejeon, Corea del Sur, octubre, 2016, pág. 1041-1047.

[4] Y. Huang, y J. Su, "Output feedback stabilization of uncertain nonholonomic systems with external disturbances via active disturbance rejection control". *ISA Transactions*, 2020; In Press.

[5] J. Jin, y N. Gans, "Collision-free formation and heading consensus of nonholonomic robots as a pose regulation problem". *Robotics and Autonomous Systems*, 2017; 95: 25-36.

[6] Y. Shang, H. Li, y X. Wen, "Asymptotic stabilization of nonholonomic mobile robots with spatial constraint". *Engineering Letters*, 2018; 26(3): 308-312.

[7] F. Ibrahim, A.A. Abouelsoud, A.M.R. Fath El Bab, y T. Ogata, "Discontinuous stabilizing control of Skid-Steering Mobile Robot (SSMR)". *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2019; 95: 253-266.

[8] J. G. Romero, y E. Nuno, "Global stabilization of nonholonomic mobile robots via a smooth output feedback time-varying controller". En memorias del *2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Edimburgo, Reino Unido, julio 2019, pág. 393-398.

[9] P. Panahandeh, K. Alipour, B. Tarvirdizadeh, y A. Hadi, "A kinematic Lyapunov-based controller to posture stabilization of wheeled mobile robots". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019; 134: 106319.

[10] H. Xiao, Z. Li, C. Yang, L. Zhang, P. Yuan, L. Ding, y T. Wang, "Robust stabilization of a wheeled mobile robot using model predictive control based on neurodynamics optimization". *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017; 64(1): 505-516.

[11] C. Liu, J. Gao, y D. Xu, "Lyapunov-based model predictive control for tracking of nonholonomic mobile robots under input constraints". *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017; 15(5): 2313-2319.

[12] J. Moreno-Valenzuela, L. Montoya-Villegas, R. Pérez-Alcocer, y J. Sandoval, "A family of saturated controllers for UWMRs". *ISA Transactions*, 2020; 100: 495-509.

[13] M. E. Serrano, S. A. Godoy, V. A. Mut, O. A. Ortiz, y G. J. E. Scaglia, "A nonlinear trajectory tracking controller for mobile robots with velocity limitation via parameters regulation". *Robotica*, 2016; 34(11): 2546-2565.

[14] Y. Shang, Y. Yuan, y F. Gao, "Global stabilization of nonholonomic mobile robots with constrained angular velocity". *Engineering Letters*, 2017; 25(3): 296-300.

[15] Y. Wu, y Y. Wang, "Asymptotic tracking control of uncertain nonholonomic wheeled mobile robot with actuator saturation and external disturbances". *Neural Computing and Applications*, 2019; 1-11.

[16] M. Sajadi, K. Rahmanpour, y S. A. Milani, "Posture regulation of input constrained differential drive robots with bounds on stabilization time," En memorias del *2016 4th International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM)*, Tehran, Iran, octubre, 2016, pág. 142-147.

[17] W. Dixon, D. Dawson, E. Zergeroglu, y A.Behal, *Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots*, 1ra ed. (Springer-Verlag, Londres, 2001).

[18] D. M. Dawson, J. Hu, y T. C. Burg, *Nonlinear control of electric machinery*, 1ra ed. (Marcel Dekker, INC., Nueva York, 1998).

[19] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3ra ed. (Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2002).

[20] W. E. Dixon, A. Behal, D. M. Dawson, y S. P. Nagarkatti, *Nonlinear Control of Engineering Systems*, 1ra ed. (Birkhäuser Basel, Nueva York, 2003).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Position control with dynamic obstacle avoidance in omnidirectional mobile robots

Rodrigo Villalvazo-Covián*, Marlen Meza-Sánchez§, Eddie Clemente*,
M. C. Rodríguez-Liñán‡, Luis Monay-Arredondo†, Gustavo Olague †
* Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, rodri.villalvazo3@gmail.com, eclemente@ite.edu.mx
§marlen.meza.sanchez@gmail.com
‡CONACYT/I.T. Ensenada, mcrodriguez@conacyt.mx
† Tecnológico Nacional de México/I.T. Tijuana, luismonay@gmail.com
¶Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, olague@cicese.mx

***Abstract*—The development of a position controller for omnidirectional mobile robots with dynamic obstacle avoidance is addressed in this work. Asymptotic stability is proven under Lyapunov theory, and the analysis of the fulfillment of the dynamic obstacle avoidance task is also outlined. Numerical simulations are presented to illustrate the capabilities of the proposed control law.**

## I. Introduction

Dynamic obstacle avoidance is one of the most challenging tasks in autonomous navigation of mobile robots. It can be defined as a motion constraint for the mobile robot while pursuing the fulfillment of a desired position or trajectory within a coordinated plane. In particular, the development of controllers for mobile robots using the artificial potential fields approach is very attractive due its straightforward design procedure. This approach, initially proposed by [1], [2], relies on the summation of two partial controllers. One part of the controller (called *attractive force*) aims for the mobile robot to be driven to the desired position or trajectory, the second part of the controller (denoted as the *repulsive force*) attempts to form a barrier around the obstacles to provide a safe navigation.

This idea was exploited by [3] with the introduction of a grid of cells. The repulsive forces are implemented in each occupied cell to push the robot away from it. The construction of artificial potential fields using harmonic functions was addressed by [4]. The use of this class of functions permitted to avoid the local minima problem; the integration of the panel method allowed to consider obstacles with arbitrary shape. The application of the sliding modes technique for the design of potential fields in omnidirectional mobile robots was presented in [5]. The establishment of a potential field method, where the target and the obstacles are dynamic, was proposed in [6]. Inspired by the potential fields approach, the use of hierarchically interconnected modules that command the direction of motion in the mobile robot was presented in [7]. Such modules are actions for the robot, where two fuzzy controllers dictate the steering and the velocity of the mobile robot. The regulation of a virtual force related with the distance between the robot and the obstacle is done in [8] using an impedance force control algorithm. In [9], the combination of the artificial potential fields approach with Local Minimal Avoidance (LMA) was presented.

The idea of the proposed controller in this paper is also inspired by the well-known artificial potential fields approach, but more specifically it is based on the work of [10]. They have introduced the paradigm of analytic behaviors to represent the velocity fields of attraction and repulsion within a work-space. A traditional Proportional controller has been used as the attractive force towards the desired position; and, the Genetic Programming paradigm was implemented in the search of partial controllers that avoid collision with a static obstacle.

The contribution of this work is the proposal of a new partial controller that allows for the construction of repulsive velocity fields around a circular moving obstacle, while maintaining the global asymptotic stability of the mobile robot, such that it converges to the desired position. The analysis of the closed-loop dynamics of the controlled mobile robot, and the properties of the proposed repulsive function, allow to prove the simultaneous fulfillment of the obstacle avoidance task. The proposed repulsive function exploits the properties of the natural logarithm, which being the inverse of the exponential function, exhibits unbounded growth as its argument goes to zero. This is used to provide a relationship among the distances from the mobile robot to the obstacle and to the desired position.

This document is organized as follows. The problem statement is described in Section II. In Section III, the synthesis of the proposed controller and the analysis of the fulfillment of the outlined control objectives, are presented. Simulation results of the autonomous navigation of the omnidirectional mobile robot while avoiding collision with an obstacle in motion are shown in Section IV. Finally, the conclusions and future work are discussed in Section V.

## II. Problem statement

The kinematic model of an omnidirectional mobile robot, which relates its linear position and velocity with respect to a coordinated space, is given as

$$\dot{\xi} = u, \tag{1}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

where $\dot{\xi} = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T$ corresponds to the linear velocities vector, and $u = [u_x \quad u_y]^T$ is the vector of control inputs with respect to $X$ and $Y$ axes, respectively.

The layout of the addressed problem is depicted in Fig. 1. For the underlying system (1), the aim is twofold. The first objective is the development of a control law for autonomous navigation such that the omnidirectional mobile robot reaches a desired goal position in the predefined workspace; i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \xi_d \tag{2}$$

where $\xi_d = [x_d \;\; y_d]^T$ is a desired constant position with respect to the $X$ and $Y$ axes. The second objective is collision avoidance with a solid circular moving obstacle of radius $r$; this is,

$$||\xi - o|| > r, \tag{3}$$

where $||\xi - o||$ is the distance from the mobile robot to the center of the obstacle positioned at the coordinates $o = [x_o \; y_o]^T$.

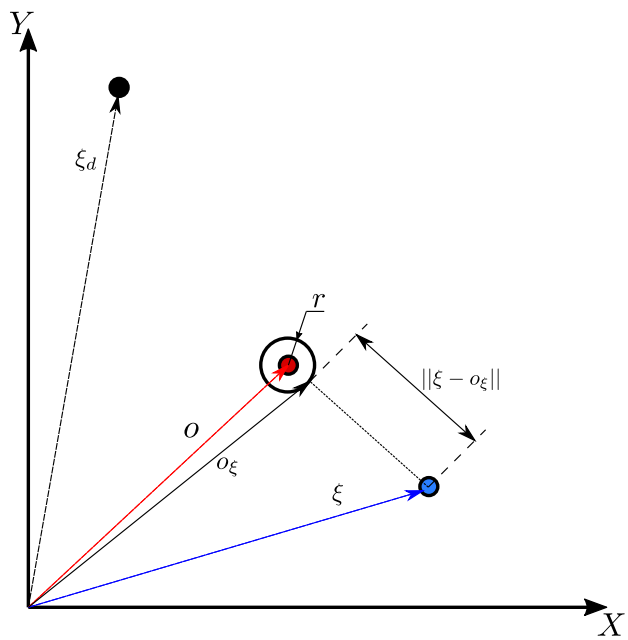



Fig. 1: Motion problem setup for the autonomous navigation with obstacle avoidance of an omnidirectional mobile robot.

## III. Control synthesis

Let $\tilde{\xi} = [\tilde{x}_1 \; \tilde{x}_2]^T = [x_d - x \quad y_d - y]^T$ be the mobile robot's vector of position errors from a desired position in coordinates $\xi_d = [x_d \quad y_d]^T$. Consider that the obstacle, with radius $r$, and denoted by coordinates $o = [x_o \, y_o]^T$ is not placed at the robot's target position $\xi_d$, since, under this condition, there would not exist a solution that could simultaneously fulfill the two established control objectives.

Let us introduce a controller for system (1), inspired in [1], [10], given by

$$u = K\tilde{\xi} + \psi(\xi, o_\xi) \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

where $K > 0 \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ is a diagonal positive definite matrix, and

$$\psi(\xi, o_\xi) = \mathrm{Re}\left(\ln\left(||\xi - o_\xi||\right)\right), \tag{5}$$

where $o_\xi = [o_x, \, o_y]^T$ is the distance to the obstacle and $||\xi - o_\xi||$ is the distance from the mobile robot to the outer rim of the obstacle (see Fig. (1)). The first term of the controller (4) aims for the convergence of the mobile robot towards the desired position $\xi_d$ whilst the second term is a structure designed such that it generates a repelling force around the obstacle.

*Theorem 1:* The closed-loop dynamics defined by the kinematics of the omnidirectional mobile robot given in (1), and driven by the proposed controller (4), (5) is globally asymptotically stable.

**Proof.** Applying the classic quadratic Lyapunov candidate function $V(\tilde{\xi}) = \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T\tilde{\xi} > 0$ yields $\dot{V}(\tilde{\xi}) = -\tilde{\xi}^T K \tilde{\xi} < 0$ with $K > 0$ a diagonal positive definite matrix. Hence, the proof of Theorem 1 is concluded. ■

*Theorem 2:* The omnidirectional mobile robot driven by the proposed controller (4), (5) avoids a collision with a solid moving circular obstacle of radius $r$. That is $||\xi - o|| > r$.

**Proof.** As established by Theorem 1, the repelling function (5) does not hamper the global stability of the controller. Hence, this proof is concerned with the analysis of the velocity fields displayed by the mobile robot with respect to the moving obstacle (that is, $\tilde{x}_1 \neq 0$, $\tilde{x}_2 \neq 0$). The completeness of this proof can be summarized in the analysis of the following three conditions.

The first case is the simplest one, it occurs when the repelling function (5) is equal to zero. Then, there is no collision since the mobile robot is at a distance $||\xi - o_\xi||$ equal to 1, and only the attractive function of the controller is engaged.

In the second case we have $||\xi - o_\xi|| > 1$, and thus $\psi(\xi, o_\xi) > 0$. There is no need for collision avoidance analysis since the mobile robot is far from the obstacle and global asymptotic stability holds; hence, it converges to the desired position.

The last case, is when the mobile robot moves near the obstacle, that is $||\xi - o_\xi|| < 1$. For this analysis, we will use the closed-loop dynamics of the mobile robot which is described as

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -k_{11}\tilde{x}_1 - \psi(\xi, o_\xi)\tilde{x}_2 \tag{6}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -k_{22}\tilde{x}_2 + \psi(\xi, o_\xi)\tilde{x}_1 \tag{7}$$

where $\psi(\xi, o_\xi) = \mathrm{Re}\left(\ln\left(||\xi - o_\xi||\right)\right)$, and $k_{11}$, $k_{22}$ are constant gains belonging to the diagonal positive definite matrix $K$.

Notice that the limit of the natural logarithm goes to negative infinity as the argument approaches zero; this is, $\lim \psi(\xi, o_\xi) = -\infty$ as $||\xi - o_\xi|| \to 0$. Hence, the repelling function (5) goes to negative infinity as the the distance to the obstacle goes to zero. Then, there is a threshold value of $\psi(\xi, o_\xi)$ where the repelling function overcomes the attractive partial controller. Three situations must be analyzed.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

- The attractive control law $K\tilde{\xi}$ in (4) is larger than the repelling function $\psi(\xi, o_\xi)$. Here, as the mobile robot approaches the obstacle, the repelling function increases its value, and the velocity fields towards the obstacle diminish.
- The second situation occurs when the threshold between both functions is crossed. Let $-k_{11}\tilde{x}_1 < -\psi(\xi, o_\xi)\tilde{x}_2$ and $-k_{22}\tilde{x}_2 < \psi(\xi, o_\xi)\tilde{x}_1$, with $\psi(\xi, o_\xi) < 0$ for the closed-loop dynamics (6), (7). Rearranging both inequalities, we arrive at

$$-k_{22}\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} < \psi(\xi, o_\xi) < k_{11}\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2}, \tag{8}$$

  corresponding to the condition where the repelling function (5) overcomes the attractive partial controller. The fulfillment of condition (8) generates a velocity field opposite to the obstacle. Thus, collision avoidance is achieved. Let us recall that the desired position is not placed within the obstacle radius since, as explained before, there is no solution that can simultaneously fulfill the two established control objectives, and condition (8) would not be reached.
- The question that still remains is *what happens when the attractive and repelling functions have the same value?* Thus, the evaluation of the dynamics in each axis is performed. First, let $k_{22}\tilde{x}_2 = \ln(||\xi - o_\xi||)\,\tilde{x}_1$, then $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$, and

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -k_{11}\tilde{x}_1 - \frac{1}{k_{22}}\ln^2(||\xi - o_\xi||)\,\tilde{x}_1 \\ &= \gamma_1\tilde{x}_1,\end{aligned}$$

  with $\gamma_1 = -k_{11} - \frac{1}{k_{22}}\ln^2(||\xi - o_\xi||) < 0$. This means that, in this case, $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ only at $\tilde{x}_1 = 0$. The same analysis can be made letting $-k_{11}\tilde{x}_1 = \ln(||\xi - o_\xi||)\,\tilde{x}_2$, then $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$, and $\dot{\tilde{x}}_2 = \gamma_2\tilde{x}_2$ with $\gamma_2 = -k_{22} - \frac{1}{k_{11}}\ln^2(||\xi - o_\xi||) < 0$. Thus, $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$ only at $\tilde{x}_2 = 0$. This proves that motion towards the desired position continues in one of the axis of the velocity field.

With this analysis, the proof of Theorem 2 is concluded. ■

The extension of this proposal into a practical setup is straightforward and the computation load for any embedded system is small. The setup we have presented assumed that the position of the robot and the obstacle are known at all instants of the simulation. Thus, the repulsive function is always present around the obstacle whenever it moves in the work space. Considering a more realistic implementation where the position of the obstacle is not known at all times, only the attractive controller can be applied and frontal sensors can be used to detect the obstacle. Then, the repulsive controller can be added to perform an evasive motion. In this particular scenario, the mobile robot can move freely towards the desired position, and the theoretical analysis presented in this work applies when the obstacle is detected and obstacle avoidance action is executed.

## IV. Simulation results

The proposed position controller given in (4)-(5) is now evaluated through numerical simulations. The selected initial condition for the mobile robot is $\xi(0) = [x(0),\, y(0)]^T = [-1.5,\, -1.5]^T$, and the desired coordinates are set as $\xi_d = [x_d,\, y_d]^T = [1.2,\, 1.4]^T$. The obstacle with a radius $r = 0.2$ describes a circular motion with respect to the time variable; it is set as $o = [o_x,\, o_y]^T = [\cos(2t),\, -\sin(2t)]^T$. The obtained numerical results are summarized in Fig. 2. The top two plots show the trajectories in each axis ($X$ and $Y$, respectively) with their corresponding desired values. The left bottom plot presents the velocities of the mobile robot: the velocity in the $X$-axis vs the velocity in the $Y$-axis. And finally, the errors with respect to each axis are plotted on the right bottom graph. A sequence of the mobile robot's depicted trajectory is shown in Fig. 3. Each plot in the figure shows the simulation at the time instants (a) 0.501, (b) 0.601, (c) 0.701, (d) 1.801, (e) 2.601, (f) 3.301, (g) 3.501, and (h) 3.901 seconds, respectively.

The simulation results show the fulfillment of both stated control problems. First, the mobile robot converges to the desired coordinates $\xi_d$; that is, the control objective defined in (2). Second, collision with the dynamic obstacle is avoided (second control objective given in (3)). The sequential views in the Fig. 3 show how the mobile robot modifies its behavior to avoid collision in plots (a), (b) and (c). As the obstacle moves away, the mobile robot is driven directly towards the desired trajectory. Once again, the obstacle approaches the mobile robot at $t = 2.601$ seconds, as shown in plot e). And again, the mobile robot slightly changes its course to finally converge to the desired position.

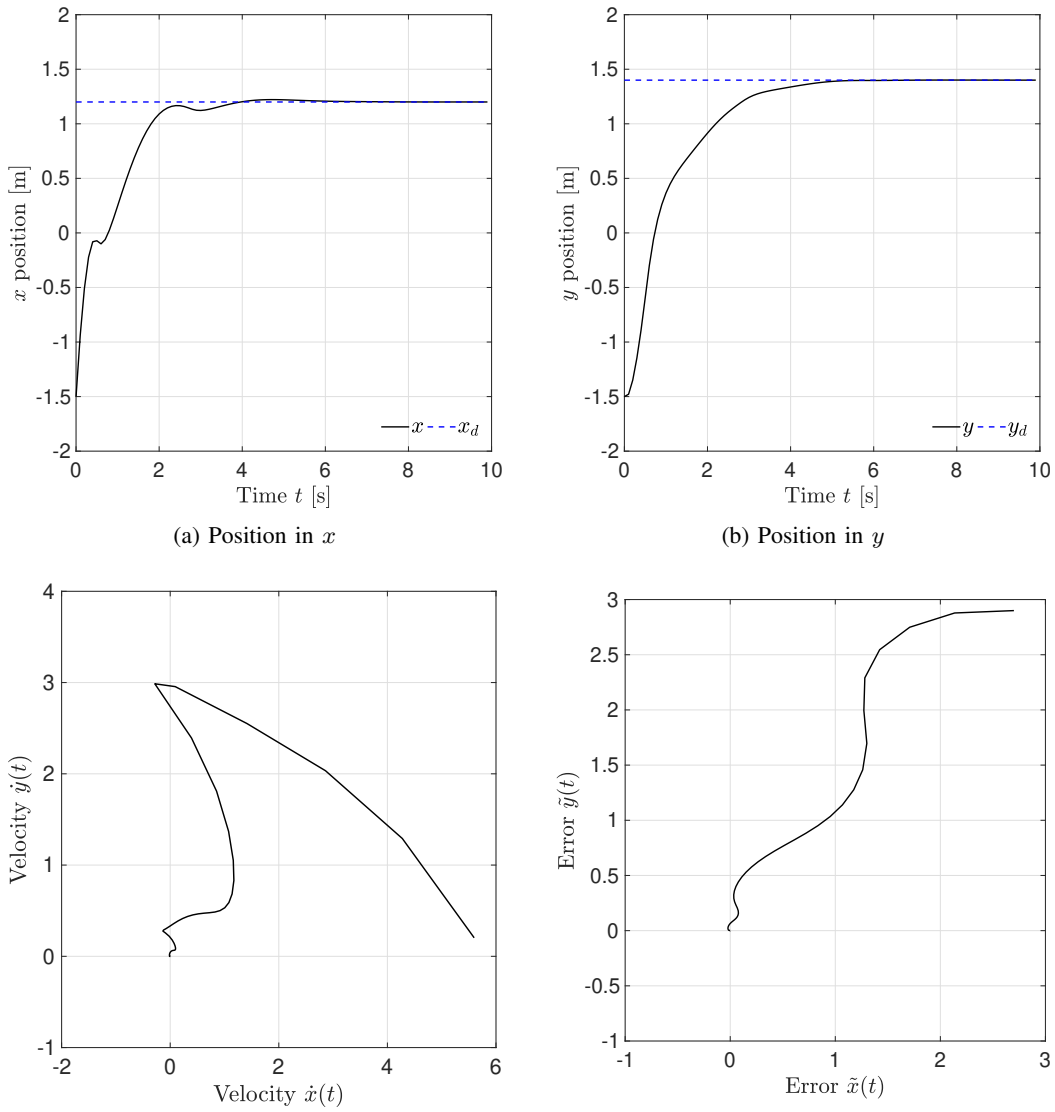
## V. Conclusions and Future Work

The synthesis of a nonlinear controller addressing the position control with dynamic obstacle avoidance in omnidirectional mobile robots was presented in this study. The dynamic obstacle avoidance is preserved under the requirement that it is not placed at the desired position. The violation of this condition leads to a problem with no solution for the simultaneous fulfillment of the two established control objectives.

The selection of a Proportional controller as the one in charge of leading the robot towards the desired position is arbitrary. Some other controllers such as one from the PID family or other suitable structures can be used. However, further analysis of the threshold values between the attractive and the repulsive controllers would be needed accordingly. The proposed nonlinear function takes advantage from the properties of the natural logarithm to provide a repulsive function around the obstacle while maintaining convergence to the desired position. It uses the distance of the mobile robot to the rim of a moving obstacle to build repulsive velocity fields to avoid collisions. Simulation results show the autonomous navigation of the mobile robot while evading an obstacle in motion within the vicinity of its initial conditions and the desired position.

Further work can be done to provide a priority rule over the two control objectives in the case where there is no solution

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Position in $x$

(b) Position in $y$

(c) Velocity

(d) Error

Fig. 2: Simulation results of the position control with a dynamic obstacle for an omnidirectional mobile robot.

to achieve both the convergence to the desired position, and the dynamic collision avoidance simultaneously.

## References

[1] O. Khatib, "Commande Dynamique dans l'Espace Opérationnel des Robots Manipulateurs en Présence d'Obstacles," Ph.D. dissertation, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE), Tolouse, France, 1980.

[2] ——, "Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots," in *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, Mar 1985, pp. 500–505.

[3] J. Borenstein and Y. Koren, "Real-time obstacle avoidance for fast mobile robots," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 19, no. 5, pp. 1179–1187, 1989.

[4] J. Kim and P. K. Khosla, "Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, no. 3, pp. 338–349, 1992.

[5] J. Guldner and V. I. Utkin, "Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 2, pp. 247–254, 1995.

[6] S. Ge and Y. Cui, "Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method," *Autonomous Robots*, vol. 13, pp. 207–222, 2002.

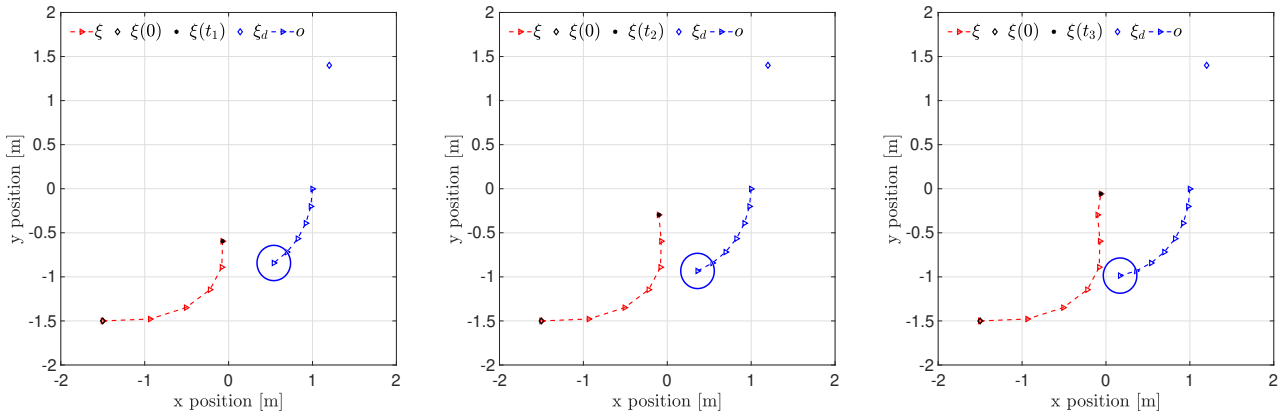
[7] P. G. Zavlangas and S. G. Tzafestas, "Motion control for mobile robot obstacle avoidance and navigation: a fuzzy logic-based approach," *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol. 43, no. 12, pp. 1625–1637, 2003.

[8] Eun Soo Jang, Seul Jung, and T. C. Hsia, "Collision avoidance of a mobile robot for moving obstacles based on impedance force control algorithm," in *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005, pp. 382–387.

[9] R. Osorio-Comparán, I. López-Juárez, A. Reyes-Acosta, M. Pena-Cabrera, M. Bustamante, and G. Lefranc, "Mobile robot navigation using potential fields and lma," in *2016 IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA)*, 2016, pp. 1–7.

[10] E. Clemente, M. Meza-Sánchez, E. Bugarin, and A. Y. Aguilar-Bustos, "Adaptive behaviors in autonomous navigation with collision avoidance and bounded velocity of an omnidirectional mobile robot," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2017.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México



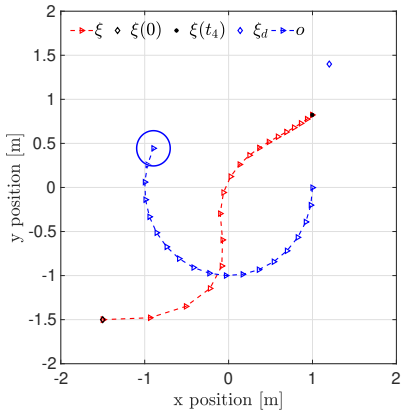

(a) Position in $t_1$



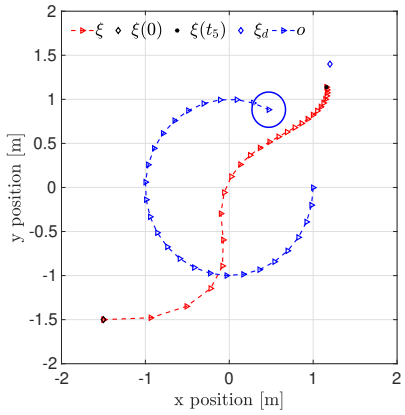

(b) Position in $t_2$



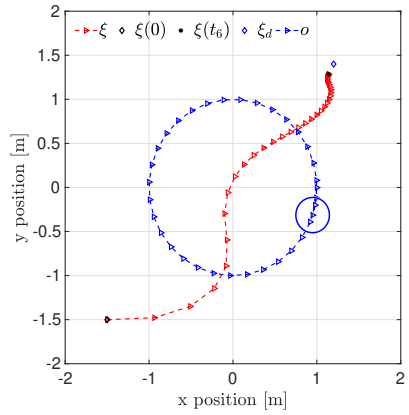

(c) Position in $t_3$



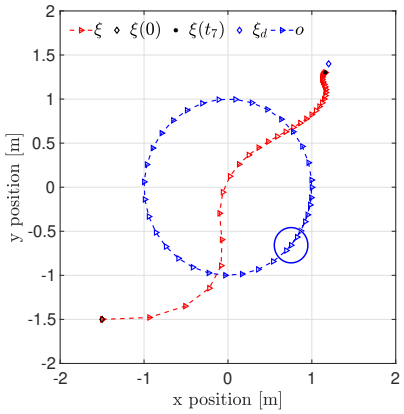

(d) Position in $t_4$



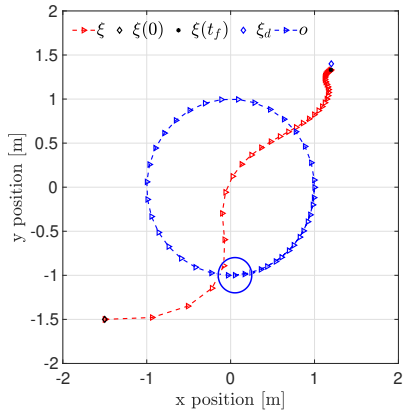

(e) Position in $t_5$




(f) Position in $t_6$




(g) Position in $t_7$




(h) Position in $t_f$

Fig. 3: Sequential visualization of the position control of an omnidirectional mobile robot with a dynamic obstacle avoidance.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Control fraccionario para el seguimiento de trayectorias en un robot omnidireccional de 3 ruedas

Ulises Vázquez[1], Alejandro Dzul[1], Jaime González Sierra[2]

***Abstract*— Este trabajo presenta el diseño de un controlador proporcional-integral de orden fraccionario ($PI^{\lambda}$) utilizado para lograr el seguimiento de trayectorias de un Robot Móvil con Ruedas (RMR) del tipo omnidireccional. Para el diseño del controlador, en lo que corresponde a la planta, se utilizan las ecuaciones del modelo cinemático de postura de un robot omnidireccional de 3 ruedas. Por su parte, el término de integral fraccionaria del controlador se obtiene utilizando el operador de Caputo, que es uno de los más estudiados en la literatura. Para validar el esquema propuesto, se presentan simulaciones numéricas, donde al orden de la acción integral se le asignan distintos valores para observar las variaciones y se realiza una comparación con un controlador *PI* de orden entero.**

## I. INTRODUCCIÓN

Un robot móvil se define como una máquina o dispositivo automático capaz de desplazarse en su entorno, es decir, sin la necesidad de encontrarse fijo en una ubicación física [1]. Dependiendo del tipo de movimiento que realicen los robots, estos pueden clasificarse en distintas categorías: espaciales, aéreos, acuáticos y terrestres. Estos últimos, son también conocidos como vehículos terrestres no tripulados y son capaces de desplazarse sobre terrenos sólidos, acción que realizan usando distintos medios de locomoción, como piernas, orugas, ruedas, etcétera.

Los RMR han cobrado una gran importancia en las últimas décadas, esto se debe principalmente, a la gran cantidad de aplicaciones en las cuales pueden emplearse. Dado lo anterior, la comunidad científica ha realizado y reportado en la literatura diferentes plataformas robóticas, con sus modelados matemáticos, así como distintos tipos de controladores, para estabilización y/o seguimiento de trayectorias. Los controladores de seguimiento de trayectorias son los de mayor importancia, dada la naturaleza misma de las aplicaciones de los RMR. Como se comentó, ante su creciente popularidad, se han realizado numerosas publicaciones que resuelven el problema de seguimiento de trayectorias en distintos tipos de RMR usando diversas técnicas de control, por ejemplo, en [2] se presenta el seguimiento de trayectorias en robots tipo uniciclo usando el método de elipsoide atractivo. En [3] se utiliza un modelado Euler-Lagrange y un controlador *PD* para el seguimiento de trayectorias de un robot omnidireccional. Por otro lado, en [4] se presenta el seguimiento en un robot tipo diferencial, usando el modelo cinemático extendido del mismo; en [5] y [6] se diseñan controladores para robots móviles con restricciones no holónomas usando redes neuronales, mientras que en [7] se propone un control no lineal de seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos en robots con restricciones no holónomas; [8] presenta un control de estabilización y seguimiento de trayectorias para un robot omnidireccional utilizando técnicas de control adaptable.

Por otro lado, el concepto de cálculo fraccionario surgió por primera vez en 1695, a través de la correspondencia entre Gottfried Leibniz y el marqués de L'Hopital; éste hace referencia a la extensión del cálculo que considera un orden no entero para las operaciones de derivada e integral. Hoy día, el número de aplicaciones bajo este enfoque ha aumentado rápidamente, incursionando en áreas como física teórica, ciencia de materiales, nanotecnología, mecánica, electrónica, reología, fractales, etcétera, la literatura al respecto es vasta, *e.g.* [9], [10], [11], [12].

En lo que al área de control respecta, los primeros desarrollos del cálculo fraccionario están registrados a principios de la década de los 60, dónde se usaba un operador integral de orden no entero. Años más tarde, el uso del cálculo fraccionario en el ámbito de control dió como resultado el desarrollo del sistema *CRONE (Control Robusto de Orden No Entero)* en la Universidad de Burdeos [13], y a partir de entonces han surgido trabajos que usan el control fraccionario para la solución de diversos problemas de control, yendo desde los sistemas lineales [14] y [15], a los no lineales [16], por medio de técnicas de control distintas [17].

En cuanto al diseño de controladores en RMR, también se pueden encontrar numerosos trabajos, como por ejemplo en [18] y [19], dónde se usa un $PD^{\mu}$ para el seguimiento de trayectorias en un RMR tipo diferencial aplicando filtros para el cálculo de las derivadas. [20] presenta un $PI^{\lambda}$ para el control de la orientación y velocidad de un RMR de 4 ruedas; por su parte [21], [22] y [23] utilizan controladores $PI^{\lambda}D^{\mu}$ para controlar un RMR, en éstos, sus ganancias se optimizan mediante distintos algoritmos genéticos. En [24] se muestra el diseño de un Backstepping de orden fraccionario usando el operador Grünwald-Letnikov, y en [25] se diseña un controlador por modos deslizantes de orden fraccionario para un sistema de varios agentes, usando teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov de orden fraccionario.

En este artículo se presenta un controlador $PI^{\lambda}$ para el seguimiento de trayectorias en un plano para un robot omnidireccional. A diferencia de varios de los trabajos aquí mencionados, se controla el punto $[x \quad y]^T \in \mathbb{R}^2$ del robot, en lugar de seguir referencias de velocidad o de orientación; además, se utiliza el modelo cinemático de postura del robot para controlar la dinámica de $[x \quad y]^T \in \mathbb{R}^2$ y no la velocidad

[1]*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila, México.* alejandro.dzul@gmail.com
[2]*Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala, Hidalgo, México.* jamesgjr@hotmail.com

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

que se envía a los motores. Tampoco se utilizan filtros, en su lugar se propone el uso del operador de Caputo para evitar lidiar con el problema de condiciones iniciales que no sean interpretables por el sistema, el esquema propuesto puede ser utilizado para cualquier tipo de robot omnidireccional que esté basado en las ecuaciones de modelado aquí mostradas.

El trabajo está dividido en 6 secciones: en la sección II se hace mención de los preliminares matemáticos que consiste en una muy breve descripción de los operadores fraccionarios. La sección III presenta el modelo cinemático de postura del robot, seguido de la sección IV donde se aborda el diseño del controlador $PI^{\lambda}$; posteriormente, la sección V corresponde a los resultados de simulación. Finalmente, la sección VI contiene las conclusiones del trabajo.

## II. PRELIMINARES

El cálculo de orden fraccionario es una generalización del cálculo de orden entero a orden real, dónde el término *fraccionario* algunas veces es llamado como de *orden arbitrario*; sin embargo, nos referiremos a éste como *fraccionario* debido al uso extendido de este concepto [27]. Para dicha generalización se utiliza un operador, el cual se expresa de la siguiente forma:

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} f(t), & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \int_a^t f(\tau) d\tau^{\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \tag{1} $$

donde $a$ y $t$ son los límites de la operación, mientras que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el orden de la misma.

A lo largo de los años, varios matemáticos famosos han estudiado el cálculo fraccionario y propuesto diversas definiciones de operadores, cada uno de estos cuenta con ventajas y desventajas [11], [14], [27] y, a pesar de que se ha tratado de unificar los diversos operadores que han surgido y de esta forma obtener fórmulas bien conocidas para derivadas e integrales fraccionarias (como en el caso del cálculo de orden entero), esto sigue siendo un tema de gran interés para los investigadores. A continuación, se mostrarán dos de los operadores más utilizados, estos son: el operador de Riemann-Liouville $\left({}_a^{RL}D^{\alpha}\right)$ y el operador de Caputo $\left({}_a^{C}D^{\alpha}\right)$.

Considere el operador de Riemann-Liouville, entonces la definición de la integral de orden fraccionario, basada en la $n$-integral de Riemann [16], está dada por

$$ {}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, \tag{2} $$

donde $a \in \mathbb{R}$, con $\alpha < 0$ y $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ como la función Gamma de Euler. De igual manera, se define la derivada fraccionaria para este operador como

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{3} $$

donde $n-1 < \alpha \leq n$.

La definición de Caputo para derivadas fraccionarias puede expresarse como [16]:

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{4} $$

para $n-1 < \alpha < n$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Es importante mencionar que, bajo condiciones iniciales homogéneas, la definición de Riemann-Liouville y la definición de Caputo para derivadas fraccionarias son equivalentes. Por ello, se denota la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como ${}_a^{RL}D_t^{\alpha} f(t)$ y la definición de Caputo como ${}_a^{C}D_t^{\alpha} f(t)$, por lo tanto, la relación entre ambas definiciones está dada por:

$$ {}_a^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = {}_a^{C}D_t^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \tag{5} $$

para $f^{(k)}(a) = 0,$ con $k = 0, 1, ..., n-1$.

Las condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales, utilizadas en la definición de Caputo para obtener derivadas fraccionarias, tienen la misma forma (o interpretación) que en el caso de ecuaciones diferenciales de orden entero. Lo anterior es una ventaja importante dado que en aplicaciones reales se requieren operadores dónde las condiciones iniciales puedan ser interpretadas físicamente, y que contengan $f(a), f'(a), f''(a)$, etcétera.

## III. MODELADO DEL ROBOT OMNIDIRECCIONAL

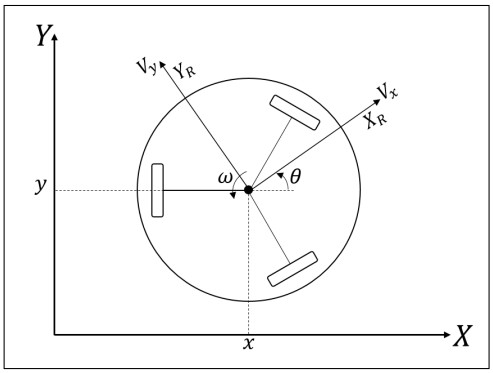



Fig. 1. Robot móvil omnidireccional con 3 ruedas.

Un robot omnidireccional, también es conocido como robot $(3,0)$, lo cual significa que el robot cuenta con tres grados de movilidad y cero grados de maniobrabilidad. Éste es capaz desplazarse en cualquier dirección de forma instantánea, lo cual representa una ventaja significativa sobre el resto de los robots con ruedas.

Considere el esquema del robot omnidireccional mostrado en la Fig. 1, cuyo modelo cinemático de postura está dado por [26]:

$$ \begin{aligned} \dot{x} &= V_x \cos\theta - V_y \operatorname{sen}\theta, \\ \dot{y} &= V_x \operatorname{sen}\theta + V_y \cos\theta, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \tag{6} $$

donde sus entradas de control son $[V_x \quad V_y \quad \omega]^T \in \mathbb{R}^3$. $V_x$ y $V_y$ son la velocidad frontal y lateral, y están alineadas con

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

los ejes $X_R$ y $Y_R$ respectivamente, mientras que $\omega$ representa la velocidad angular del vehículo. El punto $[x \quad y]^T \in \mathbb{R}^2$ denota el centro de masa del robot, mientras que $\theta$ es su ángulo de orientación, el cual se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, a partir del eje $X$ hasta el eje $X_R$, como se observa con la línea punteada en la Fig. 1.

El modelo presentado en (6) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix}, \tag{7}$$

donde $R(\theta)$ representa la matriz de rotación:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

## IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Considere un robot móvil omnidireccional de tres ruedas como el mostrado en la Fig. 1. Para resolver el problema de seguimiento de trayectorias, se propone el uso de un controlador tipo $PI^{\lambda}$ aplicado a las ecuaciones del modelo cinemático de postura (6). Es evidente que el sistema (6) presenta no linealidades debido a las funciones seno y coseno. Dado que las no linealidades son conocidas, se proponen las siguientes variables de control para cancelarlas del modelo usando la técnica de linealización por realimentación de estados [28]:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

En (9) se introducen las variables auxiliares $\bar{V}_x, \bar{V}_y$ y $\bar{\omega}$, y al sustituir (9) en (7), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

De esta manera el modelo cinemático de postura del robot ha quedado igualado con las variables auxiliares propuestas, por lo que ahora es necesario definirlas; para ello, primero se introducen los errores de seguimiento del sistema.

$$\begin{aligned} e_x &= x - x_d, \\ e_y &= y - y_d, \\ e_\theta &= \theta - \theta_d, \end{aligned} \tag{11}$$

donde el subíndice $d$ indica los valores deseados.

Luego, se obtienen las derivadas temporales de las ecuaciones en (11):

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{x}_d, \\ \dot{e}_y &= \dot{y} - \dot{y}_d, \\ \dot{e}_\theta &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_d. \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora, se sustituye (10) en las ecuaciones de (12), donde las dinámicas de los errores quedan definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \bar{V}_x - \dot{x}_d, \\ \dot{e}_y &= \bar{V}_y - \dot{y}_d, \\ \dot{e}_\theta &= \bar{\omega} - \dot{\theta}_d. \end{aligned} \tag{13}$$

Basándose en (13), se definen las variables auxiliares de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{V}_x = \dot{x}_d - k_{px} e_x - k_{ix} D^{-\lambda} e_x, \\ \dot{y} &= \bar{V}_y = \dot{y}_d - k_{py} e_y - k_{iy} D^{-\lambda} e_y, \\ \dot{\theta} &= \bar{\omega} = \dot{\theta}_d - k_{p\theta} e_\theta - k_{i\theta} D^{-\lambda} e_\theta, \end{aligned} \tag{14}$$

donde puede observarse que éstas tienen la estructura de un controlador $PI$ más un término adicional que compensa la velocidad deseada. Los términos $D^{-\lambda} e_x$, $D^{-\lambda} e_y$ y $D^{-\lambda} e_\theta$ corresponden a las integrales fraccionarias de los errores de seguimiento (11). Sustituyendo (14) en (13), la dinámica de los errores queda definida como

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= -k_{px} e_x - k_{ix} D^{-\lambda} e_x, \\ \dot{e}_y &= -k_{py} e_y - k_{iy} D^{-\lambda} e_y, \\ \dot{e}_\theta &= -k_{p\theta} e_\theta - k_{i\theta} D^{-\lambda} e_\theta. \end{aligned} \tag{15}$$

Si las ganancias son elegidas tal que $k_{px}, k_{py}, k_{p\theta}, k_{ix}, k_{iy}, k_{i\theta} > 0$, los errores de posición y el error de orientación convergerán asintóticamente a cero, es decir:

$$\lim_{t \to \infty} (e_x, e_y, e_\theta) = 0.$$

El diagrama mostrado en la Fig. 2, ilustra la estructura del controlador propuesto, donde se puede observar que la acción del operador fraccionario se presenta al obtener la integral de los errores de posición y de orientación, mientras que del bloque del modelo cinemático del robot omnidireccional se obtienen las posiciones $[x \quad y]^T \in \mathbb{R}^2$ además del ángulo de orientación del robot.

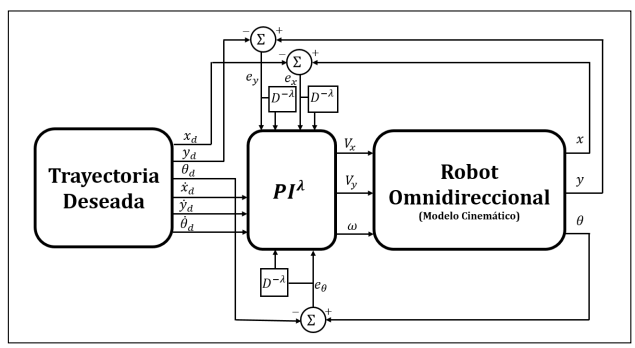



Fig. 2. Diagrama de bloques del controlador $PI^{\lambda}$.

## V. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Con el fin de analizar el funcionamiento del controlador propuesto, se realizó una comparativa del controlador de orden entero con respecto al fraccionario a través de simulaciones numéricas en Matlab, utilizando el entorno Simulink, donde el objetivo consistió en que el robot omnidireccional siga una trayectoria conocida como astroide en un periodo de 20 segundos. Las integrales de orden fraccionario del controlador se obtienen utilizando el bloque *Fractional integrator* que se encuentra en el toolbox *FOMCON (Fractional Order Modeling and Control)*, el cual permite utilizar el operador fraccionario de Caputo, mientras que las ecuaciones

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

de la trayectoria deseada, así como del ángulo de orientación deseado están dadas por

$$\begin{aligned} x_d &= A\cos(wt), \\ y_d &= B\,\mathrm{sen}(3wt), \\ \theta_d &= \mathrm{atan}\left(\frac{-3Aw\,\mathrm{sen}(wt)\,(\cos(wt))^2}{3Aw\cos(wt)\,(\mathrm{sen}(wt))^2}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

donde $t$ es el tiempo, $A = 1[m]$ y $B = 0{,}5[m]$ determinan el tamaño de la trayectoria a seguir, mientras que $w = \frac{2\pi}{T}$ corresponde a la frecuencia en que se realiza la trayectoria y $T = 20[s]$ al periodo con que se realiza la trayectoria. Para las simulaciones se consideran las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4[\mathrm{m}] \\ 0{,}25[\mathrm{m}] \\ 0[\mathrm{rad}] \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Por su parte, las ganancias utilizadas fueron obtenidas de forma heurística, con el objetivo de que el robot converja a la trayectoria deseada tan rápido como sea posible, mientras se busca que los sobre impulsos, de presentarse, tengan una amplitud lo más pequeña posible, para esto, en la Tabla I se observan las ganancias utilizadas en los controladores de orden fraccionario y entero.

También, con el fin de evaluar el parámetro $\lambda$ del control fraccionario, se utilizaron siete valores diferentes (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9).

En primera instancia, en la Fig. 3 se muestra el seguimiento deseado y el obtenido con los controladores. Debe observarse lo difícil que es ver las diferencias entre ellos, dado que éstas corresponden a valores muy pequeños.

TABLE I

GANANCIAS DEL CONTROLADOR.

| Ganancias del controlador | |
|---|---|
| $k_{px} = 12$ | $k_{ix} = 1$ |
| $k_{py} = 8$ | $k_{iy} = 4{,}5$ |
| $k_{p\theta} = 4$ | $k_{i\theta} = 8{,}5$ |

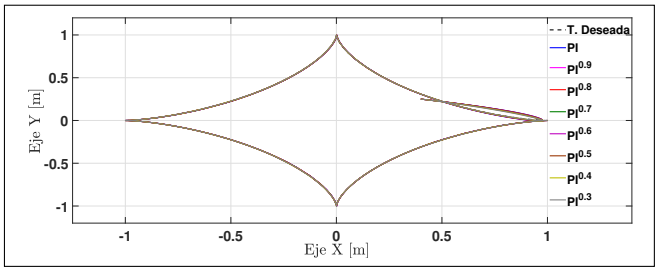



Fig. 3. Seguimiento de la trayectoria en el plano $(X, Y)$.

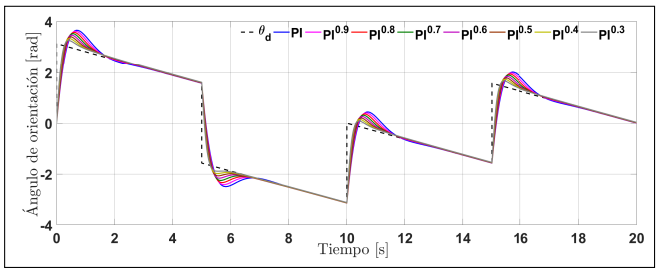



Fig. 4. Seguimiento del ángulo de orientación $\theta$.

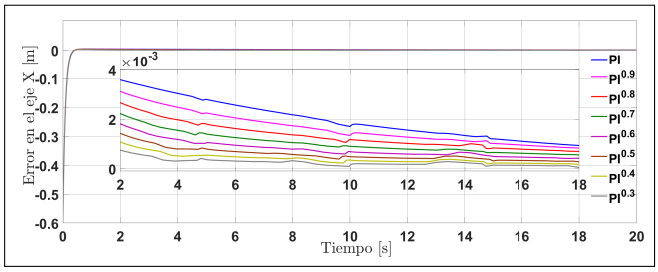



Fig. 5. Error de seguimiento en el eje $X$.

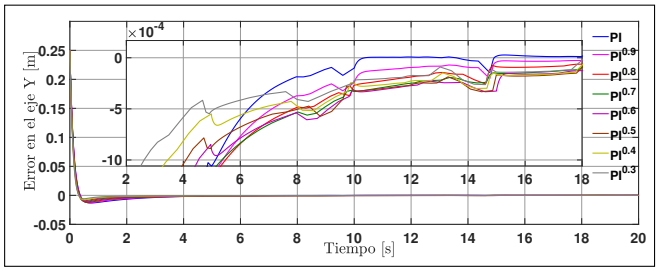



Fig. 6. Error de seguimiento en el eje $Y$.

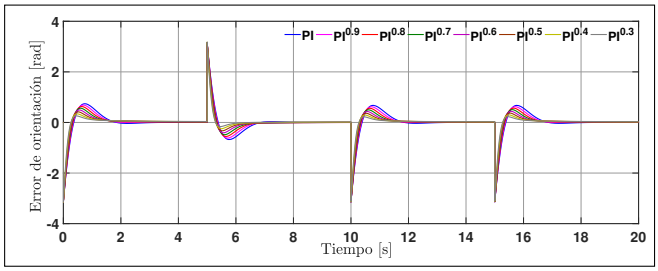



Fig. 7. Error de orientación $(\theta)$.

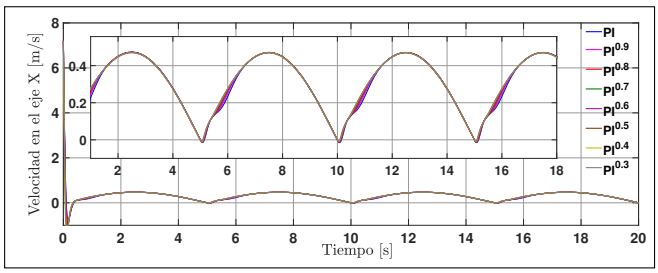



Fig. 8. Velocidad en el eje X $(V_x)$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

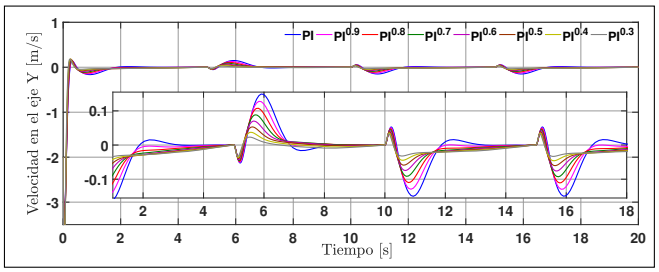



Fig. 9. Velocidad en el eje Y ($V_y$).

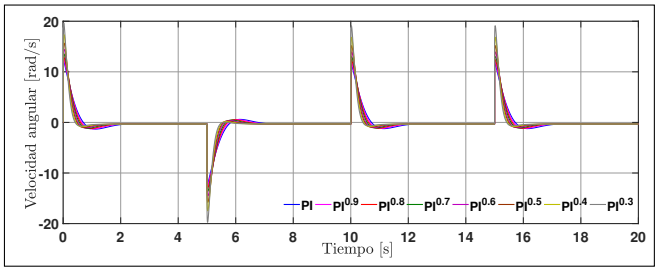



Fig. 10. Velocidad angular ($\omega$).

Por otro lado, la Fig. 4 muestra el comportamiento del ángulo de orientación que debe seguir el robot, donde se aprecia que se converge rápidamente al ángulo deseado, sin embargo éste viene con un ligero sobre impulso, mismo cuya amplitud incrementa conforme el orden de la integral sea más cercano al uno, siendo el controlador de orden entero el que tiene el mayor sobre impulso.

Para el caso de los errores de posición se presentan los relacionados al eje $X$ en la Fig. 5, observándose cómo los controladores convergen a una región cercana a cero en menos de 2 segundos. A partir de ese tiempo todas las señales decrecen y estarán más cerca de cero si tienen una acción integral de menor orden. Por su parte, la Fig. 6 corresponde al error de seguimiento en el eje $Y$ donde es más notorio que se presenta un pequeño sobre impulso para después ver como todos los errores se acercan a cero, sin embargo, en esta ocasión se tiene que el controlador de orden entero tiene el error más pequeño que el resto, seguido de los de orden 0.9 y 0.8.

Pasando al error de orientación que se observa en la Fig. 7, se tiene un comportamiento parecido al de la Fig. 5, donde los errores más pequeños corresponden a los controladores de menor orden. Una particularidad de esta gráfica es que la señal que el astroide genera, para el ángulo de orientación, presenta discontinuidades debido a sus vértices, sin embargo el seguimiento es posible debido a la capacidad de desplazamiento con la que cuenta el robot omnidireccional, la cual le permite corregir su orientación mientras se desplaza en el plano.

La Fig. 8 muestra la velocidad $V_x$, donde al inicio hay un pico muy grande en comparación con el resto de la simulación. Lo anterior fue debido a las condiciones iniciales, dado que al estar fuera de la consigna, el controlador realiza una acción de corrección rápida, pero una vez que esta fase ha pasado, los valores de la velocidad oscilan entre -0.1 y 0.5 $[\mathrm{m/s}]$. Este comportamiento se repite para todos los casos.

La Fig. 9 corresponde a la velocidad $V_y$, la cual presenta una acción más agresiva en el controlador entero, dado que dicho controlador tiene el error más pequeño en el seguimiento del eje $Y$, sin embargo, la señal generada por el controlador entero no es mucho mayor que el resto de los casos, oscilando entre $\pm 0{,}2[\mathrm{m/s}]$ para las mayores amplitudes, y siendo las menores las del controlador de orden 0.3.

Por último, la Fig. 10 permite ver que las velocidades angulares tienen discontinuidades que se generan por los cambios en el ángulo que la trayectoria demanda, por lo cual, cada que se alcanza un vértice se genera una señal de corrección muy fuerte para compensarla. En el caso de los controladores de menor orden, las señales son de mayor amplitud, manteniéndose entre la banda de $\pm 20[\mathrm{rad/s}]$.

## VI. CONCLUSIONES

El trabajo aquí presentado muestra los resultados de seguimiento de trayectorias para un robot omnidireccional usando un controlador *PI* de orden fraccionario. Una de las aportaciones aquí mostradas corresponde al uso del operador de Caputo, dado que en trabajos similares únicamente se cambian las funciones usadas al dominio de la frecuencia, evitando la complejidad de selección de un operador fraccionario, además de que en nuestro caso el operador seleccionado (Caputo), posee la ventaja de tener condiciones iniciales físicamente interpretables. En cuanto al trabajo futuro, se trabajará en la validación experimental del esquema propuesto, además extender el estudio al uso del modelo dinámico del robot omnidireccional.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), con CVU 932095 y al Tecnológico Nacional de México (TecNM), por el apoyo brindado para realizar este estudio.

## REFERENCES

[1] Siegwart, R., Nourbakhsh, I. R., & Scaramuzza, D. (2011). Introduction to autonomous mobile robots. MIT press.
[2] Martínez, E. A., Ríos, H., Mera, M., & González-Sierra, J. (2019, Diciembre). A Robust Tracking Control for Unicycle Mobile Robots: An Attractive Ellipsoid Approach. En 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC) (pp. 5799-5804). IEEE.
[3] Vázquez, J. A., & Velasco-Villa, M. (2008). Path-tracking dynamic model based control of an omnidirectional mobile robot. IFAC Proceedings Volumes, 41(2), 5365-5370.
[4] Contreras, J. C. M., Herrera, D., Toibero, J. M., & Carelli, R. (2017, Septiembre). Controllers design for differential drive mobile robots based on extended kinematic modeling. En 2017 European Conference on Mobile Robots (ECMR) (pp. 1-6). IEEE.
[5] Park, B. S., Yoo, S. J., Park, J. B., & Choi, Y. H. (2008). Adaptive neural sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 17(1), 207-214.
[6] Fierro, R., & Lewis, F. L. (1998). Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. IEEE transactions on neural networks, 9(4), 589-600.
[7] Yang, H., Fan, X., Shi, P., & Hua, C. (2015). Nonlinear control for tracking and obstacle avoidance of a wheeled mobile robot with nonholonomic constraint. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 24(2), 741-746.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

[8] Huang, H. C., & Tsai, C. C. (2008). Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties. IFAC Proceedings Volumes, 41(2), 5383-5388.

[9] Hilfer, R. (Ed.). (2000). Applications of fractional calculus in physics (Vol. 35, No. 12, pp. 87-130). Singapore: World scientific.

[10] Ostalczyk, P. (2015). Discrete fractional calculus: applications in control and image processing (Vol. 4). World scientific.

[11] Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier.

[12] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. Journal of Rheology, 27(3), 201-210.

[13] Oustaloup, B. M., & Lanusse, P. (1995). The crone control of resonant plants: Application to a flexible. European Journal of control, 1(2), 113-121.

[14] Valério, D., & Da Costa, J. S. (2013). An introduction to fractional control (Vol. 91). IET.

[15] Padula, F., & Visioli, A. (2015). Advances in robust fractional control (pp. 1-176). Switzerland: Springer International Publishing.

[16] Petráš, I. (2011). Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media.

[17] Luo, Y., & Chen, Y. (2012). Fractional order motion controls. John Wiley & Sons Limited.

[18] Rojas-Moreno, A., & Perez-Valenzuela, G. (2017, Agosto). Fractional order tracking control of a wheeled mobile robot. En 2017 IEEE XXIV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON) (pp. 1-4). IEEE.

[19] Zhang, L., Liu, L., & Zhang, S. (2020). Design, Implementation, and Validation of Robust Fractional-Order PD Controller for Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking. Complexity, 2020.

[20] Orman, K., Basci, A., & Derdiyok, A. (2016). Speed and direction angle control of four wheel drive skid-steered mobile robot by using fractional order PI controller. Elektronika ir Elektrotechnika, 22(5), 14-19.

[21] Tawfik, M. A., Abdulwahb, E. N., & Swadi, S. M. (2014). Trajectory tracking control for a wheeled mobile robot using fractional order PIaDb controller. Al-Khwarizmi Engineering Journal, 10(3), 39-52.

[22] Al-Mayyahi, A., Wang, W., & Birch, P. (2016). Design of fractional-order controller for trajectory tracking control of a non-holonomic autonomous ground vehicle. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 27(1), 29-42.

[23] Rasheed, L. T., & Al-Araji, A. S. (2017). A Cognitive Nonlinear Fractional Order PID Neural Controller Design for Wheeled Mobile Robot based on Bacterial Foraging Optimization Algorithm. Engineering and Technology Journal, 35(3 Part (A) Engineering), 289-300.

[24] Zhao, Y., Chen, N., & Tai, Y. (2016, May). Trajectory tracking control of wheeled mobile robot based on fractional order backstepping. In 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC) (pp. 6730-6734). IEEE.

[25] Bandyopadhyay, B., & Kamal, S. (2015). Stabilization and control of fractional order systems: a sliding mode approach (Vol. 317). Switzerland: Springer International Publishing.

[26] Campion, G., Bastin, G., & Dandrea-Novel, B. (1996). Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. IEEE transactions on robotics and automation, 12(1), 47-62.

[27] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley.

[28] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). Nonlinear systems (Vol. 3). Upper Saddle River, NJ: Prentice hall.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 8

## *Control 1*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Identifying parameters to improve a low-cost experimental platform through the application of control schemes*

E. A. Rodríguez-Sánchez[1], J. A. Rojas-Estrada[1], J. A. Rojas-Quintero[2],
M. A. Ochoa-Villegas[1] and M. A. Osorio-Abraham[1]

***Abstract*—In order to improve a low-cost experimental platform of a classical nonlinear system, two control procedures were applied to identify enhancement parameters. An optimal control scheme, first independently and then in conjunction with a Proportional Derivative control scheme were applied. Simulation results are compared and experiments are conducted on a so-called fixed-end ball and beam system which was built mainly with off-the-shelf and 3D printed components. Variables are supervised during motion control and control schemes are briefly compared in terms of error and computation speed. Results inform on which characteristics require improvement in order to obtain a minimally expensive and functional experimental platform.**

***Index Terms*—Control, Optimal control, Nonlinear control systems, PD control**

## I. Introduction

A low-cost experimental platform which can be built with essentially off-the-shelf components is always desirable in the laboratory, specially if its structural elements can be 3D printed. Having such a device available, we set out to verify if it could conform a viable experimental platform. In particular, we wish to be able to test specific Optimal Control (OC) schemes. In order to identify enhancement parameters, our prototype was subjected to an OC and a Proportional Derivative (PD) control schemes, as well as their combination. The discrepancy between obtained and expected results will inform on which components should be changed, or which structural elements require modification, the idea being to obtain the lowest possible cost platform.

A control scheme is deemed to be optimal when a certain criterion is maximized or minimized through a cost function. Criteria can be chosen as currency, energy efficiency, force or time considerations. A classical example of an optimal control problem can be found in the brachistochrone [1] where time is minimized to travel a certain distance, by only considering gravity effects. This fundamental and simple example has marked the beginning of many developments in the field of automatic control.

The well-known proportional-integral-derivative (PID) control strategy has been widely applied to industrial automatic processes. At a superficial level, this is mainly due to its implementation simplicity. However, when higher precision and efficiency is required, optimal control can be the right solution. Optimal control can be beneficial for the control of aircrafts [2], or electric motor assisted artificial muscles [3]. Optimal control is frequently applied to the control of nonlinear systems by linearizing them first, such as with automotive active suspension [4]. A linear representation of the system is initially derived, but linear feedback is finally used [4]. Several model-based control techniques are applied to a ball and beam (BBS) system in [5], where PID and optimal control schemes are combined, leading to a hybrid control scheme.

The BBS system is one the most basic nonlinear systems that are commonly used in the laboratory. This kind of system allows for experimentation of varied control schemes. For this work, a low-cost prototype of a so-called fixed-end BBS system was evaluated by applying several control schemes and verifying the discrepancy between expected and obtained results. The constructed prototype is composed of a beam that rotates around a revolution axis where a position sensor is located. An servomotor actuates a crank at the other end through a crank and pulley, which inflicts motion to the beam. A ball navigates the beam length, as a consequence of the beam inclination. The goal is to control the ball position on the beam. A schematic of the system is presented in Figure 1.

The context of this work has been briefly presented in this introduction, situating its motivation. The mathematical model under a Lagrangian formulation, which leads to a matrix representation, will be presented in section II. Section III presents the implementation of the traditional proportional-derivative (PD) control scheme, the implemented optimal control and a hybrid implementation of both. Simulations were conducted with Matlab® Simulink® (section IV) and results are discussed throughout section V. A final discussion concludes with the presented work, and mentions which improvements need to be made on the experimental prototype in order to render it functional as an experimental platform (section VI).

*This work was supported by the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Fondo Sectorial de Investigación para la Educación SEP-CONACYT (grant number A1-S-29824)

[1]J. A. Rojas-Estrada, E. A. Rodríguez-Sánchez, M. A. Ochoa-Villegas and M. A. Osorio-Abraham are with Tecnológico Nacional de México/I.T. Nuevo León, Guadalupe, Nuevo León, México juan.antonio.rojas@itnl.edu.mx

[2]J. A. Rojas-Quintero is with CONACYT/Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, Ensenada, Baja California, México jarojas@conacyt.mx

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

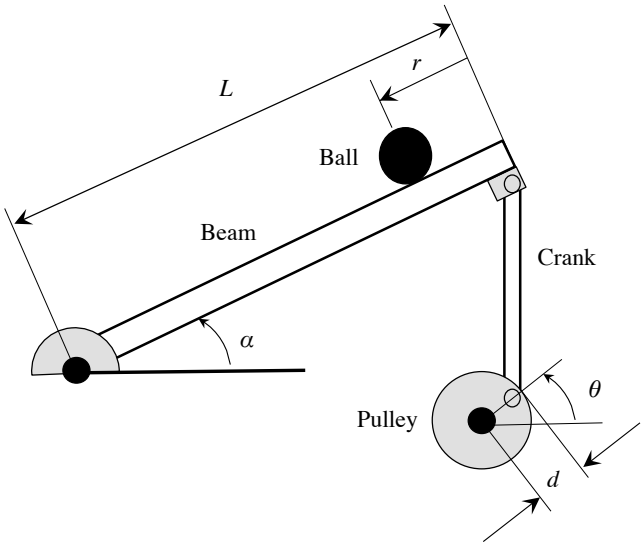



Fig. 1. Ball and Beam system

## II. Mathematical model

### A. Mathematical model of the Ball and Beam System

First, several considerations must be taken into account. The ball is assumed to roll without slipping over the beam. Friction between both elements is also neglected. A photograph of the prototype is presented in Figure 2.

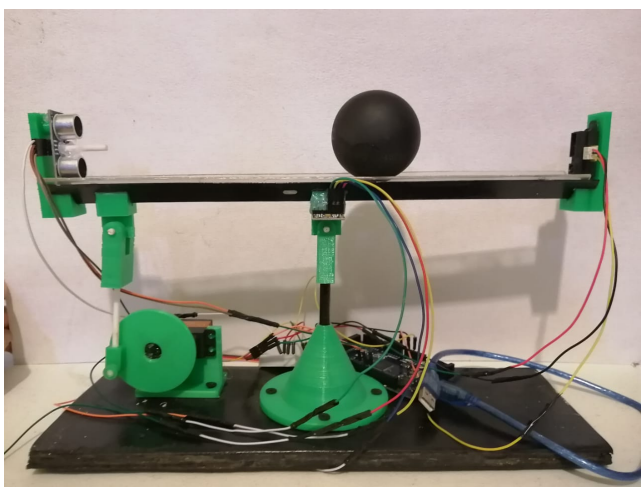


Fig. 2. Ball and Beam prototype

A Lagrangian formulation of the motion equations for the system is derived according to [6]–[8]. The Lagrangian is an energy function describing the system motion:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

where $K$ is the kinetic energy of the ball and $U$ is its potential energy; $\mathbf{q}$ is the state vector. The Euler-Lagrange equations are therefore

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \tau. \tag{1}$$

This model results in two nonlinear second order ordinary differential equations (2) and (3). A state variable representation will be adopted for the Matlab® Simulink® simulations.

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mgsin\alpha - mr\dot{\alpha}^2 = 0 \tag{2}$$

and

$$\left(mr^2 + J + J_b\right)\ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha} + mgrcos\alpha = \tau. \tag{3}$$

Let us consider the state variables as $x_1(t) = r(t); x_2(t) = \dot{r}(t); x_3(t) = \alpha(t); x_4(t) = \dot{\alpha}(t)$. These assumptions are applied to equations (2) and (3) and lead, as in [7], to a state variable representation comparable to equation (4).

### B. Matrix representation of the dynamic model

Equations (2) and (3) can be represented in a matrix format as the motions equations of an $n$ degrees of freedom (DOF) robot.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \tau. \tag{4}$$

From equations (2) and (3), it follows that

$$M = \begin{bmatrix} \left(mr^2 + J + J_b\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{J_b}{R^2} + m\right) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2mr\dot{\alpha} \\ -mr\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$G = \begin{bmatrix} mgr\cos(\alpha) \\ mg\sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

## III. Control schemes

Adapting from (4) a representation with the state vector $\left[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T\right]^T$, the well-known expression

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M^{-1}(\mathbf{q})\left[\tau(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - g(\mathbf{q})\right] \end{bmatrix}$$

where $\tau(t)$ represents the control law that will be applied to the system, is proposed (see [6] and [8]).

### A. PD control

The PD control law can be expressed by

$$\tau = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tag{5}$$

where $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ is the position error and $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ is the velocity error. $K_v$ and $K_p$ are definite positive symmetric matrices chosen for best behavior. A procedure for choosing these matrices can be found in [6]. Other works related to the BBS that make use of PD-control are presented in [12], [13] and [14].

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

### B. Optimal control

We also apply an optimal control technique to our robot. One limitation inherent to the chosen technique is that optimal torques and velocities are calculated on bounded intervals $[0, T]$, where $T$ is the final time. The calculation is done by integrating motions equations of the robot using numerical methods that minimize interpolation errors. Basics of the chosen optimal control can be found in [9] and [10]. Recent work illustrating a robotics application is presented in [11]. The optimal torques selection is done by minimizing a functional integral or functional objective where the integrand is a quadratic (convex) function called the cost function which is invariant.

$$J(u) = \int_0^T \gamma(u(t))dt \tag{6}$$

The integrand $\gamma(u(t))$ is related to the mass tensor, in this case the inertia matrix $M$, so the functional integral thus involves the nature of the system.

$$\chi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}u^i u^j \tag{7}$$

The function $\chi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ can represent a cost function since it involves a quadratic function that depends on the mass tensor and the torque tensor $u$ which in turn depend on the values of $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$. Using the Lagrange equations together with the minimized function, provides a system of second order ordinary nonlinear differential equations that are integrated solving for the vector of torques $u(t)$ that finally becomes $\tau(t)$, which in this case is the vector of optimal torques under the functional integral and function of cost used. A more complete study of this technique is presented in [14].

## IV. Numerical simulation

To obtain numerical results, the Simulink® diagram shown in the figure 3 was constructed, by means of which the two proposed control schemes, PD-control and Optimal control schemes, and a combination between them, were simulated. The parameters of a basic laboratory prototype are those shown in the Table I.

TABLE I
Ball and Beam simulation parameters

| Description | Notation | Value | Unit |
|---|---|---|---|
| Beam inertia | $J$ | $1.3340 \times 10^{-5}$ | kg m$^2$ |
| Sphere inertia | $J_b$ | $1.4045 \times 10^{-5}$ | kg m$^2$ |
| Sphere radius | $R$ | 0.026 | m |
| Sphere mass | $m$ | 0.05 | kg |

As can be seen in Figure 3, the control scheme can be chosen as a PD control or an optimal control or a combination of both. Numerical results of the three schemes will be presented.

### A. PD Control Scheme

Figure 4 shows how the system reaches the position target after a swinging period. $K_p$ and $K_v$ gains were roughly adjusted. The overshoot presented in the position can be corrected by further tuning the value of $K_p$.

The torques generated for the execution of this position of reference are presented in the graph of Figure 5. Both Actual and desired torques coincide, so only two of them can be seen in the graph.

### B. Optimal Control Scheme

For this option, the optimal control application is manipulated (see Figure 3) to generate the optimal torques for a target of position $r(t) = 0.14$ m in a time of $T = 1.8$ s. A calculation procedure is used as explained above (section III.$B$). It is emphasized that the generated torques are the optimal torques for the proposed position objective, in the proposed time.

The graph of Fig. 6 shows the position reached in the terms established for the calculated torques. Note that there is practically no oscillation period such as in the PD control scheme.

The Actual and desired torques are shown in the graph of figure 7. Once again, the actual and desired torques match, so only two curves can be seen.

### C. Optimal control plus PD scheme

By putting the two control schemes in the simulation using switches (see Figure 3), a combination of optimal control plus PD control is obtained. In the simulations carried out, it turned out that the position $r(t)$ is practically the same as that obtained with the PD alone. This is because the torque provided by the optimal part is very small compared to the one provided by the PD scheme. The same is true for actual and desired torques, they are practically the same. However, analyzing the angular position $\alpha(t)$ one can see that there is a change in behavior, while with the PD scheme a small sustained angle remains, in the combined control scheme this variable tends to zero. This can be observed in the graphs of the figures 8 and 9.

## V. Experimental results

A low-cost 3D printed prototype was used to conduct controlled motion experiments (see Figure 2). The prototype mainly consists of the BBS mechanism, a SC-1256TG servo motor with a maximum torque of 20 kg-cm, an infrared sensor GP2Y0A21 for position registration, an Arduino™ Mega 2560, 16MHz card and an AMD Ryzen 5 2500U processor laptop (see Figure 10).

The three control scheme options previously mentioned were implemented in the prototype. Note however that the some dynamic effects that were not accounted for, such as vibrations, negatively impacted position measurement and prevented better results, these vibrations were generated by the movement of the platform when doing the experiments. Infrared sensor sampling during experiments was of 33.33Hz for a trajectory duration of 1.8s. The infrared sensor sampling

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

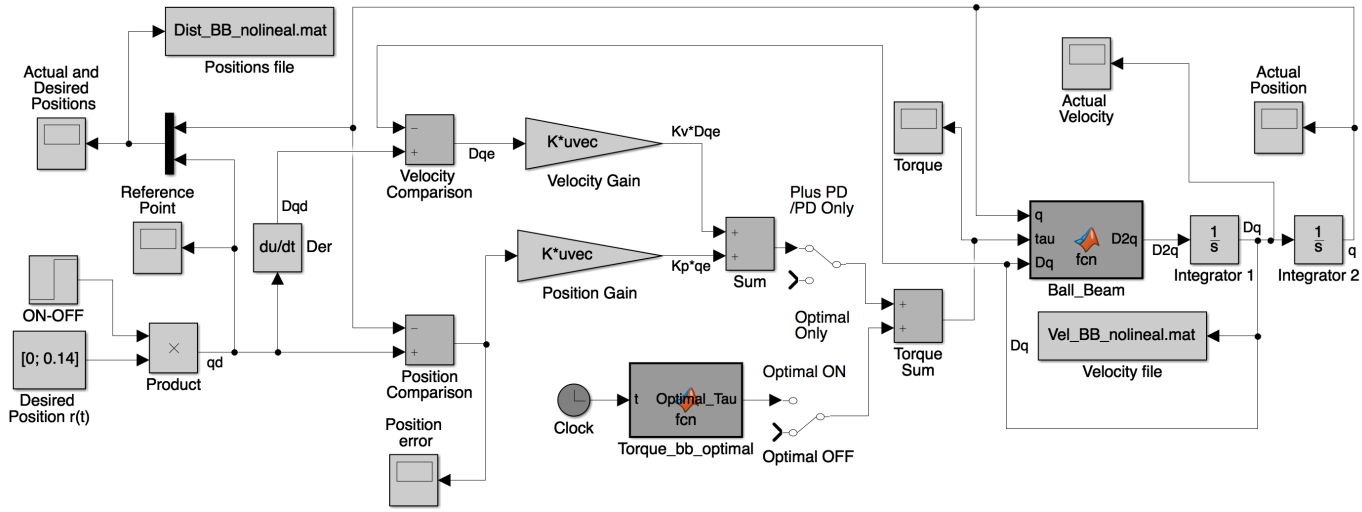



Fig. 3. Dynamic model diagram of the Ball and Beam system with optimal torque applied.

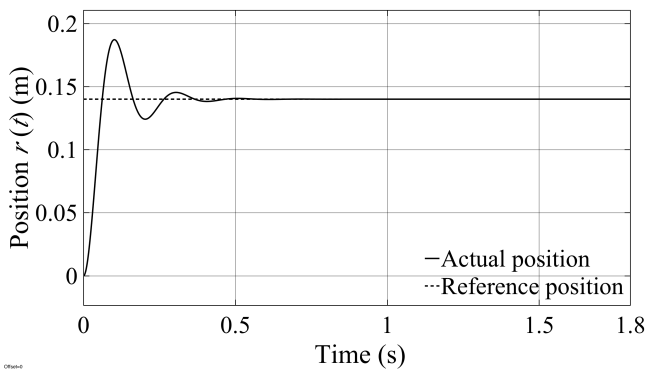



Fig. 4. Actual and desired position $r(t)$ using PD control scheme

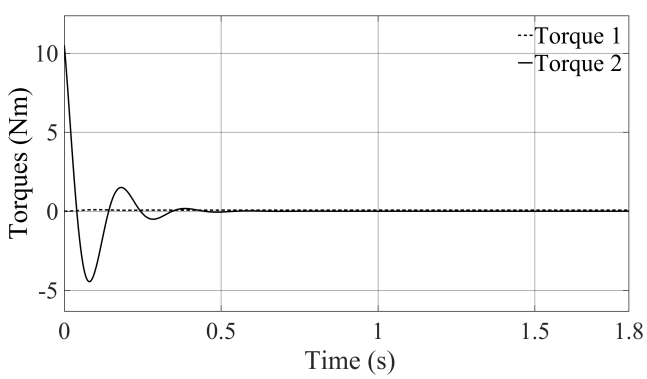



Fig. 5. Actual and desired torques of the BBS under PD scheme control.

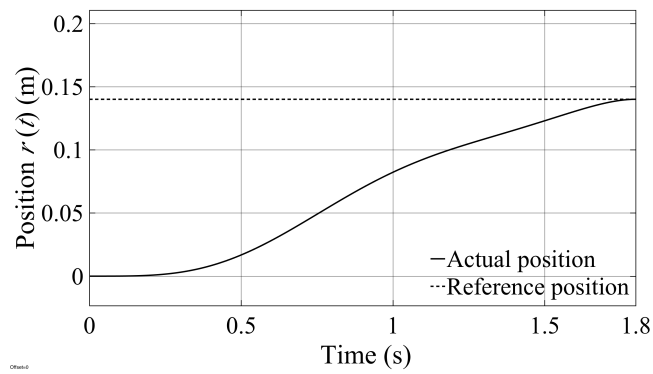



Fig. 6. Actual and desired position $r(t)$ under optimal control scheme.

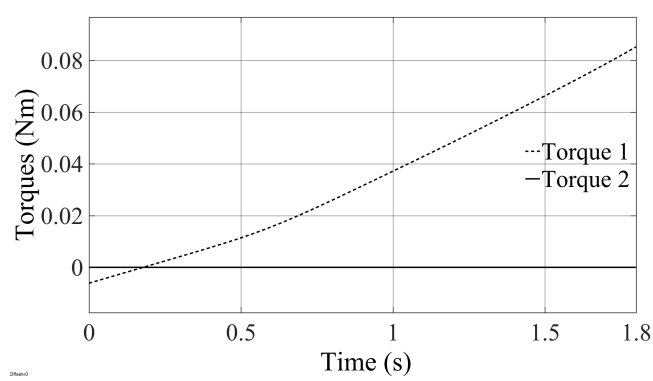



Fig. 7. Actual and desired torques under optimal control scheme.

time had to be limited due to the capabilities of the Arduino™ Mega 2560 electronic board.

In the graph of the Figure 11 the position response $r(t)$ under a PD control scheme is observed (simulation and experimental). There is the presence of noise due to the position sensor.

Figure 12 shows the position response $r(t)$ when using an optimal controller. A comparison is made between the simulation and the experimental result with the reference. In this case, only an optimal control scheme is applied, that is, to attain the position objective the torques are applied to the system without feedback, because they represent the optimal torques. Due to the presence of perturbation and the mechanical limitations, a great difference between the

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

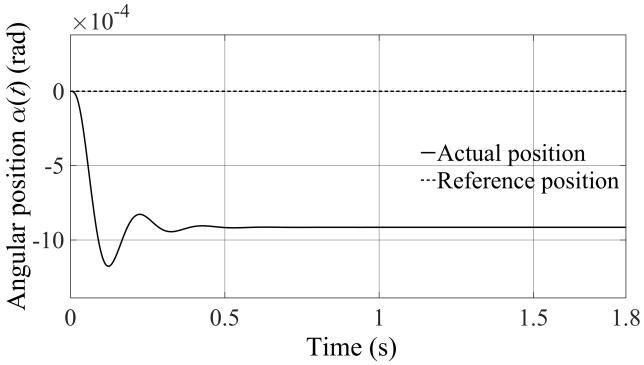



Fig. 8. Actual and desired position $\alpha(t)$ under PD control scheme.

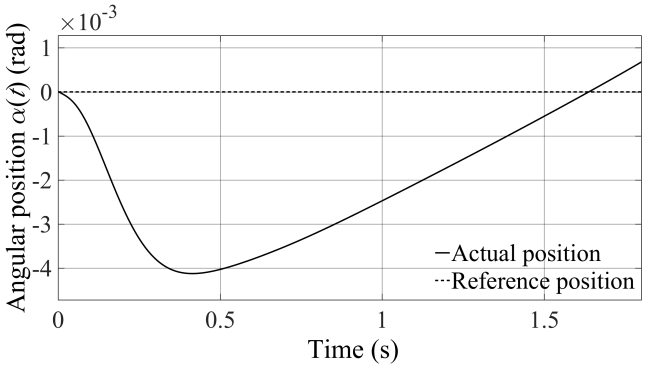



Fig. 9. Actual and desired position $\alpha(t)$ under optimal plus PD control scheme.

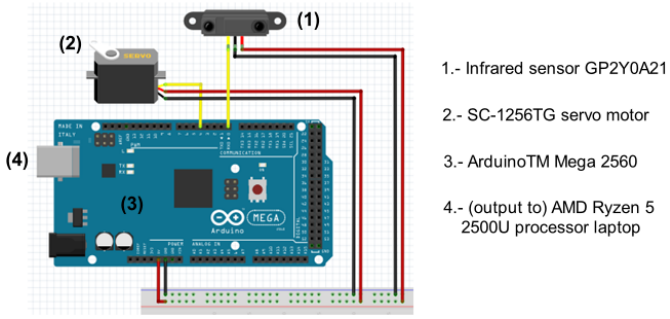



Fig. 10. Ball and Beam circuit diagram

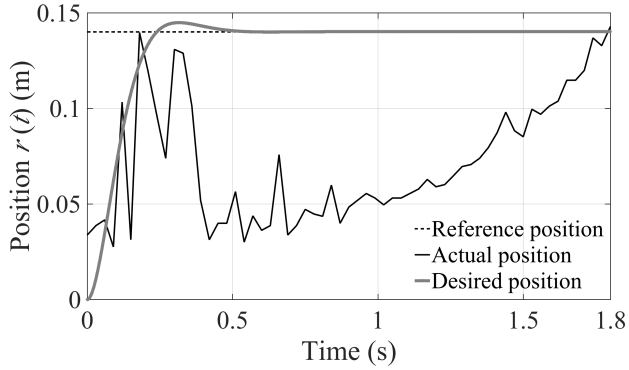



Fig. 11. Actual and desired position $r(t)$ under PD control scheme experimentally.

simulation and experimental results is observed.

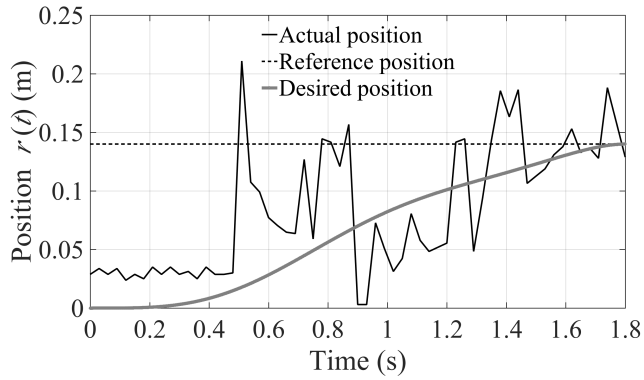



Fig. 12. Actual and desired position $r(t)$ under optimal control scheme experimentally.

Figure 13 shows the position reached using a combination of PD control plus optimal control. In the schemes that contain the optimal control, it should be noted that the error tends to zero almost at the end of the trajectory, (see Figures 12 and 13). On the contrary, in the PD scheme the error has variations due to oscillations in the response, see Figure 11.

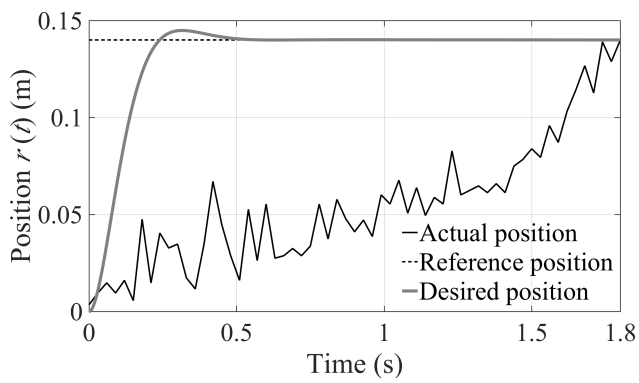



Fig. 13. Actual and desired position $r(t)$ under PD plus optimal control scheme experimentally.

## VI. Conclusions

The contribution of this work consisted in testing a low-cost BBS platform by conducting motion control experiments with varied control schemes. The discrepancy observed between expected and obtained results informed on parameters that require improvement in terms of overall design. Numerical and experimental results were obtained. As can be seen from the comparative results, the torque applied under the optimal control scheme is less intense than that of the other schemes, which produces a smooth approach to the position target. This is to be expected since the torque is the optimum that prevents the system from presenting overdrafts, as in the case of PID in general. Obtained results show that the experimental prototype does lack precision. Vibrations caused the ball to jump at times. We have identified that at least a heavier base is required in order to resist vibrations due to the actuator

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

abrupt motions. Fixing the base is however recommended. We selected the beam to be V-shaped, however, enlarging its width shall facilitate experiments. A more powerful acquisition card is definitely required. To keep costs as low as possible, a Raspberry Pi 3 or an equivalent model is recommended. This should enable more accurate position measurements. The characteristic of the optimal control on the obtained results can be highlighted. In a combined optimal control and PD control scheme, it was observed that the dominant control is PD, although experimentally due to the presence of noise it could not be seen specifically, but in the numerical simulation part it could be seen. In this case the part of PD control uses the reference input and the actual values of position and velocity to make the feedback. This article encourages further research with the optimal control strategy as it can be of great help in terms of saving electrical and mechanical energy, among others, using an appropriate cost function.

The application of the optimal control strategy makes it clear that a processor is needed to calculate the optimal torques in each time interval for the execution of the required paths. The use of scientific tools such as Simulink® from Matlab® and Mathematica® are of great support for the application of this control scheme.

The noise in the responses is observed in the graphs of experimental results. Attempts were made with two sensors, one ultrasonic and one infrared. The experiments were carried out with the infrared sensor due to its lower noise intensity and the velocity of response was better.

A very low-cost BBS system is definitely desirable as a laboratory experimental platform. Such a system should enable rapid experimentation and prototyping of control schemes without risking to compromise expensive material. Our initial prototype has some notable flaws, mainly coming from the data processing card. However, we have identified minimal changes that could be performed in order to obtain a more usable experimental platform. This was done by using motion control experimentation to identify enhancement parameters.

## REFERENCES

[1] Velasco, N., Vinueza, D., Mármol, J., Mendoza, D., and Pérez, F. (2019, October). "Experimental demonstration of the Brachistochrone property of the cycloid". *In Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1324, No. 1, p. 012075). IOP Publishing.

[2] Ahmadi, K., Asadi, D., and Pazooki, F. (2019). "Nonlinear L1 adaptive control of an airplane with structural damage". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* , 233(1), 341-353.

[3] Ishihara, K., and Morimoto, J. (2018). "An optimal control strategy for hybrid actuator systems: Application to an artificial muscle with electric motor assist". *Neural Networks,* 99, 92-100.

[4] Rafikov, M., Balthazar, J. M. and Tusset, A. M., "An optimal Linear Control Design for Nonlinear Systems", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci & Eng.,* Vol XXX, No. 4, pp. 279-284.

[5] Keshmiri, M., Jahromi, A. F., Mohebbi, A., Amoozgar, M. and Wen-Feng, X., "Modeling and Control of Ball and Beam System Using Model Based and Non-Model Based Control Approaches", *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems,*Vol. 5, No. 1, 2012.

[6] Kelly, R., Santibañez, V. and Loria, A. *Control of robot manipulators in joint space,* Springer-Verlag , 2005.

[7] Bolivar-Vincentry, C.G. and Beauchamp-Báez, G., "Modelling the Ball-and-Beam System From Newtonian Mechanic and From Lagrange Methods", *LACCEI'2014* , 2014.

[8] Lare, C., White, W. N. and Hossian, S., "Motion Equations for the Ball and Beam and the Ball and Arc Systems", *Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control* . Vol. 141, 121006. 1-11. 2008.

[9] Ali, A. T., Ahmed, A. M., Almahdi, H. A., Taha, O. A., and Naseraldeen, A. (2017). "Design and implementation of ball and beam system using pid controller". *MAYFEB Journal of Electrical and Computer Engineering* , 1.

[10] Sánchez, L. A. B., Fuentes, O. M., García, J. J. M., Cervantes, C. U. S., and Tamayo, A. J. M. El Sistema Barra-Esfera (Ball and Beam) en un Laboratorio de Robótica. *II Congreso Internacional de Robótica y Computación 2015.*

[11] Nowopolski, K. (2013). Ball-and-beam laboratory system controlled by Simulink model through dedicated microcontrolled-Matlab data exchange protocol. *Computer Applications in Electrical Engineering 2013*, Vol. 11., 2013.

[12] Schättler, H., Ledzewicz, *U. Geometric Optimal Control* . Springer 2012.

[13] Liberzon, D. *Calculus of variations and optimal control theory* , Princeton University Press 2012.

[14] Rojas-Quintero, J. A., Vallée, C., Gazeau, J. P., Seguin, P., and Arsicault, M. , "An alternative to Pontryagin's principle for the optimal control of jointed arm robots", *21 ème Congrès Français de Mécanique*, Bordeaux, 2013.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Oscilaciones no Lineales en un Sistema Pendular Incluyendo Dinámica del Actuador mediante un Doble Controlador Difuso

Lisdan Herrera-Garcia, Luis T. Aguilar, Nohe R. Cazarez-Castro,
Jorge A. Lopez-Renteria, and Selene L. Cardenas-Maciel

***Abstract*— En el presente trabajo se reporta el diseño de un esquema a doble controlador difuso tipo Mamdani para generar oscilaciones no lineales (ciclos límites estables) sin señal de referencia externa, definiendo amplitud y frecuencia deseadas. El controlador difuso permite que un sistema sub-actuado carro-péndulo con adición de la dinámica de los actuadores eléctricos. Como método de diseño es utilizado el enfoque en el dominio de la frecuencia función descriptiva. La estabilidad orbital se verificó mediante el criterio de Loeb. El diseño y la metodología propuesta se validó a través de simulaciones numéricas en el sistema subactuado carro-péndulo.**

## I. Introducción

Las oscilaciones no lineales representan un desafío para la comunidad científica debido a que estas componentes no lineales son las responsables de comportamientos complejos y, frecuentemente, impredecibles o caóticos. Uno de estos fenómenos es el denominado ciclo límite, el cual solo pueden ser generado en sistemas de esta índole. Entonces, el diseño de sistemas de control para la obtención de este tipo de comportamiento se encuentra muy lejos de ser trivial. Los ciclos límites se encuentran presentes en disímiles aplicaciones, que van desde los sistemas eléctricos, mecánicos, químicos hasta los relacionados con otras disciplinas como la biología.

Relacionado con la utilización de los sistemas difusos, existen resultados que investigan la predicción de ciclos límites, los cuales determinan la función descriptiva de un elemento difuso al sustituir este con un elemento no lineal equivalente, con una sola entrada y una única salida se obtiene la función descriptiva (FD) de forma experimental en [1], [2]. De forma similar [3] utiliza el diseño de un sistema difuso múltiples-entradas una-salida mediante el método de balance armónico para la detección de ciclos límites, el análisis de estabilidad y la obtención de la función descriptiva del sistema difuso es evaluado experimentalmente, estas propuestas no brindan un análisis matemático para la obtención de la función descriptiva del sistema difuso.

Lisdan Herrera-García agradece al CONACyT por el apoyo dado con una beca No. 467505 para estudios del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Tijuana. L. T. Aguilar agradece al CONACyT por el apoyo brindado a través del proyecto 285279.

L. Herrera-Garcia, S. L. Cardenas-Maciel, y N. R. Cazarez-Castro pertenecen al Instituto Tecnológico de Tijuana, Tecnológico Nacional de México, Tijuana, México, 22414 (emails: lisdan.herrera17@tectijuana.edu.mx; lilettecardenas{nohe}@ieee.org).

L. T. Aguilar pertenece al Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310, Col. Nueva Tijuana, Tijuana, México 22435 (email: laguilarb@ipn.mx).

J. A. Lopez-Renteria pertenence a CONACyT y al Instituto Tecnológico de Tijuana, Tecnológico Nacional de México, Tijuana, México, 22414 (email: jorge.lopez@tectijuana.edu.mx).

Sin embargo, Kim, Lee y Park [4] estudiaron la detección de ciclos límites mediante el diseño de un sistema de control difuso a través de la función descriptiva, en el mismo se desarrolla de forma analítica la obtención diseño del sistema difuso y la posterior obtención de la función descriptiva. De esta forma, se predice con exactitud el ajuste de las funciones de pertenencia para predecir los ciclos límites.

La adición de dinámica de los actuadores tratada en el presente documento representa un análisis particular en la obtención de oscilaciones no lineales (ciclos límites estables). Aunque resultados teóricos puedan demostrar la existencia de ciclos límites, dinámicas no contempladas pueden arrojar lo contrario en la práctica. Dentro de los resultados en la literatura especializada se encuentra [5] donde se propone un control de estructura variable tipo terminal basado en redes neuronales. El esquema por modos deslizantes se propone para manipuladores robóticos, incluida la dinámica del actuador. En Herrera, Orlov, Montaño y Shiriaev [6] se utilizó el enfoque de restricción virtual extendida acoplado a la síntesis no lineal $\mathcal{H}_\infty$ para producir la generación de movimiento periódico por retroalimentación de salida robusta para sistemas mecánicos de grado uno, impulsados por motores eléctricos con su propia dinámica.

El objetivo de este trabajo es cómo generar ciclos límites asintóticamente estables con una amplitud y frecuencia deseadas en un sistema dinámico sin necesidad de una señal de referencia externa en un sistema subactuado incluyendo la dinámica propia de los actuadores. Para ello se presenta el diseño de un doble controlador difuso basado en el método función descriptiva, opuesto a la mayoría de las investigaciones presentadas en la literatura, las cuales buscan predecir los ciclos límites para poder evitarlos.

El resto del artículo está organizado como sigue: La Sección II describe el planteamiento del problema, mientras que la Sección III expone la descripción del sistema y su modelo matemático. En la Sección IV se presenta el diseño del esquema a doble controlador difuso (DCD). La expresión analítica de la función descriptiva del esquema DCD se desarrolla en la Sección V, así como las bases del criterio de Loeb para la estabilidad orbital. La validación de la propuesta mediante resultados numéricos se presenta en la Sección VI. En la Sección VII se presenta las conclusiones.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## II. Planteamiento del Problema

Considérese el modelo matemático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{u} &= -k_c u + \tau \\ y &= Cx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida, $u(t) \in \mathbb{R}$ es el estado del actuador, $\tau \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ representa la matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ es la matriz de salida y $k_c$ es una una constante estricta positiva la cual se selecciona de forma arbitraria. Se asume que la matriz $A$ no tiene valores propios en el eje imaginario y el grado relativo es mayor que uno con respecto a la salida $y(t)$. Además, la matriz $A$ se considera Hurwitz. El vector $\dot{u}(t)$ pone de manifiesto la adición de una componente dinámica al sistema, la cual corresponde a los actuadores de la planta.

Considerando la dinámica del actuador, se obtiene un nuevo vector de estados $z = [x, u]^T$ que permite reescribir (1) como

$$\begin{aligned} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{(1\times n)} & -k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{(n\times 1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{2}$$

Con base en (2) se propone la siguiente ley de control

$$\tau = Kz + \psi(x, k_1, k_2) \tag{3}$$

donde $K \in \mathbb{R}^{1\times(n+1)}$ es un controlador de estabilización del sistema que permite cumplir la condición de Hurwitz. La función $\psi(x, k_1, k_2)$ representa el doble controlador difuso, capaz de generar oscilaciones no lineales (ciclos límites) en la planta. Los parámetros $k_1$ y $k_2$ se obtienen de forma analítica con base a una amplitud $A_1$ y frecuencia $\omega$ deseadas de la oscilación no lineal, tal que la salida escalar del sistema $y(t)$ converja a una trayectoria cerrada y aislada (ciclo límite) es decir

$$y_{ss}(t + T) = y_{ss}(t),\ t \geq 0, \tag{4}$$

para un período $T = 2\pi/\omega$ y condiciones iniciales $x(0)$ suficientemente cerca al ciclo límite, donde $y_{ss}(t)$ es la solución de $y(t)$ en estado estacionario. Los parámetros $k_1$ y $k_2$ permiten el ajuste del doble controlador difuso al poder definir el universo de discurso de las funciones de pertenencia de los controladores difusos y con ello poder generar un movimiento periódico en la salida de la planta. Las expresiones analíticas de $k_1$ y $k_2$ son obtenidas más adelante utilizando el método en el dominio de la frecuencia conocido como función descriptiva [7].

Además, el DCD depende de los estados del péndulo en el sistema carro-péndulo descritos en el vector de estados $x$, donde $x_2(t)$ es la posición angular y $x_4(t)$ es la velocidad angular. De esta forma se propone la siguiente expresión matemática del DCD

$$\psi(x, k_1, k_2) = \psi_1(x_2, k_1) + \psi_2(x_4, k_2) \tag{5}$$

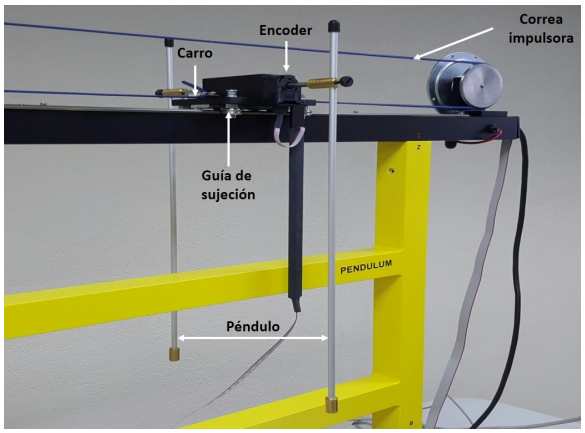



Fig. 1. Sistema mecánico del carro-péndulo.

donde $\psi_1$ manipulará la posición angular y $\psi_2$ la velocidad angular.

El diseño del DCD se presenta en detalle en la Sección IV.

## III. Descripción y Modelo Matemático del Carro-Péndulo

El presente trabajo utiliza como caso de estudio un sistema que consta de un carro y un péndulo (Fig. 1) fabricado por Inteco [8].

El modelo dinámico del carro-péndulo es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{a_1 h_1(x, u) + h_2(x)\cos x_2}{d(x)}, \\ \dot{x}_4 &= \frac{h_1(x, u)\cos x_2 + a_2 h_2(x)}{d(x)}, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $h_1(x, u) = c_1 u - x_4^2 \sin(x_2) - c_2 x_3$, $h_2(x) = g\sin(x_2) - c_3 x_4$, $d(x) = b - \cos(x_2)^2$, $a_1 = J_p/ml$, $a_2 = 1/l$, $b = a_1 a_2$, $c_1 = p_1/ml$, $c_2 = (f_c - p_2)/ml$ y $c_3 = f_p/ml$. Aquí, la masa total del péndulo y del carro se denota como $m = 0.872\,\text{kg}$, $l = 0.011\,\text{m}$ es la distancia desde el eje de rotación del péndulo al centro de masa del sistema, $J_p = 2.92 \times 10^{-3}$ es el momento de inercia del péndulo con respecto a su eje sobre el carro. El término $g = 9.81\,\text{m/s}^2$ representa la aceleración gravitacional. De similar forma, $f_c = 0.5\,\text{Ns/m}$ representa la fricción viscosa. Asimismo, el par de fricción en el movimiento angular del péndulo es $f_p = 6.65\ \times 10^{-5}$ N-m-s/rad.

El sistema no lineal (6) se puede representar mediante su modelo linealizado considerando la aplicación operador

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Jacobiano [9], es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{g}{b-1} & \dfrac{a_1 c_2}{1-b} & \dfrac{c_3}{1-b} \\ 0 & \dfrac{a_2 g}{b-1} & \dfrac{c_2}{1-b} & \dfrac{a_2 c_3}{1-b} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{(4\times 1)} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando (1) y (2) y al sustituir los valores numéricos en (7) y si $k_c = 1$, se llega a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.37 & -1.25 & -3\times 10^{-4} & 11.18 \\ 0 & 33.31 & -4.01 & -0.024 & 36.74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Los valores propios de la matriz de estados (8) son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5.7489$, $\lambda_3 = -5.8196$, $\lambda_4 = -1.1998$ y $\lambda_5 = -1.0$ por lo que la matriz de estados (8) no es Hurwitz. Para cumplir esta premisa del sistema (1) se diseña un vector de ganancias $K$ utilizando el método de Ackermann [10] tal que los polos en lazo cerrado sean ubicados en $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -4$ y $\lambda_5 = -5$ a (7) a través de $A - BK$ resultando en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.37 & -1.25 & -3\times 10^{-4} & 11.18 \\ 0 & 33.40 & -4.10 & -0.024 & 36.74 \\ 0.33 & -19.80 & 2.29 & -3.44 & -13.73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}. \tag{9}$$

A partir de (9), resulta la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{36.74s^2 + 0.0011s - 3.401\times 10^{-16}}{s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120}. \tag{10}$$

## IV. Doble Controlador Difuso

Se propone un doble controlador difuso tomando como punto de partida (5). El sistema de control difuso es conformado en dos piezas donde las reglas del tipo IF–THEN están dadas por expresiones lingüísticas, tanto el antecedente como el consecuente, relacionadas a las variables de entrada $x_l$ y salida $\psi_l$. Las reglas de inferencia difusa tienen la forma

SI $x_l$ ES $M_i$ ENTONCES $\psi_l$ es $\psi_i$

donde $M_{-1}$, $M_0$ y $M_1$ representan las funciones de pertenencia en la variable de entrada. De esta forma, se propone cada sistema difuso como un sistema de inferencia tipo Mamdani [11]. La etapa de fusificación utiliza funciones de pertenencia del tipo triangular en el centro tal que:

$$M_0(x_l) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi_i} x_l + 1, & \text{si } -\Phi_i \le x_l < 0 \\ -\frac{1}{\Phi_i} x_l + 1, & \text{si } 0 \le x_l \le \Phi_i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{11}$$

En los extremos se consideran funciones del tipo trapezoidal definidas como:

$$M_{-1}(x_l) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_l < -\Phi_i \\ -\frac{1}{\Phi_i} x_l, & \text{si } -\Phi_i \le x_l \le 0 \\ 0, & \text{si } x_l > 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$M_1(x_l) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_l < 0 \\ \frac{1}{\Phi_i} x_l, & \text{si } 0 \le x_l \le \Phi_i \\ 1, & \text{si } x_l > \Phi_i. \end{cases} \tag{13}$$

Estas funciones de pertenencia se encuentran distribuidas completa, consistente y simétricamente con respecto al origen. La Figura 2 ilustra la distribución de las funciones de pertenencia para $i = -1, 0, 1$.

Como motor de inferencia se utiliza el producto de inferencia y para el defusificador se establece el método centro promedio. Entonces, el sistema difuso se puede expresar de la siguiente manera

$$\psi_l(x_l) = \sum_{i=-1}^{1} \left\{ \frac{M_i(x_l)}{\sum_{r=-1}^{1} M_r(x_l)} \right\} U_i = \sum_{i=-1}^{1} \Psi_i(x_l) U_i, \tag{14}$$

donde $U_{-i} = -U_i$ refiere al valor *crisp* de disparo de la salida relacionado a la $x_l$. La función $\Psi_i(x_l)$ cumple las siguientes suposiciones:

- $\Psi_i(x_l)$ es Lipschitz continua en forma global y acotada.
- $\Psi_i(0) = 0$ (estado estacionario).
- Condición de simetría impar $-\Psi_i(x_l) = \Psi_i(-x_l)$.
- Dado que solo se activan dos reglas de manera simultanea [4] para cualquier valor de $x_l$, el diseño de $\psi_l(x_l)$ es una combinación convexa, es decir, $\sum_{i=-1} M_i(x_l) = 1$.

Entonces, el sistema difuso propuesto para todo el universo discurso $[-2\pi, 2\pi]$ de $x_l$ requiere solo tres subconjuntos difusos que apuntan a los valores que toma $\psi_l$ en correspondencia al estado de entrada. Al considerar el análisis desarrollado en [4] con base en las funciones de pertenencia (11)–(13) y tomando la expresión (14) se obtiene la ecuación de salida del sistema difuso tal que:

$$\psi_1(x_1) = \begin{cases} \frac{U_i}{\Phi_i} x_1, & \text{si } |x_1| \le \Phi_i \\ U_i, & \text{si } |x_1| > \Phi_i. \end{cases} \tag{15}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

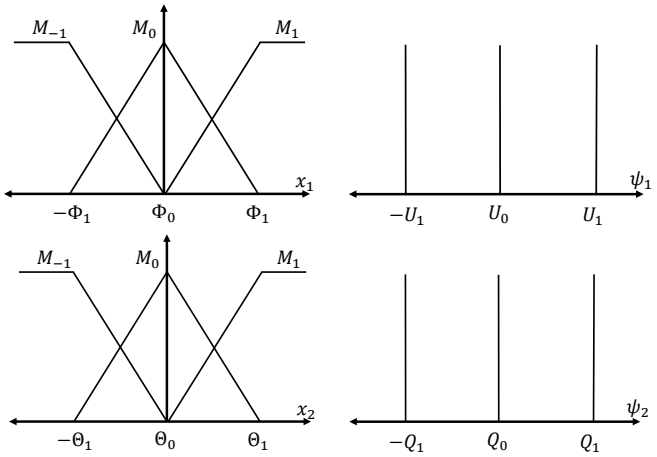



Fig. 2. Funciones de pertenencia con $x_1$ y $x_2$ como variables de entrada y $\psi_1$ y $\psi_2$ como salidas.

Al realizar un análisis de (15) se puede deducir que la expresión de salida es equivalente a una función saturación, donde el término $k_1 = U_1/\Phi_1$ refiere a la pendiente de la función saturación para el sistema difuso propuesto. Debido a que la estructura del sistema difuso para la variable $x_2(t)$ es similar a la estructura del sistema difuso para la variable de posición $x_1(t)$, pero con diferentes valores a la entrada y a la salida. Entonces, por simplicidad se define $\Theta_i$ y $Q_i$ como parámetros de diseño a la entrada y a la salida para el SD-2. De esta forma, el SD-2 puede ser expresado como:

$$\psi_2(x_2) = \begin{cases} \frac{Q_i}{\Theta_i} x_2, & \text{si } |x_2| \leq \Theta_i \\ Q_i, & \text{si } |x_2| > \Theta_i. \end{cases} \tag{16}$$

Por lo tanto, al sustituir (15)–(16) en (3) se obtiene la siguiente expresión:

$$\psi(x) = \begin{cases} U_1, & \text{si } x_1 > \Phi_i \\ k_1 x_1, & \text{si } |x_1| \leq \Phi_i \\ -U_1, & \text{si } x_1 < -\Phi_i \end{cases} + \begin{cases} Q_1, & \text{si } x_2 > \Theta_i \\ k_2 x_2, & \text{si } |x_2| \leq \Theta_i \\ -Q_1, & \text{si } x_2 < -\Theta_i, \end{cases} \tag{17}$$

que representa un sistema no lineal basado en controladores difusos equivalente a la función no lineal de doble saturación.

## V. Función Descriptiva del DCD

En esta sección se aplicará el método función descriptiva a cada controlador difuso para obtener la función descriptiva del doble controlador difuso, así como obtener las expresiones matemáticas las cuales en términdos de la amplitud $A_1$ y frecuencia $\omega$ deseados del ciclo límite. Así se podrá obtener los parámetros de ajuste $k_1(A_1, \omega)$ y $k_2(A_1, \omega)$ del doble controlador difuso, el cual se utiliza para inducir un movimiento periódico estable en un sistema dinámico.

Al comportarse (17) como una función saturación que implica que la salida es simétrica en los cuatro cuadrantes del período, entonces se considera $x(t) = A\sin(\omega t)$, $k_1 = U_1/\Phi_1$, de similar forma $\delta_i = \sin^{-1}(\Phi_1/A_1)$ y $x_l = \omega t$. La ecuación (15) puede ser reescrita para el primer cuadrante como:

$$\psi_l(x_l) = k_i \begin{cases} x_l, & \text{si } 0 \leq x_l \leq \delta_i \\ \Phi_1, & \text{si } \delta_i < x_l \leq \pi/2. \end{cases} \tag{18}$$

El análisis para obtener la función descriptiva para cada sistema difuso es similar considerando la diferencia entre el parámetro amplitud $A_1$ y $A_2$. La función descriptiva para un sistema difuso se calcula considerando (18) como $\psi_l(t)$ resultando en

$$N(A_1) = \frac{2k_1}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right) + \frac{\Phi_1}{A_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right)^2}\right]. \tag{19}$$

En correspondencia a la descripción del método de la función descriptiva de un elemento no lineal como descrito en [12], la función descriptiva $N(A_1, \omega)$ de los sistemas difusos (15), (16) es el primer armónico de la señal de una entrada periódica dividido por la amplitud de $y(t)$. Por lo tanto, la relación (3) puede analizarse como la conexión paralela de dos sistemas difusos donde la entrada al primer sistema difuso (SD-1) es la variable de salida de un sistema dado y la entrada al segundo sistema difuso (SD-2) es la derivada de dicha salida. La función descriptiva del doble controlador difuso es:

$$N(A_1, \omega) = N_1(A_1) + sN_2(A_2), \tag{20}$$

donde $s = j\omega$ y $A_2$ es la amplitud de $dy/dt$. Considere entonces la relación entre $y$ y $dy/dt$ en el dominio de frecuencia, la cual brinda la relación entre las amplitudes $A_1$ y $A_2$. El término $A_1$ constituye la amplitud deseada a la salida del SD-1. De similar forma, $A_2 = A_1\omega$ que contiene los parámetros a obtener a la salida del SD-2. El esquema a doble sistema difuso se muestra en la Figura 3.

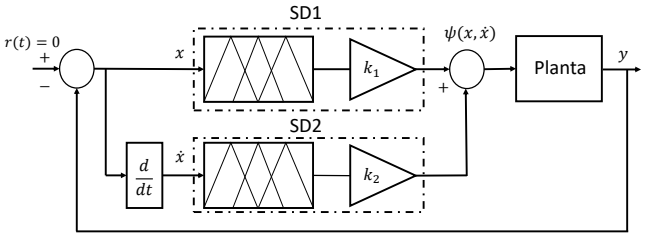



Fig. 3. Sistema de control con el DCD (17) y la planta carro-péndulo (9).

Sustituyendo (19) en (20), la función descriptiva del esquema a doble controlador difuso resultante es:

$$N(A_1, \omega) = \frac{2k_1}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right) + \frac{\Phi_1}{A_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right)^2}\right] + j\omega\frac{2k_2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\Theta_1}{A_2}\right) + \frac{\Theta_1}{A_2}\sqrt{1 - \left(\frac{\Theta_1}{A_2}\right)^2}\right], \tag{21}$$

donde $\Phi_1$ y $\Theta_1$ representan parámetros de diseño tal que que $\Phi_1 < A_1$ y $\Phi_1 < A_2$. Al definir los valores de $\Phi_1^l$,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

$A_1$, $A_2$ basados en la amplitud y frecuencia deseada y dado que $k_1 = U_1/\Phi_1$ y $k_2 = Q_1/\Theta_1$, la función descriptiva (21) representa una línea recta, donde su pendiente depende de $k_1$ y $k_2$.

Se considerará la metodología general para la búsqueda de soluciones periódicas, conocida como balance armónico [13]. Este método establece la siguiente expresión denominada *ecuación de balance armónico*

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A_1, \omega)}. \tag{22}$$

Si la solución a la relación anterior existe, la misma será periódica, con valores aproximados de frecuencia y amplitud deseadas. Considerando (21) y (10), la ecuación (22) se puede descomponer en sus componentes real e imaginaria, que de forma simplificada resulta ser

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \\ &\frac{\pi}{2} \cdot \frac{-k_1 \operatorname{Re}\{N(A,\omega)\} + jk_2 \operatorname{Im}\{N(A,\omega)\}}{(k_1 \operatorname{Re}\{N(A,\omega)\})^2 + (k_2 \operatorname{Im}\{N(A,\omega)\})^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Los valores de $k_1$ y $k_2$ se calculan al igualar las componentes real e imaginarias de $G(j\omega)$ y $N(A_1, \omega)$ en (23); resultando un sistema de dos ecuaciones. Resolviendo ese par de ecuaciones, se obtienen los siguientes parámetros de sintonía $k_1$ y $k_2$:

$$k_1 = \frac{-\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2)\operatorname{Re}\{N(A,\omega)\}}, \tag{24}$$

$$k_2 = \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2)\operatorname{Im}\{N(A,\omega)\}}. \tag{25}$$

De esta forma, al utilizar (24) y (25) con base en los valores de amplitud $A_1$ y frecuencia $\omega$ deseados, y si la ecuación (22) tiene solución es posible obtener de forma analítica los valores $k_1$ y $k_2$ y con ello garantizar un ciclo límite estable mediante el diseño de un esquema a doble controlador difuso.

### A. Criterio de Loeb

La estabilidad del ciclo límite se puede verificar a través de (22) utilizando el criterio de Loeb [14] que se basa en el método de perturbaciones [15]. El mismo es basado en la ecuación de balance armónico (22). De acuerdo con este criterio, para que las oscilaciones sean estables, es necesario cumplir con la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1}\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega}\frac{\partial V}{\partial A_1} > 0, \tag{26}$$

donde $U(A_1, \omega)$ y $V(A_1, \omega)$ son extraídas de (22) tal que:

$$U(A_1, \omega) + jV(A_1, \omega). \tag{27}$$

La estabilidad de un ciclo límite se plantea en términos de perturbaciones cuasi-estáticas en la amplitud y la frecuencia. Se considera que el ciclo límite es estable si vuelve a su estado de equilibrio original, mientras que si su amplitud o frecuencia crece o decae hasta que alcanza otro estado de equilibrio denominado inestable.

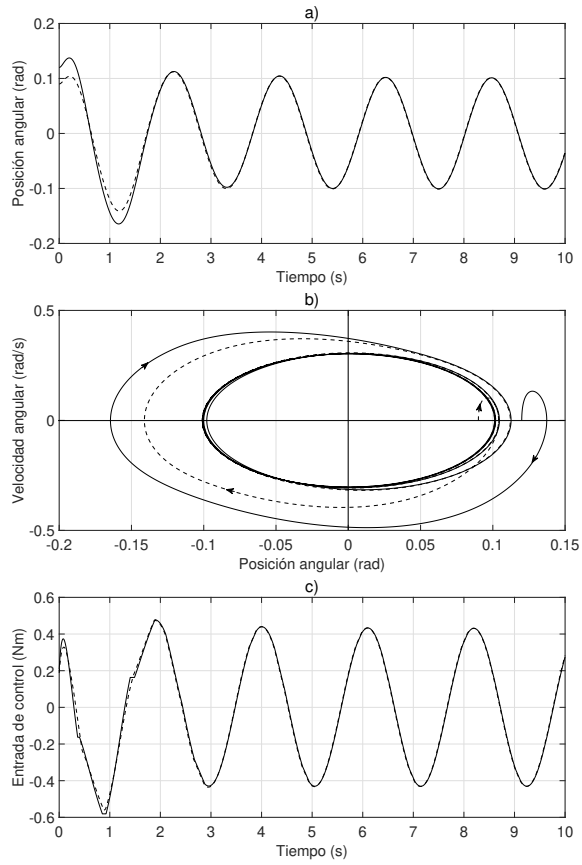



Fig. 4. (*a*) Posición angular en función del tiempo, (*b*) plano fase del sistema carro-péndulo bajo condiciones iniciales dentro y fuera del ciclo límite y (*c*) señal de salida del doble controlador difuso.

## VI. Resultados Numéricos

Con el objetivo de obtener auto-oscilaciones estables con amplitud y frecuencias deseadas en el sistema mecánico sub-actuado carro péndulo (10) incluida la dinámica del actuador. A través de (24) y (25) se determinan los parámetros de diseño $k_1$ y $k_2$ para la amplitud $A_1 = 0.1$ rad y frecuencia $\omega = 3$ rad/s deseados. Las ganancias arrojadas son $k_1 = -2.0892$ y $k_2 = -1.2402$. Para el SD-1 se consideró $\Phi_1 = 0.0990$ y $U_1 = 0.1$, mientras que para el SD-2 se definió $\Theta_1 = 0.2990$ y $Q_1 = 0.3$. Las simulaciones realizadas refieren condiciones iniciales diferentes de cero solamente en la variable posición angular $x_2$, ya que se considera que las velocidades y la entrada de control son cero en el momento inicial de la simulación.

### A. Simulaciones

Para la primera simulación se consideran las siguientes condiciones iniciales: $z(0)^T = [0, 0.12, 0, 0, 0]$ y $z(0)^T = [0, 0.08, 0, 0, 0]$. Las Figuras 4(*a*) y 4(*b*) muestran la evolución de las soluciones y como estas convergen asintóticamente a una única órbita periódica, esto se puede apreciar tanto en el retrato de fase así como, en la gráfica de respuesta temporal de la posición angular. La Fig. 4(*c*) exhibe la señal de control del doble controlador difuso para ambas

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

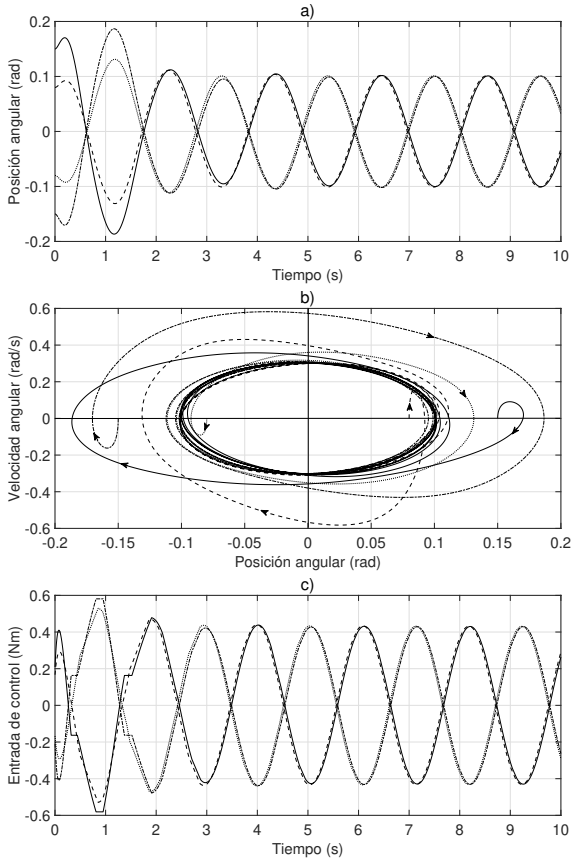



Fig. 5. (*a*) Posición angular, (*b*) plano fase del sistema carro-péndulo bajo condiciones iniciales dentro y fuera del ciclo límite y (*c*) señal de salida del doble controlador difuso.

simulaciones. Los resultados de la Figura 4 corroboran que la órbita es asintóticamente estable.

La segunda simulación cuatro diferentes condiciones iniciales, tanto dentro como fuera del ciclo límite, definidas como: $z(0)^T = [0, \pm 0.15, 0, 0, 0]$ y $z(0)^T = [0, \pm 0.08, 0, 0, 0]$.

La evolución de la posición angular con respecto tiempo, así como las trayectorias en el plano fase se pueden observar en las Figs. 5(*a*) y 5(*b*), respectivamente. Estas soluciones convergen a una oscilación no lineal (ciclo límite) con amplitud y frecuencias deseadas. Este comportamiento se manifiesta independientemente de las condiciones iniciales y sin necesidad de una señal de referencia externa. La Fig. 5(*c*) exhibe el comportamiento a señal de control necesaria para la generación de las oscilaciones no lineales.

Los resultados en simulación permiten apreciar la obtención de un movimiento periódico (ciclo límite estable) independiente de las condiciones iniciales y sin necesidad de una señal de referencia externa, donde las trayectorias convergen hacia un único ciclo límite y permanecen en este con una amplitud $A_1 = 0.1012$ rad y frecuencia $\omega = 3.0019$ rad/s, ambos resultados, muy cercanos a los deseados.

### *B. Estabilidad Orbital del Sistema Carro-Péndulo*

Se verificó de manera analítica la estabilidad orbital del cíclo límite aplicando la relación (26). Dados la amplitud y frecuencias deseados del cíclo límite se procedió a calcular las derivadas parciales definidas en (26) tal que:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 1.2138, \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0.6001,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \omega} = 0.0117, \quad \frac{\partial V}{\partial A} = -0.3178. \tag{28}$$

Sustituyendo estos valores en (26) se calcula la desigualdad del criterio de Loeb, resultando positiva ($\mathbf{0.7321}$), con lo cual garantiza la estabilidad orbital local del ciclo límite para $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 3$ rad/s.

## VII. Conclusiones

Un esquema a doble controlador difuso fue diseñado para un sistema mecánico carro–péndulo gobernado por actuadores eléctricos, con el objetivo de inducir auto-oscilaciones estables con amplitud y frecuencia deseadas sin señal de referencia externa. Los resultados numéricos corroboran la eficacia del DCD al generar un ciclo límite estable con amplitud y frecuencia cercanas a las deseadas. Finalmente, la estabilidad del ciclo límite fue corroborada analíticamente utilizando el criterio de Loeb.

## References

[1] O. Kuljača, S. Tešnjak, and Z. Vukić, "Describing function of mamdani type fuzzy regulator with input signals derived from single system input and singleton output membership functions," in *IEEE Hong Kong Symposium on Robotics and Control*, 1999.

[2] D. F. Jenkins and K. M. Passino, "An introduction to nonlinear analysis of fuzzy control systems," *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 75–103, 1999.

[3] F. Gordillo, J. Aracil, and T. Alamo, "Determining limit cycles in fuzzy control systems," in *Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 1, 1997, pp. 193–198.

[4] E. Kim, H. Lee, and M. Park, "Limit-cycle prediction of a fuzzy control system based on describing function method," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 11–22, 2000.

[5] L. Wang, T. Chai, and L. Zhai, "Neural-network-based terminal sliding-mode control of robotic manipulators including actuator dynamics," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3296–3304, 2009.

[6] L. Herrera, Y. Orlov, O. Montaño, and A. Shiriaev, "Model orbit output feedback tracking of underactuated mechanical systems with actuator dynamics," *International Journal of Control*, pp. 1–14, 2019.

[7] D. Atherton and D. Towill, "Nonlinear control engineering-describing function analysis and design," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 7, no. 9, pp. 678–678, 1977.

[8] Inteco, *Pendulum-Cart System User's Manual*, Quanser Inc., Katowicka 36 31-351 Krakow, Poland, 2016.

[9] U. Mackenroth, "Linear dynamical systems," in *Robust Control Systems*. Springer, 2004, pp. 85–132.

[10] J. Ackermann, "Pole placement control," *Control System, Robotics and Automation*, vol. 8, no. 2011, pp. 74–101, 2009.

[11] E. Mamdani, "Applications of fuzzy set theory to control systems: a survey," in *Fuzzy Automata and Decision Processes*. North-Holland, 1977, pp. 77–88.

[12] J.-J. E. Slotine, W. Li *et al.*, *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199, no. 1.

[13] H. K. Khalil, "Nonlinear systems," *Prentice-Hall, New Jersey*, vol. 2, no. 5, pp. 5–1, 1996.

[14] W. E. Vander Velde, *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. McGraw-Hill, New York, 1968.

[15] C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# State-Feedback Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Boundary Control for a Gantry Crane with Flexible Cable

Luis T. Aguilar

***Abstract*— We have solved the state-feedback nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ boundary control to stabilize a flexible cable of a gantry crane. The cable is not assumed rigid; therefore, we represented the cable dynamics as a one-dimensional hyperbolic partial differential equation. We proved the asymptotical stability of the unperturbed closed-loop system through a strict Lyapunov functional. Moreover, we demonstrated the disturbance attenuation level through the $\mathcal{L}_2$-gain analysis. We corroborate the theoretical results by numerical simulations developed in a dynamic model of a laboratory gantry crane.**

***Index Terms*— Distributed parameter systems, flexible cable, $\mathcal{H}_\infty$ boundary control, state-feedback.**

## I. INTRODUCTION

The cable attached to a crane is usually subject to disturbances putting in risk the human beings and the load. Although a cable together with the payload can be modeled as a rigid object, the flexibility and vibrations may lead to undesirable external excitations when the cable interacts with a surface, by the wind effect, when the crane is mounted in a ship or when the load is accidentally released. These situations are real scenarios in cranes (cf. [1]). Therefore, a challenging problem consists of moving the payload, avoiding oscillations or decreasing the recovering time of the oscillations of the rope.

For these reasons, the modeling and control problem of flexible cables have been extensively studied in the infinite-dimensional setting lately. The cable dynamics have been represented as a distributed parameter model by applying Hamilton's principle [2], which results in a hyperbolic partial differential equation (PDE) with second-order boundary conditions. The pioneering work of Joshi and Rahn [3] presents one of the first solutions to the stabilization problem of the flexible cable in the framework of Lyapunov functionals. d'Andréa-Novel and Coron [4] explored the backstepping approach to ensure the exponential stabilization of the cable. Stürzer, Arnold, and Kugi [5] set conditions for exponential stability incorporating the mass of the chain and the payload. Elharfi [6] solved the motion planning problem, ensuring exponential stabilization as well. Recently, Wang and Krstic [7] presented an observer-based output-feedback control design to stabilize a two-dimensional coupled vibrating cable of time-varying length placed inside the sea.

Our contribution is centered on the synthesis of the $\mathcal{H}_\infty$ boundary control to stabilize a flexible cable of a gantry crane, which is modeled as a 1D hyperbolic PDE. In other words, the vibration phenomenon is represented as wave propagation. We assumed uniformly bounded disturbances in the boundaries. Although the $\mathcal{H}_\infty$ control theory is well established for finite-dimensional systems, the small-gain analysis [8] and the input-to-state stability analysis [9] are emerging topics in distributed parameter systems. Background theory on $\mathcal{H}_\infty$ boundary control and $\mathcal{L}_2$-gain analysis, in Sobolev space, are taken from Fridman and Orlov [10], Van Keulen [11], Orlov [12], and Curtain and Zwart [13]. We proved that the solution, by proposing a strict Lyapunov functional, is asymptotically stable for the unperturbed case and attenuates the admissible disturbances, that is, functions that belongs to the Hilbert space of square-integrable functions.

The paper is organized as follows. Section II provides the dynamic model, derived from the extended Hamilton's principle, and we formally state the problem. In Section III, we provide a solution to the $\mathcal{H}_\infty$ boundary control problem for the flexible cable stabilization of a laboratory crane system. Simulation results are provided in Section IV. Finally, conclusions are presented in Section V.

*Notation:* The symbols $w_t = \partial w/\partial t$, $w_{tt} = \partial^2 w/\partial t^2$, $w_\xi = \partial w/\partial_\xi$, $w_{\xi t} = \partial^2 w/\partial\xi\partial t$, and $w_{\xi\xi} = \partial^2 w/\partial\xi^2$ are used for the corresponding partial derivatives of $w(\xi, t)$. The Euclidean norm of the real-valued $n$-dimensional vector $x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ is defined as $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. $W^{1,2}(a, b)$ is the Sobolev space of absolutely continuous scalar functions $w : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ with square integrable derivatives $w^{(l)}$ of the order $l \geq 1$ and with the norm $\|w\|^2_{W^{1,2}} = \int_a^b (w^{(l)})^2(\xi)d\xi$. $L_2$ stands for the Hilbert space of square integrable scalar functions $w(\xi)$ on the domain $(0, 1)$ with the corresponding $L_2$-norm

$$\|w(\xi)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 w^2(\xi)d\xi}. \tag{1}$$

The following Lemma will be useful in the stability analysis.

*Lemma 1 ([14]):* Let $w \in W^{1,2}(a, b)$ be a scalar function with $w(a) = 0$. Then

$$\int_a^b w^2(\xi)d\xi \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b w_\xi^2(\xi)d\xi, \tag{2}$$

$$\max_{\xi\in[a,b]} w^2(\xi) \leq (b-a)\int_a^b w_\xi^2(\xi)d\xi. \tag{3}$$

The Young's inequality

$$ab \leq \frac{\sigma}{2}a^2 + \frac{1}{2\sigma}b^2, \qquad \sigma > 0 \tag{4}$$

This work was supported by the Mexican Council of Science and Technology under Grant 285279.

[1]L. Aguilar is with Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310, Col. Nueva Tijuana, Tijuana, B.C., 22435, México (laguilarb@ipn.mx).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

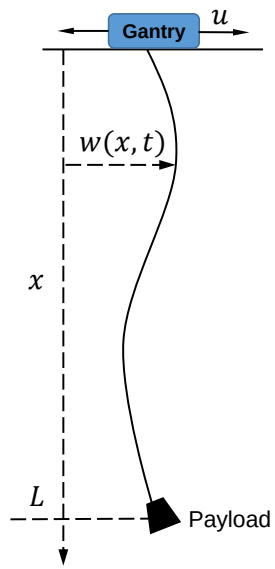



Fig. 1. Schematic representation of the laboratory gantry crane in 1D.

is used in the forthcoming analysis.

## II. DYNAMIC MODEL AND PROBLEM STATEMENT

We treat the control of the cart differently to the flexible rope. The model of the cart will be governed by ordinary differential equations, while the string will be modeled as an infinite-dimensional system. Figure 1 shows the schematic representation of the laboratory gantry crane in 1D.

Let us consider the following dynamic model of crane, which describes its motion in the X-Y plane independently of the length of the rope:

$$J\ddot{q} = \tau - F_v\dot{q} + d \tag{5}$$

where $q(t) \in \mathbb{R}$ is the linear displacement of the cart, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$ is the linear velocity of the cart, $\tau(t) \in \mathbb{R}^2$ is the control input, and $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is the time. The inertia matrix $J > 0$ is the inertia, $d(t) \in \mathbb{R}^2$ is the vector of external disturbances, and $F_v \in \mathbb{R}$ is the viscous friction coefficient. A generalized model of the laboratory crane can be found in [15].

### A. Dynamic Model of the Flexible Cable

Instead of assuming the string as a rigid object, we consider it as a flexible body. To this end, we generate the equation of motion based on the Hamilton's principle, that is,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_k - \delta E_p + \delta E_w)dt = 0 \tag{6}$$

where $E_k$ is the kinetic energy, $E_p$ is the potential energy, $E_w$ is the work energy, $\delta$ is the variational operator, and $t_1$ and $t_2$ are two time instants.

The kinetic energy of the cable is

$$E_k = \frac{1}{2}\int_0^L \rho w_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}m w_t^2(0,t) + \frac{1}{2}m_p w_t^2(L,t) \tag{7}$$

where $w(x,t)$ is the transverse motion of the cable, which depends on the spatial variable $x \in [0, L]$ and the time $t$, $\rho$ is the mass/lenght, $m$ is the mass of the gantry, and $m_p$ is the mass of the payload.

The potential energy is

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L P(x)w_x^2(x,t)dx \tag{8}$$

where $P(x) = g(\rho(L-x) + m_p)$ is the tension distributed through the cable. Here, $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ is the gravity constant.

The work done by the control force is

$$E_w = (u(t) + d_z(t))w(0,t) \tag{9}$$

where $u(t)$ is the control force and $d_z(t)$ is the external disturbance affecting the cable. To save space, in the sequel we intentionally drop the dependence of $w(x,t)$ of the spatial and the time variables, and we define $w(0,t) = w(0)$, $w_t(0,t) = w_t(0)$, and $w_x(0,t) = w_x(0)$.

The integral of the variation of $E_k$ during the time instants $t_1$ and $t_2$ results in

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_k dt = m\int_{t_1}^{t_2} w_t(0,t)\delta w_t(0,t)dt + m_p\int_{t_1}^{t_2} w_t(L,t)\delta w_t(L,t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho w_t \delta w_t dx dt.$$

Using integration by parts with respect to time yields

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} &\delta E_k dt \\ &= m w_t(0,t)\delta w(0,t)\Big|_{t_1}^{t_2} + m_p w_t(L,t)\delta w(L,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &- \int_{t_1}^{t_2}(m w_{tt}(0,t)\delta w(0,t) + m_p w_{tt}(L,t)\delta w(L,t))dt \\ &+ \int_0^L \rho w_t \delta w\Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho w_{tt}\delta w dx dt.\end{aligned} \tag{10}$$

Since the variation of $w$ vanishes at $t = t_1$ and $t = t_2$ for all $x$, the latter relation becomes

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta E_k dt &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho w_{tt}\delta w dx dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2}(m w_{tt}(0,t)\delta w(0,t) + m_p w_{tt}(L,t)\delta w(L,t))dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Evaluating the integral of the variation of $E_p$ over $t_1$ and $t_2$, and using integration by parts with respect to $x$, yields

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta E_p dt &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L P(x)w_x\delta w_x dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(P(x)w_x\delta w\Big|_0^L - \int_0^L (P_x w_x + P(x)w_{xx})\delta w dx\right)dt\end{aligned} \tag{12}$$

where $P_x = \partial P(x)/\partial x = -g\rho$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

The integral of the variation of the work energy is

$$E_w = \int_{t_1}^{t_2} u(0,t)\delta w(0,t)dt. \tag{13}$$

Substituting (11)–(13) into the left-hand of (6), we therefore get

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_k - \delta E_p + \delta E_w)dt = \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \Big( m w_{tt}(0,t)\delta w(0,t) + m_p w_{tt}(L,t)\delta w(L,t) \Big) dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho w_{tt} \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} (u(t) + d_z(t))\delta w(0,t) dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \Big( P w_x \delta w \Big|_0^L - \int_0^L (P_x w_x + P w_{xx})\delta w dx \Big) dt.
\end{aligned}$$

Finally, the relation (6) holds provided

$$\rho w_{tt} = P_x w_x + P w_{xx}, \tag{14}$$

and

$$m w_{tt}(0,t) = u(t) + P(0) w_x(0,t) + d_z(t) \tag{15}$$

$$m_p w_{tt}(L,t) = -P(L) w_x(L,t). \tag{16}$$

The hyperbolic partial differential equation (14) is the dynamic of the rope represented as string vibrating equation with Neumann boundary conditions (15)–(16). Moreover, it is assumed the presence of external disturbances $d_z(t) \in L_2$.

The *control objective* is to design an $\mathcal{H}_\infty$ controller $u(t)$ such that the displacement of the rope $w(x,t)$ is asymptotically driven to the origin for the unperturbed case ($d_z(t) \equiv 0$), and the $L_2$-gain is less than $\gamma$, that is

$$\|z(x,t)\|_{L_2}^2 \le \gamma^2 \|d_z(t)\|_{L_2}^2 \tag{17}$$

for all $t_1 > t_0$ and all piecewise continuous functions $d_z(t)$. Here, $z(x,t)$ is the output to be controlled given by

$$z(x,t) = [\rho_0 w(x,t), \rho_1 w_t(x,t), \mu u(0,t)]^T \tag{18}$$

where $\rho_0$, $\rho_1$, and $\mu$ are positive constants; and $x \in [0, L]$.

## III. $\mathcal{H}_\infty$ BOUNDARY CONTROL

The $\mathcal{H}_\infty$ control problem of interest is stated as follows. Given $\gamma > 0$, find a linear static output feedback

$$u(t) = -k_1 w(0,t) - k_2 w_t(0,t) \tag{19}$$

that asymptotically stabilizes the unperturbed system (14)–(16) and leads to a negative performance index

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left( \int_0^L z^T(x,t) z(x,t) dx - \gamma^2 d_z^2(t) \right) dt < 0 \tag{20}$$

for all the solutions of (14)–(16), initialized with the zero data $w(x,t_0) = w_t(x,t_0) = 0$, and for all admissible external disturbances $0 \ne d_z(t) \in L_2(0,\infty)$, under which these solutions are globally continuable to the right.

We propose the following Lyapunov functional

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_0^L P(x) w_x^2(x,t) dx + \frac{\rho}{2}\int_0^L w_t^2(x,t) dx \\
&+ \frac{(k_1 + \alpha k_2)}{2} w^2(0,t) + \alpha m w(0,t) w_t(0,t) + \frac{m}{2} w_t^2(0,t) \\
&+ \frac{m_p}{2} w_t^2(L,t) + \varepsilon \int_0^L (x - L) w_t w_x(x,t) dx,
\end{aligned} \tag{21}$$

which is positive-definite provided that

$$\rho P(0) - \varepsilon^2 > 0, \qquad m(k_1 + \alpha k_2) - \alpha^2 > 0. \tag{22}$$

The Lyapunov functional (21) satisfies

$$\beta_1 V_0 \le V(x,t) \le \beta_2 V_0, \tag{23}$$

where

$$V_0 = \|w_x\|_{L_2}^2 + \|w_t\|_{L_2}^2 + \left\| \begin{matrix} \|w(0,t)\| \\ \|w_t(0,t)\| \end{matrix} \right\|_2^2 + \|w_t(L,t)\|_2^2, \tag{24}$$

with

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}\min\{\lambda_{\min}\{M\}, \rho, m_p\} \\
\beta_2 &= \frac{1}{2}\max\{\lambda_{\max}\{M\}, P(0) + \varepsilon, \rho + \varepsilon, m_p\}, \\
M &= \begin{bmatrix} k_1 + \alpha k_2 & \alpha m \\ \alpha m & m \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{25}$$

The time derivative of $V$ along the solution of (14)–(16) for the disturbance-free system ($d_z = 0$) is

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \int_0^L P(x) w_x w_{xt} dx + \rho \int_0^L w_t w_{tt} dx + \alpha m w_t^2(0) \\
&\quad + (k_1 + \alpha k_2) w(0) w_t(0) + m\Big(\alpha w(0) + w_t(0)\Big) w_{tt}(0) \\
&\quad + m_p w_t w_{tt}(L,t) + \varepsilon \int_0^L (x - L)(w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\
&= \int_0^L P(x) w_x w_{xt} dx + \int_0^L w_t (P_x w_x + P w_{xx}) dx \\
&\quad - \alpha k_1 w^2(0) - (k_2 - \alpha m) w_t^2(0) + \alpha P(0) w(0) w_x(0) \\
&\quad + P(0) w_t(0) w_x(0) - P(L) w_t(L) w_x(L) \\
&\quad + \varepsilon \int_0^L (x - L)(w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx.
\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}
&\int_0^L w_t P w_{xx} dx \\
&= w_t P w_x \Big|_0^L - \int_0^L w_t P_x w_x dx - \int_0^L P w_x w_{xt} dx,
\end{aligned} \tag{26}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

we get

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\alpha k_1 w^2(0) - (k_2 - \alpha m) w_t^2(0) + \alpha P(0) w(0) w_x(0) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^L (x-L)(w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &= -\alpha k_1 w^2(0) - (k_2 - \alpha m) w_t^2(0) + \alpha P(0) w(0) w_x(0) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^L (x-L) w_t w_{xt} dx + \frac{\varepsilon P_x}{\rho} \int_0^L (x-L) w_x^2 dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\rho} \int_0^L (x-L) P(x) w_x w_{xx} dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Solving the fourth and sixth terms by parts, that is,

$$\begin{aligned}&\varepsilon \int_0^L (x-L) w_t w_{xt} dx = -\frac{\varepsilon L}{2} w_t^2(0) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L w_t^2 dx, \\ &\frac{\varepsilon}{\rho} \int_0^L (x-L) P(x) w_x w_{xx} dx = -\frac{\varepsilon L}{2\rho} P(0) w_x^2(0) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2\rho} \int_0^L \big(P + (x-L) P_x\big) w_x^2 dx,\end{aligned}$$

and after lengthy calculations we obtain

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\alpha k_1 w^2(0) - \Big(k_2 + \frac{\varepsilon L}{2} - \alpha m\Big) w_t^2(0) \\ &\quad + \alpha P(0) w(0) w_x(0) - \frac{\varepsilon L}{2\rho} P(0) w_x^2(0) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L w_t^2 dx + \frac{\varepsilon P_x}{\rho} \int_0^L (x-L) w_x^2 dx \\ &\quad - \varepsilon g \int_0^L (L-x) w_x^2(x,t) dx - \frac{\varepsilon g m_p}{2} \int_0^L w_x^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{28}$$

Since $P_x = -g\rho$ and by applying the Young's inequality (4) to the indefinite-sign term,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -\alpha \left(k_1 - \frac{P(0)}{2}\right) w^2(0) - \Big(k_2 + \frac{\varepsilon L}{2} - \alpha m\Big) w_t^2(0) \\ &\quad - \frac{P(0)}{2} \left(\frac{\varepsilon L}{\rho} - \alpha\right) w_x^2(0) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L w_t^2(x,t) dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon g m_p}{2} \int_0^L w_x^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{29}$$

Therefore, $\dot{V}$ is negative-definite provided that $k_1$ and $k_2$ are chosen to satisfy

$$k_1 > \frac{P(0)}{2}, \qquad k_2 + \frac{\varepsilon L}{2} > \alpha m. \tag{30}$$

For the perturbed case, let us find conditions that guarantee the inequality

$$\begin{aligned}W(t) &= \dot{V} + \alpha w(0) d_z(t) + w_t(0) d_z(t) \\ &\quad + \int_0^L z^T(x,t) z(x,t) dx - \gamma^2 d_z^2(t) < 0 \end{aligned} \tag{31}$$

where $V$ is given by (21) and the time derivative along the solution of the closed-loop system (14)–(16), (19).

By applying the Young's inequality (4), we get

$$\begin{aligned}W(t) &\le \dot{V} + \frac{\alpha}{2} w^2(0) + \frac{1}{2} w_t^2(0) + \frac{1}{2}(\alpha+1) d_z^2(t) \\ &\quad + \int_0^L z^T(x,t) z(x,t) dx - \gamma^2 d_z^2(t) x < 0. \end{aligned} \tag{32}$$

By applying the inequality (2) along with (18), we get

$$\begin{aligned}&\int_0^L z^T(x,t) z(x,t) dx \le \\ &\int_0^L \Big[\rho_0^2 w^2(x,t) + \rho_1^2 w_t^2(x,t) + \mu k_1^2 w^2(0) + \mu k_2^2 w_t(0)\Big] dx \\ &\le \int_0^L \Big[\frac{L^2}{2} \rho_0^2 w_x^2(x,t) + \rho_1^2 w_t^2(x,t) + \mu k_1^2 w^2(0)\Big] dx \\ &+ \mu k_2^2 \int_0^L w_t^2(0) dx.\end{aligned}$$

Therefore, it is finally concluded that

$$\begin{aligned}W(x,t) &\le -\psi_1 w^2(0) - \psi_2 w_t^2(0) - \psi_3 w_x^2(0) \\ &\quad - \psi_4 \int_0^L w_t^2(x,t) dx - \psi_5 \int_0^L w_x^2(x,t) dx - \psi_6 d_z^2(t), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \alpha \left(k_1 + \frac{P(0)}{2}\right) - \mu L k_1^2, \\ \psi_2 &= k_2 + \frac{\varepsilon L}{2} - \alpha m - \frac{1}{2} - \mu L k_2^2, \\ \psi_3 &= \frac{P(0)}{2} \left(\frac{\varepsilon L}{\rho} - \alpha\right), \\ \psi_4 &= \frac{\varepsilon}{2} - \rho_1^2, \\ \psi_5 &= \frac{1}{2}\big(\varepsilon g m_p - L^2 \rho_0^2\big), \\ \psi_6 &= \gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha+1). \end{aligned} \tag{33}$$

The function $W(x,t)$ is negative definite provided (30), (22), and

$$\gamma > \sqrt{(\alpha+1)/2}, \qquad \varepsilon > 2\rho_1^2. \tag{34}$$

The result is summarized in the following Theorem.

*Theorem 1:* Consider the system (14)–(16), with initial conditions $w(x,0) \in H^2$ and $u(x,0) \in H^1$. Let $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\rho_0 > 0$, $\rho_1 > 0$, $\mu > 0$ satisfy the inequalities (22), (30), and (34). Then, the full-state feedback $\mathcal{H}_\infty$ controller (19) asymptotically stabilizes the disturbance-free system (14) and attenuates the disturbances $d_z(t) \in L_2(0,\infty)$.

Supporting numerical results are presented in next Section.

## IV. SIMULATION RESULTS

We ran simulations in the dynamic model of the laboratory 3D crane manufactured by Inteco®. The mass of the rope is $m = 0.25\,\text{kg}$, the mass of the payload is $m_p = 0.5\,\text{kg}$,

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

the length of the rope is $L = 1.0\,\mathrm{m}$, and the cable density is $\rho = 0.082$ kg/m. We set the following initial conditions:

$$w(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x/L). \tag{35}$$

The PDE (14) was discretized in the spatial variable $x$ by uniformly splitting the segment $[0, L]$ into $N = 30$ mesh points. We used the Runge-Kutta algorithm [16] in *Matlab/Simulink*® to solve the $N$ differential equations. The time step was $1 \times 10^{-3}$ s. The gains for the $\mathcal{H}_\infty$ boundary controller (19) were $k_1 = 50$, $k_2 = 20$, and $\gamma = 2$ chosen arbitrarily but according to conditions of Theorem 1.

We ran two simulations: for the unperturbed case (i.e., $d_z(t) = 0$ for all $t \geq 0$) and for the perturbed case where the following disturbance was injected to the boundary input:

$$d_z(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t/4). \tag{36}$$

The results of the former are given in Fig. 2 and Fig. 3, and the latter are shown from Fig. 4 to Fig. 7.

Figure 2 shows the spatial-temporal response of the closed-loop system (14)–(16), (19), where asymptotical stabilization of the string equation (14) is corroborated. Figure 3(*a*) presents an underdamped time response at the end of the string, where it is shown the stabilization of the load with an overshoot of 0.05 m. Figure 3(*b*) displays the control input signal, which present high-frequency oscillations during the transient time. Here, we assume that $u(t)$ is proportional to $\tau(t)$.

Figure 4 shows the spatial-temporal response of the closed-loop system under the applied disturbance signal (36). From this figure, it is evident that the trajectories remain uniformly bounded. In Figure 5(*a*), it is clear that load at the end of the rope remains also bounded, but with an oscillation level less than 0.1 rad. Figure 5(*b*) displays the control input signal, which also presents an underdamping response. Figure 6 shows a boundedness response of the closed-loop systems under extremal conditions, in which we assume the presence of a constant disturbance $d_z(t) = 5$ that can be seen as the effect of the wind on the load attached to the rope. These results are consistent with the presented theory. We finally run simulations under disturbances at the end of the rope, that is, boundary condition (16) becomes

$$m_p w_{tt}(L,t) = -P(L)w_x(L,t) + \frac{1}{4}\sin(\pi t/4). \tag{37}$$

The result of Figure 7 shows the stability of the closed-loop system under unmatched disturbances that deserve future analysis. The correct tuning rule is another problem that deserves further investigation to have a desirable transient response in the framework of distributed parameter systems.

## V. CONCLUSIONS

This study set out the solution to the $\mathcal{H}_\infty$ boundary control to stabilize the flexible cable of a gantry crane. The proposed controller ensured the asymptotical stabilization of the closed-loop system while the perturbed system remained uniformly bounded. Simulation results, made in a dynamic model of a laboratory crane prototype, corroborated the theoretical results. Also, the contribution of this research has been to confirm the $\mathcal{H}_\infty$ control problem solution to a system governed by a PDE [17]. The study also suggests the ISS analysis as an open topic for distributed parameter systems. Although the study was limited to a 1-D PDE, the results to a 2-D or 3-D cases require further investigation. The output-feedback case is also reserved for future research.

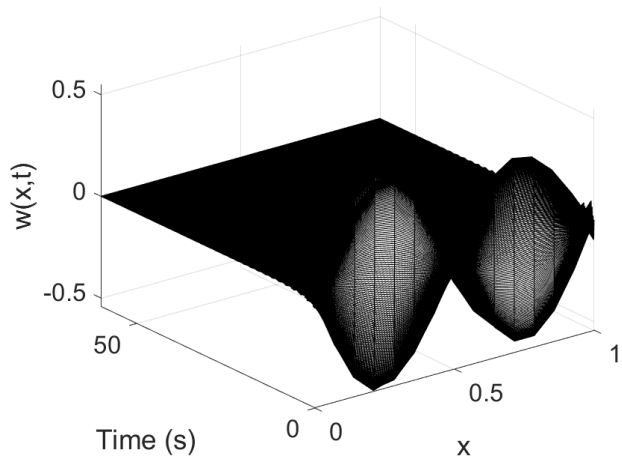



Fig. 2. Spatial-temporal response of the closed-loop system for the perturbed-free case.

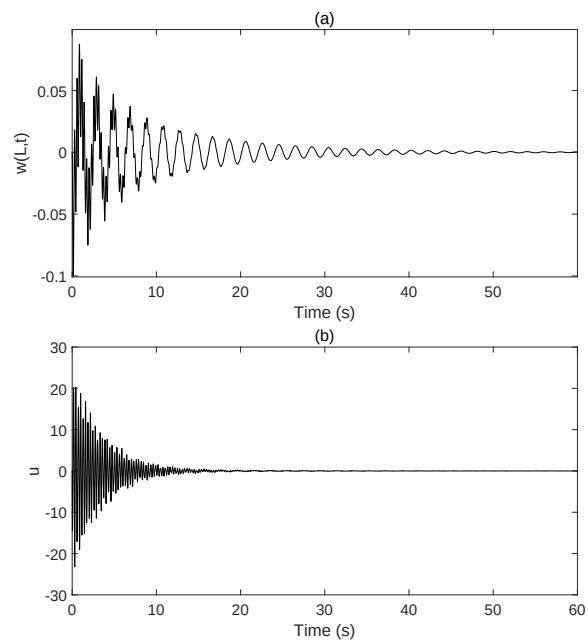



Fig. 3. Time response of the boundary condition and control input response for the perturbed-free case.

## REFERENCES

[1] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*. Long Grove: Waveland Press, Inc., 2010.

[2] C. Rahn, *Mechatronic Control of Distributed Noise and Vibration: A Lyapunov Approach*. London: Springer, 2001.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

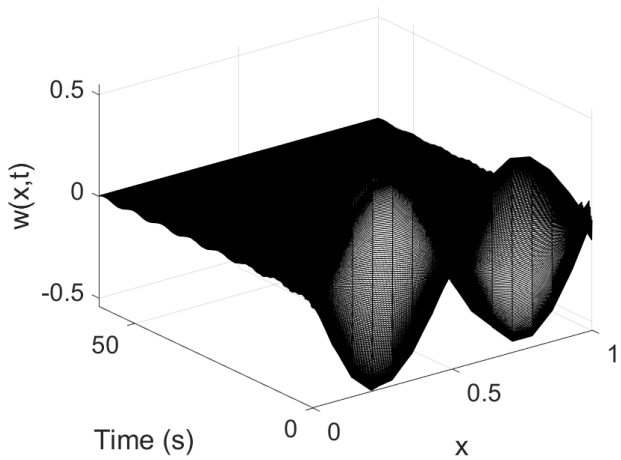



Fig. 4. Spatial-temporal responses of the closed-loop system for the perturbed case.

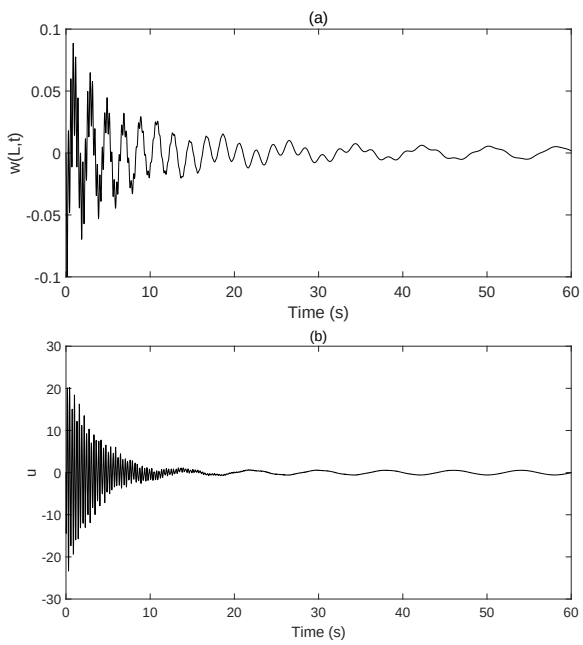



Fig. 5. Time response of the boundary condition and control input response for the perturbed case.

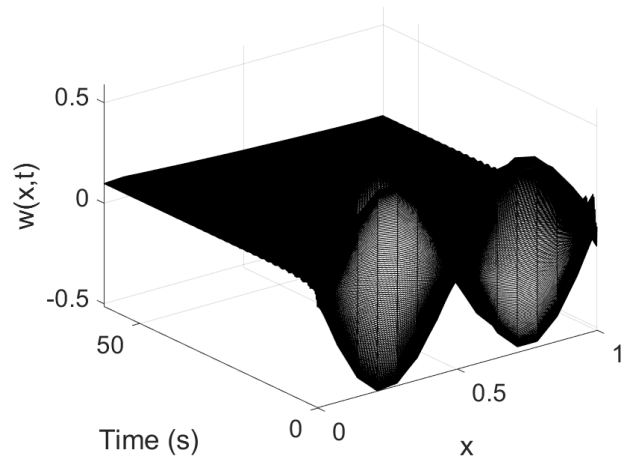



Fig. 6. Spatial-temporal responses of the closed-loop system for a constant perturbation.

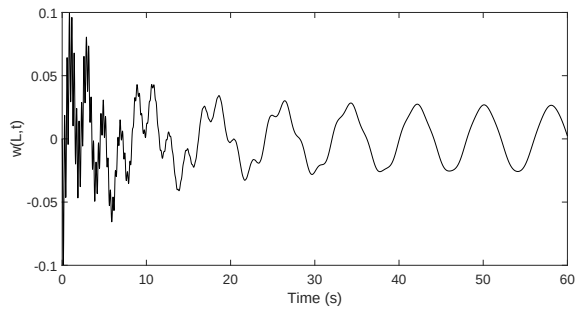



Fig. 7. Time response of the closed-loop system applying disturbances in both boundary conditions.

[3] S. Joshi and C. Rahn, "Position control of a flexible cable gantry crane: Theory and experiment," in *Proc. of the American Control Conference*, Seattle, USA, 1995, pp. 2820–2824.

[4] B. d'Andréa Novel and J. Coron, "Exponential stabilization of an overhead crane with flexible cable via a back-stepping approach," *Automatica*, vol. 36, pp. 587–593, 2000.

[5] D. Stürzer, A. Arnold, and A. Kugi, "Closed-loop stability analysis of a gantry crane with heavy chain and payload," *International Journal of Control*, vol. 91, no. 8, pp. 1931–1943, 2018.

[6] A. Elharfi, "Exponential stabilization and motion planning of an overhead crane system," *Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 34, pp. 1299–1321, 2017.

[7] J. Wang and M. Krstic, "Boundary control of coupled hyperbolic PDEs for two-dimensional vibration suppression of a deep-sea construction vessel," in *Proc. of the American Control Conference*, Denver, USA, 2020, pp. 1–6.

[8] I. Karafyllis and M. Krstic, "Small-gain stability analysis of certain hyperbolic–parabolic PDE loops," *Systems & Control Letters*, vol. 118, pp. 52–61, 2018.

[9] A. Mironchenko and F. Wirth, "Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 6, pp. 1692–1707, 2018.

[10] E. Fridman and Y. Orlov, "An LMI approach to $H_\infty$ boundary control of semilinear parabolic and hyperbolic systems," *Automatica*, vol. 45, pp. 2060–2066, 2009.

[11] B. van Keulen, *$H_\infty$-Control for Distributed Parameter Systems: A State-Space Approach*. Boston: Birkhäuser, 1993.

[12] Y. Orlov, *Nonsmooth Lyapunov Analysis in Finite and Infinite Dimensions*. London: Springer, 2020.

[13] R. Curtain and H. Zwart, *Introduction to Infinite-Dimensional Systems Theory: A State-Space Approach*. New York: Springer, 2020.

[14] T. Wang, "Stability in abstract functional differential equations. Part II. Applications," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 186, pp. 835–861, 1994.

[15] R. Verdés, L. Aguilar, A. Ferreira, and J. Andrade, "Robust positioning control law for a 3D underactuated crane system," *IFAC PapersOnLine*, vol. 51, no. 13, pp. 450–455, 2018.

[16] J. Butcher, "A history of Runge-Kutta methods," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 20, pp. 247–260, 1996.

[17] Y. Orlov and L. Aguilar, *Advanced $H_\infty$ Control: Towards Nonsmooth Theory and Applications*. New York: Birkhauser, 2014.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Tuning of a SNF tracking controller using genetic algorithms

Orlando Jaime-Torres*, Eddie Clemente*, M. C. Rodríguez-Liñán†, Marlen Meza-Sanchez§
* Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada
eclemente@ite.edu.mx, orlando@ite.edu.mx
†CONACYT/I.T. Ensenada, mcrodriguez@conacyt.mx
§marlen.meza.sanchez@gmail.com

***Abstract*—This work proposes the use of Genetic Algorithms for the tuning procedure of a sector-nonlinear-function-based controller applied to first-order dynamical systems. Specifically, the constructed controller under study is based on a hyperbolic sine function, and the tracking velocity task is addressed. The goal is to optimize the search of the controller's gains, such that they guarantee tracking of the reference given a predefined settling time. Simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the gain selection method.**

## I. Introduction

Sector nonlinear function (SNF) based control was first proposed by Meza et al. in [1] as an alternative to classical P and PI controllers for First-Order Dynamical Systems (FO-DS). The SNF controllers stem from the results in [2], where the analytic behavior-based control framework is employed for the design of controllers for tracking under constrained velocity applications. The analytic behavior-based control methodology combines Genetic Programming (GP) and Control Theory (CT) to develop controllers for a given dynamical system. The method has been demonstrated in [2] and [3], for bounded velocity in second order dynamical systems, and for tracking control in nonholonomic wheeled mobile robots, respectively.

The SNF-based family of controllers combine the inverse dynamics of the plant with a nonlinear function defined in a sector of the Cartesian plane, within quadrants I and III. In particular, in this work we are concerned with SNFs in sector $[0, \infty]$. Due to their construction, these nonlinear functions are monotonically increasing, odd, and passive. These features give the SNF-based family of controllers interesting properties in terms of rate of convergence, specially when compared against classical linear controllers, like the PID and its variants. In [1], the authors demonstrated that SNF-based controllers are globally asymptotically stable, with and without an integral action. Illustrative examples of this type of controllers are provided, along with an insight into their tuning based on a given saturation level and a selected operation range. However, at this moment, there is not an analytical methodology for the selection of the controllers' parameters. In this work we propose the use of Genetic Algorithms (GA) to tune a particular SNF controller for the satisfaction of tracking tasks in a first order dynamical system. Previously, Genetic Algorithms have been effectively used in control tuning. For example, in [4] a multi-objective non-dominated sorting genetic algorithm-II is used to tune up to nine parameters in three PID controllers which are conjointly used to control a double-pendulum gantry-crane system. In [5], three controllers: a PID, a nonlinear back-stepping, and a gain-scheduling PID, are used in a quadrotor to control its altitude, attitude, heading and position; all three controllers are tuned using a GA achieving stability and wind disturbance rejection. PID tuning using GAs is presented in [6] to optimize glucose monitoring and insulin delivery in an artificial pancreas. A constrained GA is used in [7] to tune an MPC type controller for a doubly fed induction generator; the GA finds proper weighing matrices such that control limitations are satisfied. In [8], modified GAs are used to simultaneously tune phase and gain settings for damping controllers aimed at power systems. Pongfai and Assawinchaichote in [9] propose a self-tunning algorithm that combines Neural Networks (NN) and Genetic Algorithms for a PID controller applied to a brushed DC motor. GA and Particle Swarm Optimization are compared in [10] for the optimize tuning of a PID controller gains. A GA is used in [11] to tune a fractional order sliding mode controller applied to a doubly fed induction generator for wind farms. Effectiveness of the solution is evidenced through simulations comparing it to vector control, feedback linearization sliding mode control and high-order sliding mode control.

First order systems are of primary importance in varied research areas, ranging from robotics to telecommunications, from chemistry to sociology, [12]. In particular, in robotics they describe the kinematic motion of rigid bodies [13]; they are used in collaborative robotics during consensus and formation tasks [14]. They also appear in humanoid robotics, when modelling walking patterns, see for instance the Divergent Component of Movement, or DCM, in bipedal walking over uneven terrain [15], [16].

The proposal in this work is to use a GA to find appropriate gains for a SNF-based controller, according to some design objective. In particular, the focus is on a SNF controller defined by a hyperbolic sine function; we are interested in choosing a gain $k$ such that the closed loop system reaches the steady-state at a predefined settling time $t_f$. Following [1], this means that the GA should find appropriate values for the saturation and the operation range to achieve the selected convergence time. This type of requirement is particularly useful in applications such as rendezvous problems, in which

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

two or more, possibly heterogeneous systems, need to reach a set point at the same instant, regardless of their individual dynamics. Examples of such applications include rendezvous and docking in spacecraft [17], and predefined consensus time in multi-agents systems [18].

### A. Contribution

Given a first order dynamical system, in closed loop with a SNF-based controller defined by a $\sinh$ function as in [1], a GA is employed to tune the controller's gains in order to achieve tracking in a predefined settling time.

## II. Preliminaries

**Definition 1** (Sector nonlinearity)**.** *A function $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is said to be in sector $[l, m]$ if for all $q \in \mathbb{R}$, $\phi(q)$ lies between two straight lines given as $lq$ and $mq$, where $l$ and $m$ are positive constants.*

**Remark 1.** *For a function $\phi(q)$ belonging to sector $[0, \infty]$, $q$ and $\phi(q)$ always have the same sign. This is $q\phi(q) \geq 0$ for all $q$.*

**Remark 2.** *The function $\sinh(\cdot)$ belongs to the class of functions described in Definition 1.*

Consider a first order dynamical system whose dynamics are described by the ordinary differential equation,

$$a\,\dot{q}(t) + b\,q(t) = c\,u(t), \tag{1}$$

where $q(t)$, $u(t)$ are the output and the control input, respectively, and $\dot{q}(t)$ denotes the first time-derivative of the output. The coefficients $a$, $b$, and $c$ are the system's physical parameters.

Let the error signal be given as

$$\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t), \quad \dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t), \tag{2}$$

and further assume that the control signal $u$ is given by

$$u(t) = \frac{a}{c}\left(\dot{q}_d(t) + g_{\text{SNF}}(\tilde{q}(t))\right) + \frac{b}{c}\left(q_d(t) - \tilde{q}(t)\right), \tag{3}$$

**Definition 2** (SNF-based control)**.** *A SNF-based controller is a nonlinear controller defined by* (3)*, where $g_{SNF}$ is an odd, monotonically increasing function, satisfying Definition 1 and Remark 1.*

**Theorem 1.** *The closed loop system defined by the FO-DS* (1) *and the SNF control law* (3) *is globally asymptotically stable.*

*Proof.* See [1]. ■

**Remark 3.** *In this work we are concerned with the case when*

$$g_{SNF} = sinh(k\tilde{q}). \tag{4}$$

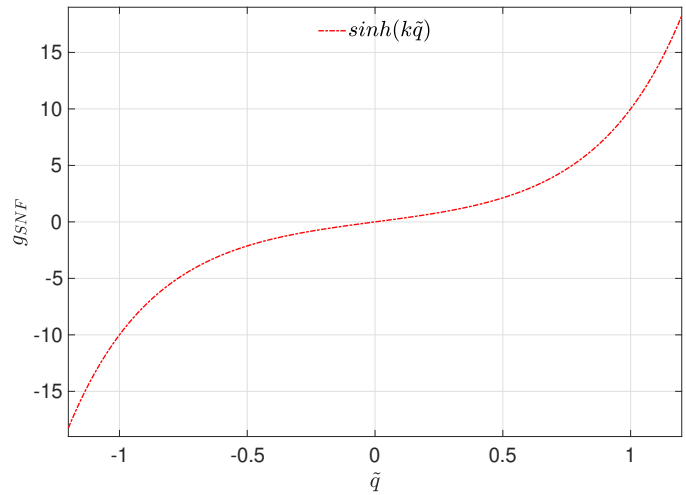



Fig. 1: Graph of sector nonlinear function $\sinh(k\tilde{q})$ exemplified with parameters $\eta = 1$ and $\gamma = 10$.

## III. Problem statement

The control objective can be described as the design of a control input variable $u(t)$ containing a continuous, monotonically increasing, sector nonlinear function (SNF) lying in sector $[0, \infty]$, defined by $\sinh(k\tilde{q}(t))$, such that the output $q(t)$ asymptotically converges to the desired reference $q_d(t)$; that is,

$$\lim_{t\to\infty} |q_d(t) - q(t)| = 0, \tag{5}$$

in a predefined amount of time $t_f$.

According to [1], the gain $k$ in $\sinh(k\tilde{q}(t))$ can be chosen in terms of a parameter $\gamma$ describing maximum allowable value of $\sinh k\tilde{q}$, and a parameter $\eta$ representing a desired operation range. This is exemplified in Fig. 1. Then, gain $k$ can be found as

$$k = \eta^{-1}\text{arsinh}\left(\frac{\gamma}{\eta}\right). \tag{6}$$

However, although $\gamma$ can be determined from the physical characteristics of the actuator, there is not a clear methodology for selecting $\eta$. Thus, in the following, a GA will be designed to select an appropriate value of $\eta$ such that the system's trajectories converge to a desired value in a given amount of time.

## IV. GA-based tuning procedure

The evolutionary computation framework DEAP (Distributed Evolutionary Algorithms in Python) was used to implement the GA applied in this work. After a tuning stage, the proposed parameters for the Genetic Algorithm are presented in the Table I.

The genotype was defined as an array of two real numbers. The first one represents the $\gamma$ value, while the second number defines the $\eta$ value. Fig. 2 depicts the optimization process which is described as follows:

1) A random uniform distribution between $[0, 30]$, for $\gamma$ and $\eta$, was employed to generate the initial population.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

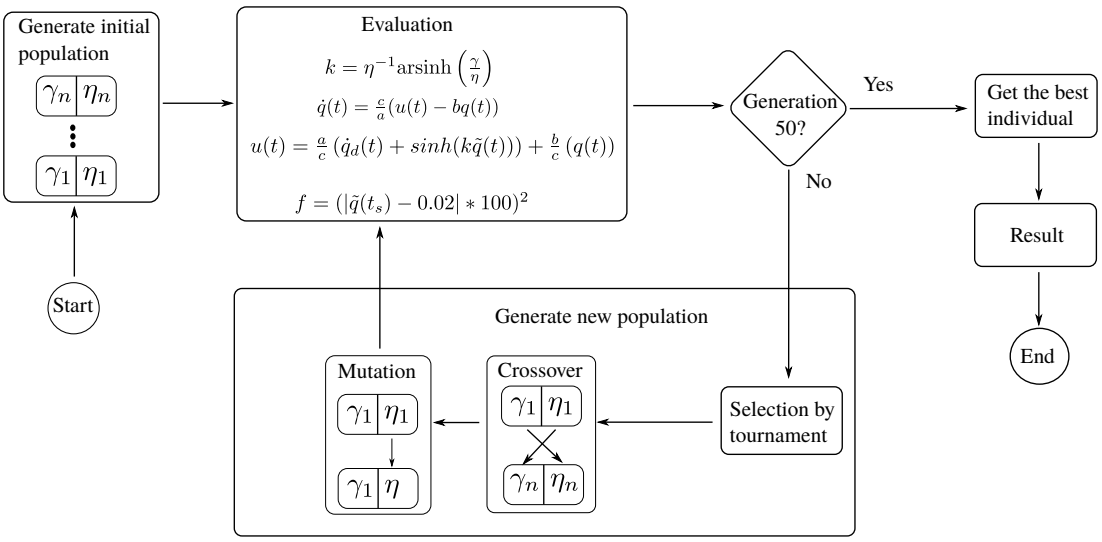



Fig. 2: Flow diagram of the tuning process using a Genetic Algorithm.

| Parameter | Value |
|---|---|
| No. of generations | 50 |
| Population | 100 |
| Crossover type | one point |
| Crossover probability | 0.5 |
| Mutation type | Gaussian |
| Mutation probability | 0.2 |
| Selection | Tournament |

TABLE I: Parameters used for the Genetic Algorithm

2) The created population is evaluated within the system:
   a) each pair of parameters is substituted in the Equation 6,
   b) the gain $k$ is computed and used to configure the controller as shown in equation 3,
   c) a simulation for $t$ seconds generates a behaviour of the tuned controllers,
   d) the performance of the resultant behavior is measured by the fitness function.
3) If the stop criterion is reached, in this case at the 50th generation, the algorithm returns the best result; otherwise it continues to generate the new population.
4) A selection of individuals for the next generation is performed by applying the tournament method.
5) For the selected individuals, if the probability of crossover is greater than $0.5$, the crossover algorithm is executed. This indicates that there is a 50% probability for an individual to be modified by the crossover operation.
6) For each new individual, if the probability of mutation is greater than $0.2$, a mutation process is computed. This indicates that for a selected individual there is a 20% chance of being modified by the mutation algorithm.
7) Given the new generation, the algorithm returns to step 2.

The fitness function is an objective function that guides the evolutionary process to the desired solution. In our case, the definition of the fitness function considers an allowable steady-state error of $2\%$, that should be achieved within a desired settling time $t_s$. Thus, the fitness function is defined as follows

$$f = (|\tilde{q}(t_s) - 0.02| * 100)^2. \tag{7}$$

Then, the GA searches, in a implicit way, the argument $\tilde{q}(t_s)$ in the interval $\tilde{q}(t_s) \in (-\infty, \infty)$, that minimizes (7).

## V. Simulation results

Numerical simulations are presented to illustrate the performance of our tuning methodology. The desired reference for the tracking control problem is described by

$$q_d(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\,t\right), \tag{8}$$

$$\dot{q}_d(t) = -\frac{2\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\,t\right), \tag{9}$$

with the parameters of the system defined as $a = 1.0$, $b = 4.682$ and $c = 8.663$. The initial condition was established at $q(0) = 10$ units. In order to analyse this method, four settling times were defined $t = \{1,\, 2,\, 4.5,\, 9\}\, s$, see Table II. The simulation was repeated 30 times for each desired convergence time, to show in an statistical way, that the best value founded by the GA accomplish with the required design. The Table II shows the found gain $k$ for each settling time, together with its respective standard deviation.

Fig. 3 shows the average fitness and their standard deviation values attained by the GA over 50 generations, with 30 runs for each of the chosen settling times, that is a total of 120 runs. The best fitness values are represented in red, average values

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

| **Settling time [s]** | $k = \eta^{-1}\text{arsinh}\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)$ | **Error** |
|---|---|---|
| 1 | 3.5544 $\pm 0.0083$ | -0.020020 $\pm 1.98 * 10^{-4}$ |
| 2 | 1.9987 $\pm 0.0015$ | -0.019962 $\pm 7.3 * 10^{-5}$ |
| 4.5 | 1.0225 $\pm 0.0006$ | -0.019995 $\pm 6.5 * 10^{-5}$ |
| 9 | 0.5701 $\pm 0.0012$ | -0.020028 $\pm 2.6 * 10^{-4}$ |

TABLE II: k values found by the GA

are shown in black, and the maximum achieved values for each generation are shown in blue. Notice that the best value for the fitness was reached by the 40th generation. The range of the best fitness values is between $10^{-3}$ and $10^{-4}$ units. These values represent a small error with the 2% desired steady-state error; see third column of Table II.

The simulation results for each of the selected settling times are shown in Fig. 4. Each row of plots show the position, velocity, control signal and error obtained for each settling time. Plots 4a-4d correspond to $t_s = 1\,s$, plots 4e-4h correspond to $t_s = 2\,s$, the results for $t_s = 4.5\,s$ are presented in plots 4i-4l, and finally, plots 4m-4p show the results for $t_s = 9\,s$.

Note that for each case, the system is able to effectively track the reference in the predefined settling time, demonstrating the successful selection of the control gains, and the effectiveness of the control strategy. It is also worth mentioning that none of the cases shows overshoot in the tracking response, reaching the reference smoothly. The control signals for each settling time are presented in plots 4c, 4g, 4k and 4o. Due to the selection of the initial condition at $q(0) = 10$, the control signals saturate for a short amount of time at the beginning of the simulation; this is more evident in plots 4c and 4g, which correspond to $t_s = 1\,s$ and $t_s = 2\,s$.

## VI. Conclusions and Future Work

The present document described the use of a genetic algorithm to calculate appropriate gains for a SNF-based controller in tracking tasks under restrictions in the time of convergence. In previous works, SNF controllers have been shown to approach or improve the response achieved by PID-like controllers, however, the tuning of their gains is not obvious. To solve this, this work proposed the use of a genetic algorithm to calculate the gain of a sinh-based controller (a particular example of SNF control). Overall, the controller employed in this application is formed by the inverse dynamics of the plant plus a sinh function which, after proper tuning, achieves tracking in the predefined settling time. Several scenarios are presented for different settling times, showing that the GA is capable of properly tuning the selected SNF controller.

The present work serves to evidence the experimental application of SNF controllers in a real setting, providing a way to select their gains and obtain satisfactory results. In the future, this work will serve in the design of SNF controllers for more advanced systems, such as mobile robotics applications, humanoid robots, complex systems, etc.

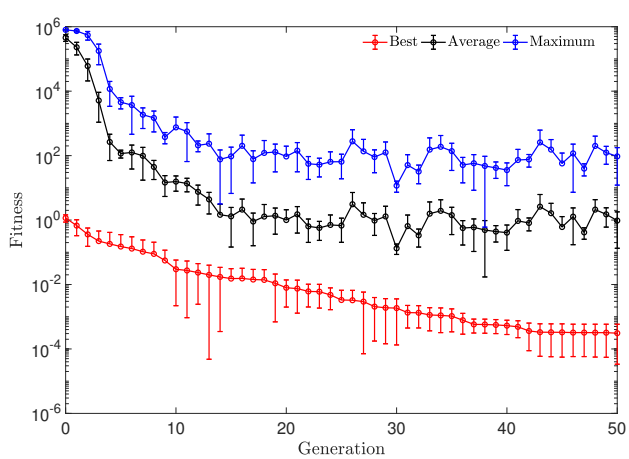



Fig. 3: Best, average and maximum fitness reached by the GA.

## References

[1] M. Meza-Sánchez, M. del Carmen Rodríguez-Liñán, and E. Clemente, "Family of controllers based on sector non-linear functions: an application for first-order dynamical systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 10, pp. 1387–1392, jul 2020.

[2] O. Peñaloza-Mejía, E. Clemente, M. Meza-Sánchez, and C. B. Pérez, "Evolving behaviors for bounded-flow tracking control of second-order dynamical systems," *Eng Appl Artif Intel*, vol. 78, pp. 12 – 27, 2019.

[3] M. Meza-Sánchez, E. Clemente, M. Rodríguez-Liñán, and G. Olague, "Synthetic-analytic behavior-based control framework: Constraining velocity in tracking for nonholonomic wheeled mobile robots," *Information Sciences*, vol. 501, pp. 436–459, oct 2019.

[4] M. H. Abdel-razak, A. A. Ata, K. T. Mohamed, and E. H. Haraz, "Proportional–integral-derivative controller with inlet derivative filter fine-tuning of a double-pendulum gantry crane system by a multi-objective genetic algorithm," *Engineering Optimization*, vol. 52, no. 3, pp. 527–548, may 2019.

[5] H. Loubar, R. Z. Boushaki, Y. Aribi, A. A. Said, S. Dorbane, and K. Abdellah, "Modeling and simulation of three control techniques for UAV quadrotor," in *2019 4th International Conference on Power Electronics and their Applications (ICPEA)*. IEEE, sep 2019.

[6] N. Balakrishnan and K. Nisi, "A deep analysis on optimization techniques for appropriate PID tuning to incline efficient artificial pancreas," *Neural Computing and Applications*, vol. 32, no. 12, pp. 7587–7596, aug 2018.

[7] L. L. Rodrigues, A. S. Potts, O. A. C. Vilcanqui, and A. J. S. Filho, "Tuning a model predictive controller for doubly fed induction generator employing a constrained genetic algorithm," *IET Electric Power Applications*, vol. 13, pp. 812–819(7), June 2019.

[8] A. L. B. Do Bomfim, G. N. Taranto, and D. M. Falcao, "Simultaneous tuning of power system damping controllers using genetic algorithms," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 163–169, 2000.

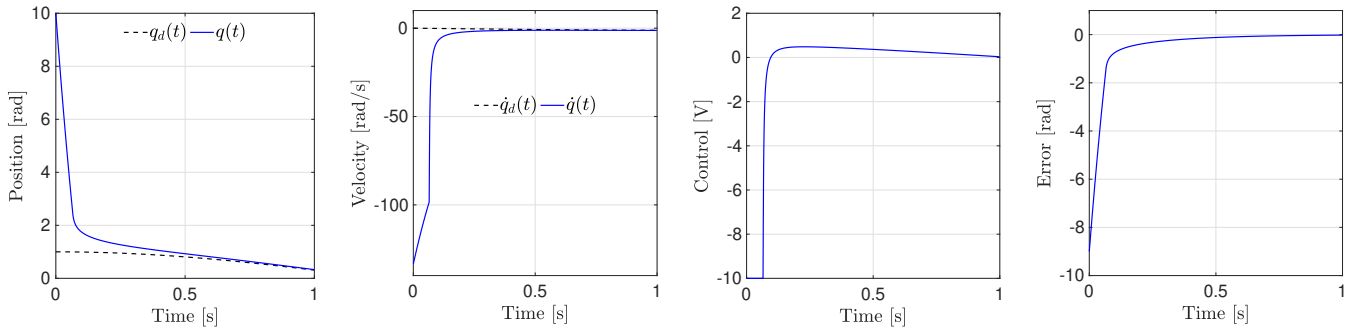
[9] J. Pongfai and W. Assawinchaichote, "Self-tuning pid parameters using nn-ga for brush dc motor control system," in *2017 14th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*, 2017, pp. 111–114.

[10] S. M. H. Mousakazemi, "Computational effort comparison of genetic algorithm and particle swarm optimization algorithms for the proportional–integral–derivative controller tuning of a pressurized water nuclear reactor," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 136, p. 107019, 2020.

[11] P. Li, L. Xiong, Z. Wang, M. Ma, and J. Wang, "Fractional-order sliding mode control for damping of subsynchronous control interaction in dfig-based wind farms," *Wind Energy*, vol. 23, no. 3, pp. 749–762, 2020.

[12] E. A. Bender, *Introduction to Mathematical Modelling*. Dover Publications Inc., 2000. [Online]. Available: https://www.ebook.de/de/product/3344684/edward_a_bender_introduction_to_mathematical_modelling.html

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) Position with $t_s = 1$



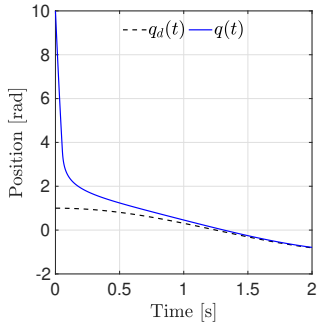

(b) Velocity with $t_s = 1$



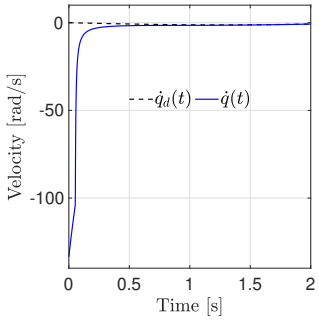

(c) Control with $t_s = 1$



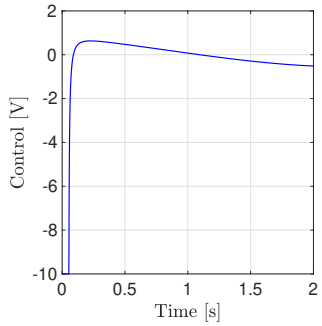

(d) Error with $t_s = 1$



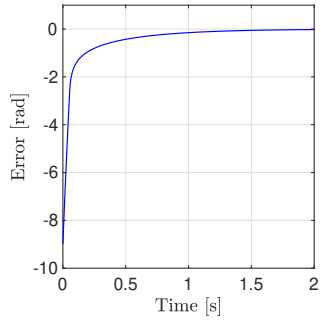

(e) Position with $t_s = 2$



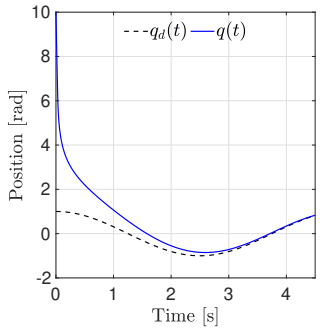

(f) Velocity with $t_s = 2$



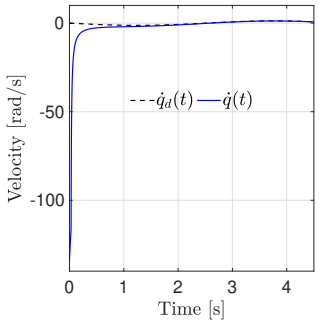

(g) Control with $t_s = 2$



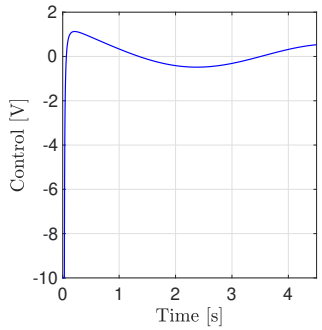

(h) Error with $t_s = 2$



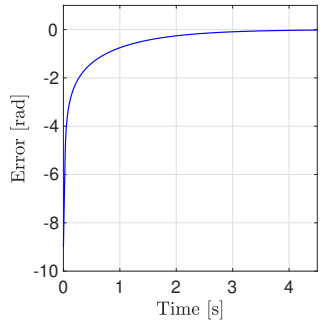

(i) Position with $t_s = 4.5$



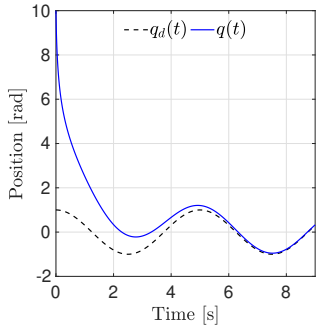

(j) Velocity with $t_s = 4.5$



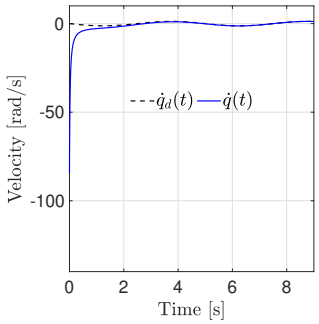

(k) Control with $t_s = 4.5$



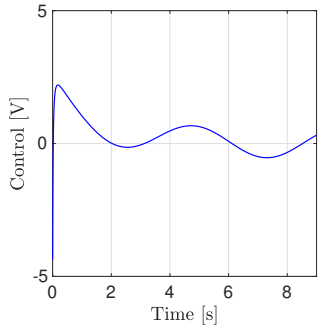

(l) Error with $t_s = 4.5$



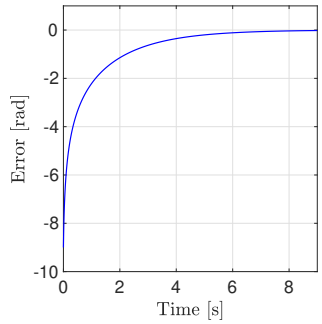

(m) Position with $t_s = 9$




(n) Velocity with $t_s = 9$




(o) Control with $t_s = 9$




(p) Error with $t_s = 9$

Fig. 4: Simulation results of the tracking task using the tuned gains from the GA.

[13] S. G. Tzafestas, "2 - mobile robot kinematics," in *Introduction to Mobile Robot Control*, S. G. Tzafestas, Ed. Oxford: Elsevier, 2014, pp. 429–478.

[14] V. Gazi and K. M. Passino, "Swarms of single integrator agents," in *Swarm Stability and Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 29–73.

[15] J. Englsberger, C. Ott, and A. Albu-Schaffer, "Three-dimensional bipedal walking control using divergent component of motion," in *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, nov 2013.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

[16] M. A. Hopkins, D. W. Hong, and A. Leonessa, "Humanoid locomotion on uneven terrain using the time-varying divergent component of motion," in *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, nov 2014.

[17] B. Jiang, Q. Hu, and M. I. Friswell, "Fixed-time rendezvous control of spacecraft with a tumbling target under loss of actuator effectiveness," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 52, no. 4, pp. 1576–1586, aug 2016.

[18] Y. Liu, Y. Zhao, W. Ren, and G. Chen, "Appointed-time consensus: Accurate and practical designs," *Automatica*, vol. 89, pp. 425–429, mar 2018.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# CAPÍTULO 9

## *Control 2*

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# On the implementation of a SNF velocity controller for DC motors with low resolution encoders

Luis Monay-Arredondo*, Marlen Meza-Sánchez§, Eddie Clemente‡,
M. C. Rodríguez-Liñán†, Rodrigo Villalvazo-Covián‡, Juan Manuel Nuñez-Alfonso¶
* Tecnológico Nacional de México/I.T. Tijuana, luismonay@gmail.com
§marlen.meza.sanchez@gmail.com
‡ Tecnológico Nacional de México/I.T. Ensenada, eclemente@ite.edu.mx, rodri.villalvazo3@gmail.com
† CONACYT-TecNM/I.T. Ensenada, mcrodriguez@conacyt.mx
¶Universidad Nacional Autónoma de México, jnunez@astro.unam.mx

***Abstract*—In this work, the systematic accuracy error in velocity estimation induced by low resolution encoders in the velocity control of DC motors is addressed. For this aim, the construction of a real-time embedded control system and the comparison of the M and T-methods to provide accurate velocity estimations is presented. The built system is then validated through the implementation of a novelty SNF velocity controller in a real DC motor. Experimental results addressing the tracking control task, using the constructed testbed, demonstrate the capabilities of the estimation methods.**

## I. Introduction

The development of velocity controllers for DC motors is a highly studied control problem. The literature reveals an extensive research on the control of DC motors considering that they are widely used as actuators in robotics and electromechanical systems. However, the extension of the control designs towards a practical implementation is not straightforward. For the velocity control problem, the classical description of a DC motor, neglecting the inductance of armature, is a first-order dynamical system (FO-DS) [1]. The velocity measurement for feedback purposes are often done with a position encoder, or using a tachometer. However, the use high resolution encoders increases the cost of the application; tachometers on the other hand are more expensive instruments. There are three frequently used methods for estimations using encoders: the *T*, *M* and *T/M* [2] methods. From these, several studies and methodologies have emerged to address common problems in velocity estimation using encoders (see e.g. the works in [3], [4], [5], [6], [7]).

The implementation of velocity controllers involves the use of such estimations as feedback. Thus, the construction of real-time testbeds is required, and the systematic accuracy error in velocity estimation is a concern. The use of observers can also be considered. The disadvantage of using velocity observers is the requirement of the numerical execution of a dynamical model on par with the controller; hence, there is an increase in computational load. The accuracy of the time integration process (step size) is also an issue. In addition, the design of an observer requires accurate knowledge of the dynamical model; this is of great importance and thus, a tuning stage is required. The use of algorithms using only encoder counts for velocity estimation reduces the computational load in implementation but requires further design adequacy. A velocity estimator that considers both the rising and falling of each pulse of the encoder is outlined in [8]. There, a Cartesian impedance control is implemented as a testing setup of the proposal using a commercial testbed that operates with FPGAs. In [9], an Arduino® based setup is built for velocity and position estimation from the encoder input. The Arduino® is just in charge of the estimations from data coming from a 2500 ppr (pulses per revolution) incremental encoder in a permanent magnet synchronous motor. The controller is executed apart, in a high-end DS1103 PPC Controller Board. In [10], a specialised DSP commercial system is used for testing speed estimation methodologies: pulse count (*M* method), elapsed time (*T* method), and a particular class of tachometer-based methods.

This work considers the practical issues of implementing velocity controllers for a DC motor in a low-cost real-time embedded system while dealing with the problem of low encoder resolution. For this aim, the velocity estimations using the *M* and *T* methods are tested in hardware using an encoder with mid-to-low resolution. The aspects of computational load, real-time execution, and implementation issues are under study. Both algorithms are tested for the velocity tracking problem applying a novel SNF controller based on a hyperbolic cosine function [11]. The estimation algorithms are executed by clock input and external interruptions generated by an external crystal clock, and the rising edges of the encoder input, respectively. The controller is sequentially executed in a loop given a fixed sampling time.

The outline of this document is as follows. The problem statement is presented in Section II. The description of the *M* and *T* methods under study is detailed in Section III. Sections IV and V are devoted to the design of the real-time embedded system for testing, and to the brief description of the applied SNF controller and its stability analysis for the velocity tracking in the DC motor. The experimental results using three different low resolutions for the DC motor's encoder are presented in Section VI. Finally, the conclusions and future work are discussed in Section VII.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

## II. Problem statement

For the velocity control task, consider the conventional actuator denoted as an armature-controlled DC motor modeled as a first-order dynamical system, by neglecting the armature inductance. The aim of this task can be defined as

$$\lim_{t\to\infty} |v - v_d| = 0, \tag{1}$$

where $v \in \mathbf{R}$ is the motor's shaft velocity and $v_d \in \mathbf{R}$ is the desired velocity. The objective of this work is the development and implementation of velocity controllers for a DC Motor where velocity estimations based in the *M* and *T* methods are used to address the low resolution encoder problem.

## III. Velocity estimation

The algorithms under study can be related to the concept of *dirty* derivative widely used in engineering applications. The operational principle for velocity estimation is the division of the distance travelled over elapsed time. Let us consider a quadrature encoder coupled to the motor's shaft, and the conventional use of the *M* method to compute its speed $v$. This is,

$$\frac{p}{t_s}\frac{\text{pulses}}{\text{s}} \times \frac{2\pi}{E_{\text{res}}}\frac{\text{rad}}{\text{pulses}} = v\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \tag{2}$$

where $p$ is the count encoder's rising edges during a sampling time $t_s$, and $E_{\text{res}}$ is the encoder resolution in pulses$\times$revolution (ppr). Despite the simplicity of the implementation, the accuracy in the velocity estimation relies on the resolution of the encoder $E_{\text{res}}$, and on the accuracy of measuring the elapsed time interval $t_s$. Hence, the *M* method for velocity estimation is not very accurate with short sampling periods and/or with low-resolution encoders.

In this work, the encoder's low resolution problem is addressed by estimating the velocity of the motor through the time $T$ elapsed between rising edges of two consecutive pulses; this is also called the *T* method. Thus, the computation of an estimated velocity $v$ is set as

$$\frac{1}{T}\frac{\text{pulses}}{\text{s}} \times \frac{2\pi}{E_{\text{res}}}\frac{\text{rad}}{\text{pulses}} = v\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \tag{3}$$

where once again $E_{\text{res}}$ corresponds to the encoder resolution in pulses$\times$revolution. The graphical description of the *T* method is shown in Fig. 1.

Analogously, for the velocity control problem (1), the desired velocity $v_d$ can be expressed in terms of a desired number of pulses $p_d$ or a desired elapsed time $T_d$ using the corresponding relation in (2) or (3). In the case of the $M$ method, the computed desired pulses $p_d$ would require rounding down the value to the nearest integer.

## IV. Design of the real-time embedded control system

The DC motor used in this study is a DC geared motor driven by an Arduino® Mega2560 board, as shown in Fig. 2. The schematic and the full configuration of the RT embedded control system are presented in Fig. 3, and Table I, respectively. Custom functions have been implemented rather than

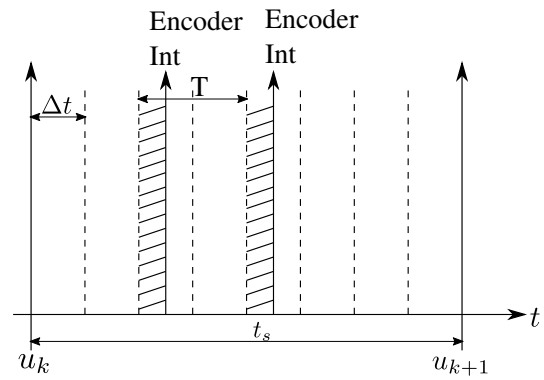



Fig. 1: Velocity estimation obtained by computing the elapsed time $T$ between the rising edge of two consecutive pulses of the asynchronous interruptions generated by encoder.

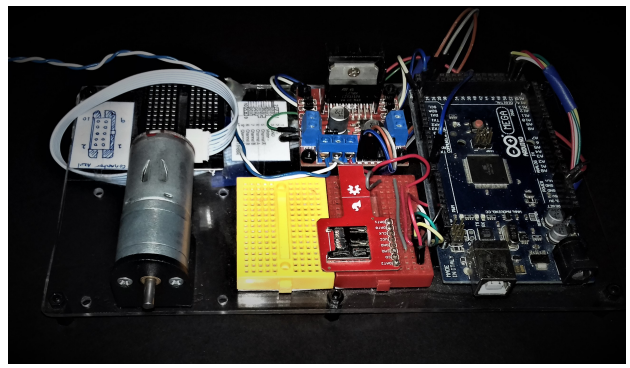


Fig. 2: Experimental testbed using a DC Motor with a two channel Hall effect encoder.

using the predefined ones offered by the Arduino® IDE; the only external library used is for data logging purposes into a MicroSD card. The Arduino® Mega2560 is a general purpose microcontroller based board not specifically designed for real-time applications. It operates as a sequential execution layout with a priority-based system of interruptions. The accuracy and resolution of the time variables are based on the external 16 MHz clock crystal (denoted as the the clock cycle in Table I).

The velocity estimation of the shaft is done with measurements from channels A and B of the encoder using an external interruption pin of the highest priority (INT0), and a digital input, respectively. The external interruption has been configured to be activated by the encoder's channel A rising edge. The implemented scheme for the velocity estimation is shown in Fig. 1, where $t_s$ is the controller's sampling time, and $\Delta_t$ is a selected resolution for the time variable $t$. Notice that the induced error by the *T* method corresponds to the time difference between the instant where the rising edge of the digital signal occurs and the resolution of the time variable $\Delta_t$. This is shown as the shaded area in Fig. 1. In practice, the time elapsed between the occurrence of the pulse and the acknowledgement of the event by the RT embedded system can be also considered as a source of error. According to

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLE I: Configuration of the RT embedded control system

| Function | Variable | Frequency (Time Period) | Description |
|---|---|---|---|
| Microcontroller | Clock cycle | 16 MHz ($6.25\times10^{-8}$ s) | External clock of the ATMega2560 connected to `XTAL1` and `XTAL2` |
| | Time $\Delta t$ | 7812.5 Hz ($128\times10^{-6}$ s) | Resolution of the time variable |
| Measurements | Channel A | – | `INT0` Asynchronous external interrupt connected to `PD0` |
| | Channel B | – | Digital input connected to `PD1` |
| Controller | Sample time $t_s$ | 24.4141 Hz ($40.96\times10^{-3}$ s) | Sampling time using `Timer2` for the applied control input |
| | PWM | 30.6372 Hz ($32.64\times10^{-3}$ s) | Generated PWM signal at `PH3(Timer4)` |
| | IN1 | – | Digital output connected to `PA0` |
| | IN2 | – | Digital output connected to `PA2` |
| H-Bridge | Voltage | 40 KHz ($2.5\times10^{-5}$ s) | Maximum supported for the L298N |

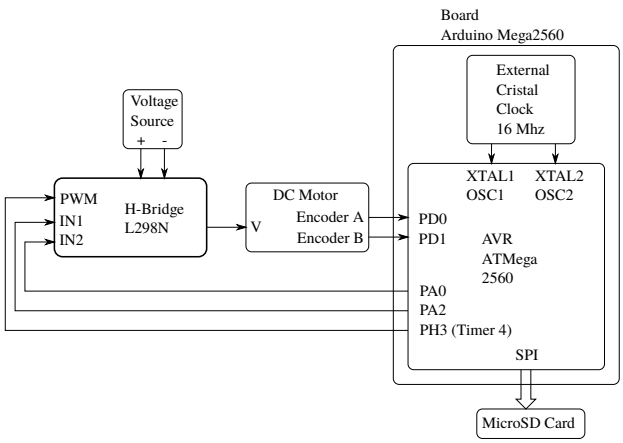



Fig. 3: Schematic of the RT Embedded Control System

the data-sheet, the ATMega 2560 requires four or five clock cycles to acknowledge the interruption. Since the computation velocity using the $T$ method relies on the measurement of the elapsed time $T$ between pulses, a further condition that at least one pulse must occur during the sampling time $t_s$ is also implemented. Otherwise, it must be considered that there is no motion and the shaft's velocity is zero.

A calibration curve for the relationship between Pulse Width Modulation (PWM) and voltage is experimentally measured. The fitting of a polynomial curve using the set of data points through the polyfit function of Matlab® is implemented. The PWM output is computed by rounding the estimated value of the obtained polynomial function to the nearest integer. This function is given as

$$\text{PWM} = \begin{cases} 0.2127u^5 - 3.1530u^4 + 17.6329u^3 & u > 0 \\ -43.3966u^2 + 53.5384u + 10.8338, & \\ 0.2470u^5 + 3.6991u^4 + 20.6152u^3 & u < 0 \\ +49.4106u^2 + 55.8145u - 11.4623, & \\ 0, & u = 0 \end{cases}.$$

For the velocity controllers, a periodic implementation with a sampling time $t_s$ (shown in Table I) is applied. Note that $t_s$ is a multiple of the time variable's resolution, $\Delta_t$. This is done by configuring the registers corresponding to the Timer2 of the AVR ATMega2560 microcontroller operating in Fast PWM mode with interruptions activated by overflow. The maximum supported frequency of the H-Bridge is higher than that of the generated PWM signal based on the Timer4 of the ATMega2560. And in turn, the operating frequency of the PWM signal is higher than the selected frequency for the application of the control input. This guarantees that the power stage of the embedded system is able to commute faster than the time period selected for the application of the voltage demanded by the controller.

## V. Synthesis of the Velocity Controller

The general form of the first order dynamical model (FO-DS) for velocity control on a DC motor is given by

$$a\,\dot{v} + b\,v = c\,u \tag{4}$$

where $u \in \mathbf{R}$ is the control input (applied voltage), and $v \in \mathbf{R}$ and $\dot{v} \in \mathbf{R}$ are the angular velocity and acceleration of the motor, respectively. Parameters $a$, $b$ and $c$ are defined as positive constants derived from the physical values of the system.

Let $v_d \in \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^1$ function denoting the desired reference velocity to be tracked, with $v_d \in \mathcal{L}_\infty$. The error velocity is then defined as $\tilde{v} = v_d - v$. A proposed control law with inverse dynamics is given as,

$$u = \frac{a}{c}\,\dot{v}_d - \frac{b}{c}\,v + k\,\frac{a}{c}\tilde{v}_{\text{snf}}, \tag{5}$$

where $\tilde{v}_{\text{snf}} = m\,\tilde{x}\cosh(m\,\tilde{x})$ is a nonlinear function that belongs to sector $[0, \infty]$; $k$ and $m$ are positive constant gains (see [11] for further details).

*Theorem 1:* The FO-DS in (4) modeling the DC motor with constant parameters $a$, $b$ and $c$, and driven by the control input $v$ given by (5) with $k > 0$, $m > 0$, is globally asymptotically stable.

*Proof.* The closed-loop dynamics is given by the first-order nonlinear system

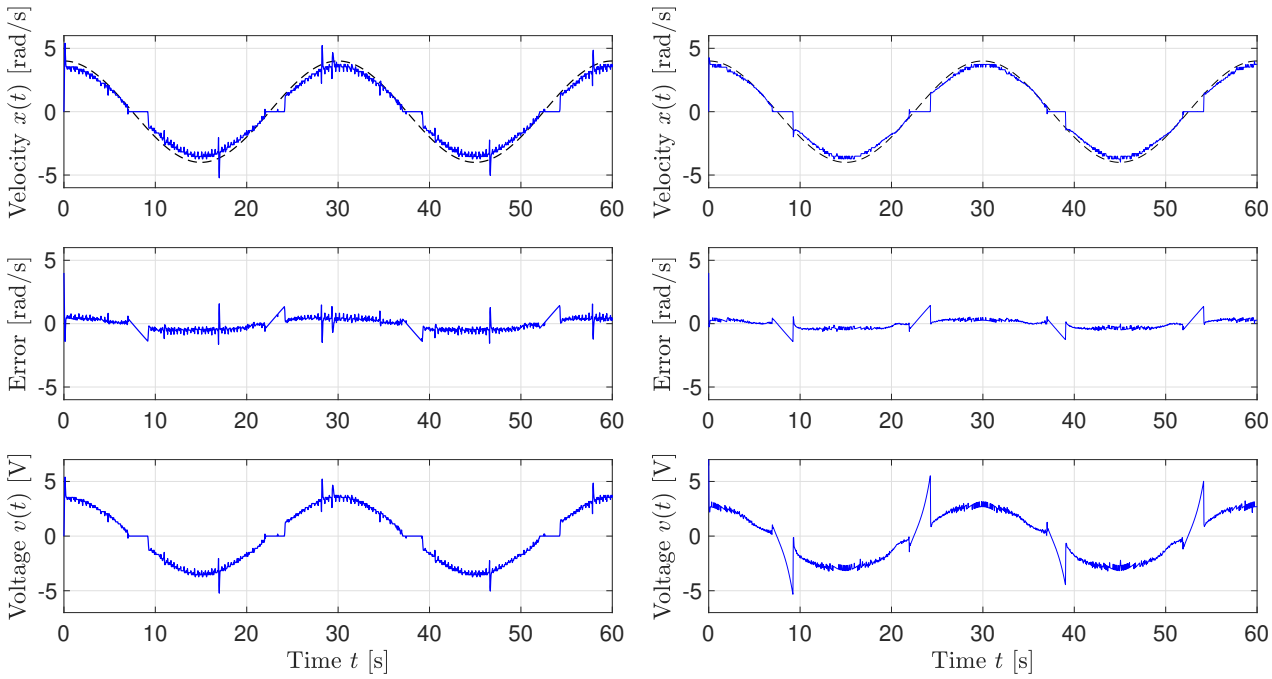
$$\dot{\tilde{x}} = -k\,m\,\tilde{x}\cosh(m\,\tilde{x}). \tag{6}$$

Applying the classic quadratic Lyapunov candidate function $V(\tilde{x}) = (1/2)\,\tilde{x}^2 > 0$ yields

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -k\,m\tilde{x}^2\cosh(m\tilde{x}) < 0, \tag{7}$$

where $k > 0$ and $m > 0$. Since the origin is the equilibrium point and the only solution that satisfies the closed-loop dynamics; thus, invoking LaSalle's invariance principle, global asymptotic stability is concluded. ■

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) M-method (b) T-method

Fig. 4: Experimental results for velocity tracking, applying the SNF controller based on a hyperbolic cosine function with full encoder resolution.

TABLE II: Model identification process parameters using the *M-method*.

| Model parameters | | | Identification process | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | Resolution | Accuracy |
| 1 | 4.682 | 8.663 | 100% | 80.99% |
| 1 | 2.023 | 2.642 | 50% | 78.03% |
| 1 | 2.399 | 1.878 | 25% | 74.97% |

## VI. Experimental validation

The constructed real-time embedded platform uses a low-cost DC geared motor with a two channel Hall effect encoder. The DC motor is an Uxcell DC 201 with a gear ratio of 34:1 and an encoder resolution of 823.1 ppr. This resolution can be considered as mid-to-low range, bearing in mind that, in average, most of the works found in the literature use resolutions in the order of the thousands. Experiments using the built velocity controllers are implemented using full, 50%, and 25% encoder resolution. The DC motor's model is obtained from measured input-output data, and its parameters are estimated using the System Identification Toolbox from Matlab®. A model identification for each selected resolution using the *M* method is realized to obtain the parameters to be used in the inverse dynamics for the velocity controller (5). The results of the identification process are summarized in Table II where a decrease in the parameters identification accuracy is observed at lower resolutions of the encoder.

The desired trajectory is set as

$$v_d(t) = 4\,\cos\left(\frac{\pi}{15}\,t\right), \tag{8}$$

and the gains of the controller are set to $k = 3.4629$ and $m = 0.7017$ for all the experiments.

### A. Full encoder resolution

This configuration uses the full resolution of the DC motor's Hall effect encoder which is given as 823.1 ppr. This value is equivalent to a resolution of 0.0076 radians or 0.4374 degrees per pulse of the encoder. The obtained results from the tracking task are shown in Fig. 4.

### B. Encoder resolution at 50%

The precision of the DC motor's angular position measurements, at 50% encoder resolution, is of approximately 0.01526 radians or 0.8747 degrees per pulse. Experimental results for the tracking task with this configuration are presented in Fig. 5.

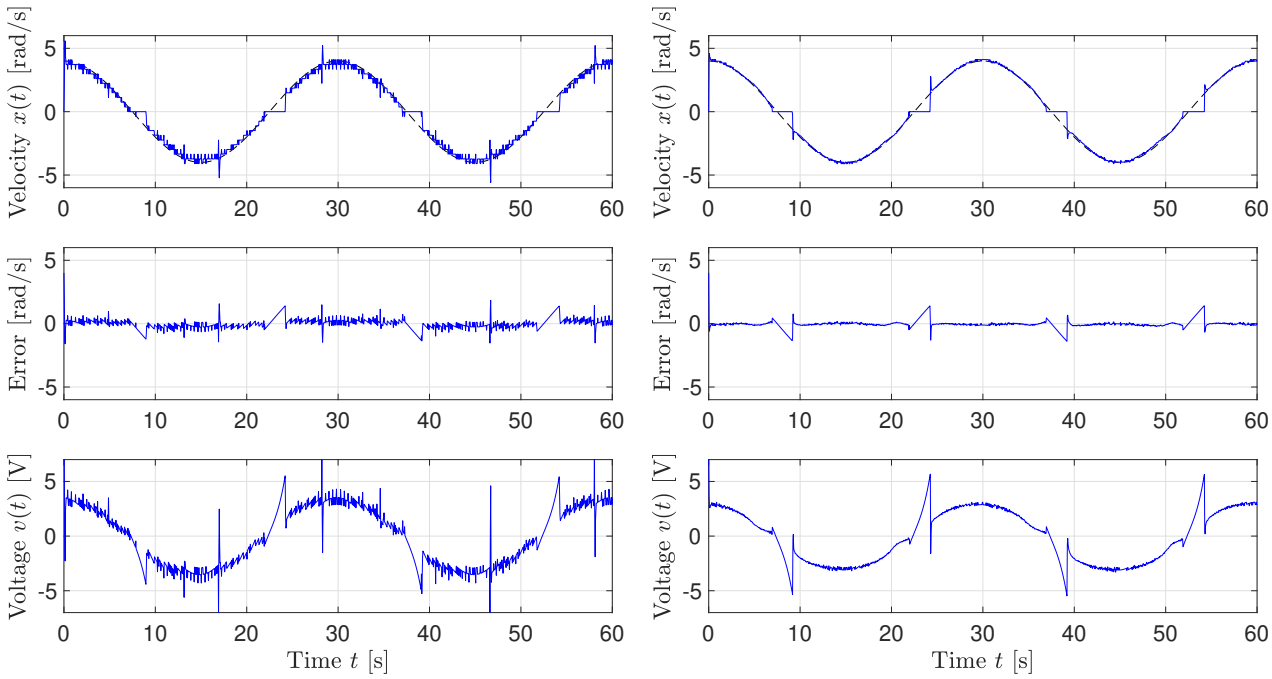
### C. Encoder resolution at 25%

For this configuration, the resolution is given approximately as 0.0305 radians (1.7495 degrees) per pulse of the encoder. Fig. 6 shows the performance of the SNF controller with the reduced resolution encoder for this setup.

### D. Discussion

The implementation of the *M* method is straightforward; it corresponds to the number of pulses within the controller's time frame $t_s$. Then, a conversion to angular velocity in rad/s is performed. In contrast, the implementation of the *T* method requires two additional conditions:

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) M-method (b) T-method

Fig. 5: Experimental results for velocity tracking, applying the SNF controller based on a hyperbolic cosine function considering 50% of full encoder resolution.

- to avoid the numerical error of dividing by zero at the start of the experiments, a conditional is implemented such that velocity is equal to zero if $T$ is zero, and
- when the velocity is zero (the shaft stops), the algorithm keeps the last computed velocity and waits for a pulse that will not arrive. Hence, the requirement that at least one pulse must occur within the sampling time $t_s$ is imposed. Otherwise, the velocity is considered to be zero, which is consistent with the traditional approach using the *M* method in (2).

Note that we have not used time or attached interruption functions from Arduino® IDE. We have configured each timer in the RT embedded control system by manipulating the registers of the ATMega2560 microcontroller. This led to a transparent execution and control of each of the control system variables of the control on the hardware.

A deadzone nonlinearity in the DC motor has been identified; this results in a lack of motion for small input voltages. In addition, a static friction seems to be present. However, the controller is capable of preserving the desired trajectory in steady state. Peak voltages are detected due the controller's attempt to overcome the nonlinearities.

The experimental results show the impact of the traditional approach of counting pulses as we reduce the resolution of the encoder. Given that the encoder has a mid-to-low resolution, the velocity estimation suffers from accuracy error even when using the full resolution. As the encoder resolution is further reduced, the velocity estimations become noisy signals.

The experiments using the *T* method show a smoother signal in the velocity estimation, with smaller accuracy error than the one from the experiments with the *M* method. On the other hand, let us consider that in order to implement this method, we have increased the computational load on the embedded system. Recall that the resolution $\Delta t$ of the time variable is critical for the accurate measurement of the elapsed time between rising edges of the encoder.

The main drawback of the *T* method is the effect of the nonlinearities while reducing the encoder resolution. A peak in velocity estimation is observed when the motion of the shaft suddenly restarts after being motionless due to the nonlinearities. This can be explained as the sudden burst of pulses in a very short amount of time.

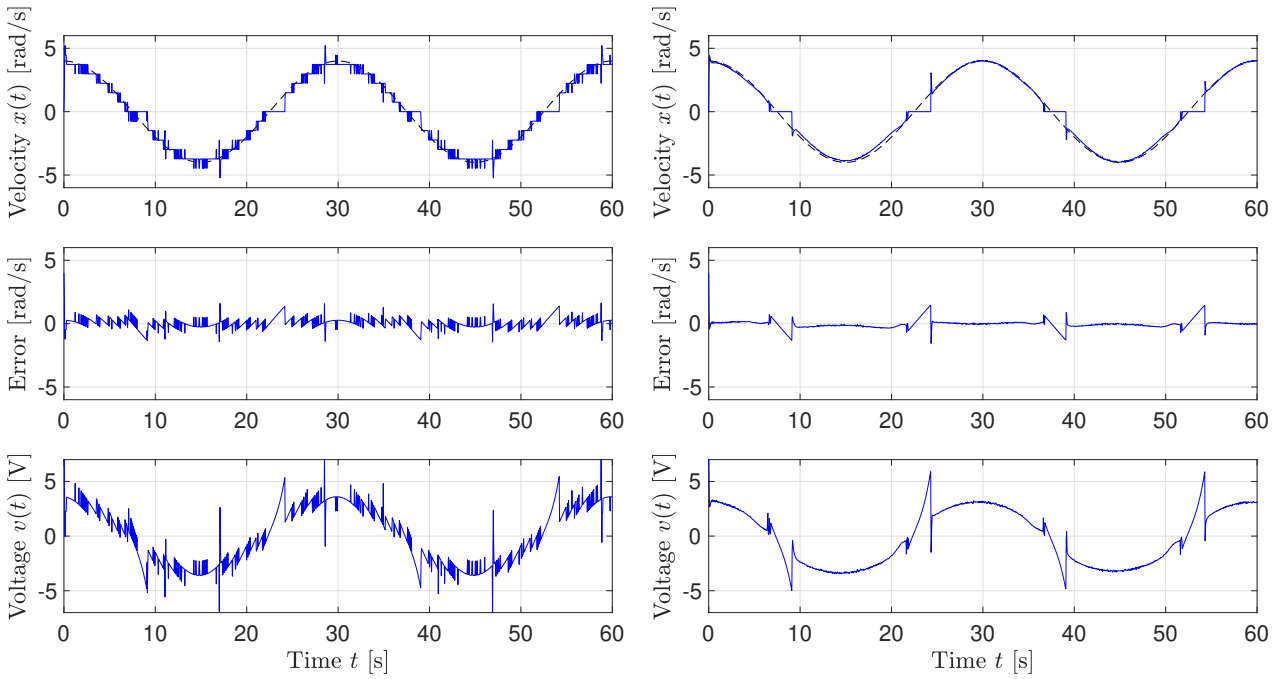
## VII. Conclusions and Future Work

An experimental validation of the systematic accuracy error induced by low resolution encoders in the velocity estimation of DC motors is presented. The frequently used *T* and *M* methods are studied in an experimental testbed. A Real-time embedded control system using a low-cost microcontroller based board has been constructed for this matter.

For the tracking task in the DC motor, a SNF controller formulated with a function that belongs to sector $[0, \infty]$, based on the hyperbolic cosine function, has been developed. The experimental results demonstrate a good performance of the SNF controller even in the presence of nonlinearities in the DC motor.

The accuracy of both estimation methods is related to the accuracy of the measurements in the time variable, and

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México




(a) M-method (b) T-method

Fig. 6: Experimental results for velocity tracking, applying the SNF controller based in a hyperbolic cosine function considering 25% of full encoder resolution.

the maximum available time resolution in the experimental testbed. Note that the maximum available resolution of the time variable is given by the minimum clock cycle that the embedded system can achieve. In this study, this is defined by the frequency of the external crystal clock connected to the microcontroller. We have validated the performance degradation of the $M$ method as the resolution of the encoder decreases and, vice versa, the accuracy of the $T$ method is evident with low encoder resolutions. Smoother signals are obtained in the velocity estimations using the $T$ method but an impact in performance has been detected in the presence of nonlinearities. Although this issue is out of the scope of this work, the interested reader is referred to the work of [12] and [13], [14], for the compensation of deadzone and static friction.

As future work, a theoretical study of the effect of the time resolution variable in the stability of the control loop and in the accuracy of the velocity estimation can be considered.

## References

[1] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 9th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 2000.

[2] T. Ohmae, T. Matsuda, K. Kamiyama, and M. Tachikawa, "A microprocessor-controlled high-accuracy wide-range speed regulator for motor drives," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. IE-29, no. 3, pp. 207–211, 1982.

[3] Se-Han Lee, T. A. Lasky, and S. A. Velinsky, "Improved velocity estimation for low-speed and transient regimes using low-resolution encoders," *IEEE-ASME T Mech*, vol. 9, no. 3, pp. 553–560, 2004.

[4] R. Petrella, M. Tursini, L. Peretti, and M. Zigliotto, "Speed measurement algorithms for low-resolution incremental encoder equipped drives: a comparative analysis," in *2007 International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics*, 2007, pp. 780–787.

[5] R. J. E. Merry, M. J. G. van de Molengraft, and M. Steinbuch, "Velocity and acceleration estimation for optical incremental encoders," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 7570 – 7575, 2008, 17th IFAC World Congress.

[6] Y. Chen, M. Yang, J. Long, D. Xu, and F. Blaabjerg, "M/T method based incremental encoder velocity measurement error analysis and self-adaptive error elimination algorithm," in *IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2017, pp. 2085–2090.

[7] L. Li, H. Hu, Y. Qin, and K. Tang, "Digital approach to rotational speed measurement using an electrostatic sensor," *Sensors*, vol. 19, no. 11, 2019.

[8] J. Y. Wu, Z. Chen, A. Deguet, and P. Kazanzides, "Fpga-based velocity estimation for control of robots with low-resolution encoders," in *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2018, pp. 6384–6389.

[9] N. Vijayan, J. Sandeep, and R. Ramchand, "An arduino based speed and rotor position measurement technique for electric drives," in *2019 International Conference on Power Electronics Applications and Technology in Present Energy Scenario (PETPES)*, 2019, pp. 1–5.

[10] Y. Vazquez-Gutierrez, D. L. O'Sullivan, and R. C. Kavanagh, "Evaluation of three optical-encoder-based speed estimation methods for motion control." *J. Eng.*, vol. 2019, no. 17, pp. 4069–4073, 2019.

[11] M. Meza-Sánchez, M. C. Rodríguez-Liñán, and E. Clemente, "Family of controllers based on sector non-linear functions: an application for first-order dynamical systems," *IET Control Theory A*, vol. 14, no. 10, pp. 1387–1392, jul 2020.

[12] G. Tao and P. Kokotović, *Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities*. John Wiley and Sons, 1996.

[13] M. C. Rodríguez-Liñán and W. P. Heath, "Controller structure for plants with combined saturation and deadzone/backlash," in *IEEE MSC*, 2012.

[14] M. C. Rodríguez-Liñán and W. P. Heath, "Controller structure for plants with combined saturation and stiction," *PI Mech Eng I-J Sys*, vol. 233, no. 8, pp. 945–960, nov 2018.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Control tipo PID no lineal con acciones acotadas para regular la posición de un eslabón con flexibilidad en la articulación

Jerónimo Moyrón†, Javier Moreno–Valenzuela† y Jesús Sandoval‡

***Resumen*— Se propone un controlador acotado tipo PID no lineal para regular la posición de un eslabón con flexibilidad en la articulación. A diferencia del control PID clásico expresado en términos del error de posición articular, el ingrediente principal en el controlador propuesto es el reemplazo de las variables del error por una función de saturación del error, esto para cada uno de los tres sumandos (proporcional, integral y derivativo) que conforman el control PID. Se llevaron a cabo simulaciones numéricas sobre el modelo de un eslabón con articulación flexible para ilustrar el desempeño del controlador.**

**Palabras clave: articulación flexible, control PID saturado, estabilidad, teoría de Lyapunov, regulación de posición.**

## I. Introducción

El control de robots con articulaciones flexibles ha retomado interés en años recientes, y se han publicado distintos trabajos relacionados, los cuales están orientados a estudiar, analizar y diseñar nuevas leyes de control. Como ejemplo de lo anterior podemos citar los siguientes trabajos: en [1] se presentó el control de posición de manipuladores con articulaciones flexibles sin medición de velocidad y con el controlador saturado, en [2] se presentó un control de movimiento usando linealización por realimentación para un robot de articulaciones flexibles, mientras en [3] los autores utilizan identificación paramétrica. Un trabajo previo a [2] fue publicado en el libro [4].

Por su parte, el control PID ofrece ventajas frente a otro tipo de controladores en cuanto a robustez y sencillez en su implementación. Un área de investigación del control PID se centra en la búsqueda de nuevas reglas de sintonía que sean mejores que las reglas de sintonía existentes. En este sentido, los trabajos de [5] y [6] se presentaron reglas de sintonía para reguladores tipo PID aplicados a robots rígidos. Específicamente [6] presentaron pruebas de estabilidad global para reguladores no lineales del tipo PID con pares acotados y aplicados a robots con articulaciones rígidas.

*Trabajo apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT-Fondo Sectorial de Investigación para la Educación con el proyecto A1-S-24762, SIP-IPN, y por la Secretaría de Investigación y Posgrado-Instituto Politécnico Nacional, México. Proyecto apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación. Trabajo apoyado por proyectos TecNM, México.

† Jerónimo Moyrón y Javier Moreno–Valenzuela están adscritos al Instituto Politécnico Nacional–CITEDI, Av. Instituto Politécnico Nacional 1310, Col. Nueva Tijuana, C.P. 22435, Tijuana, B.C., México (jmoyron@citedi.mx, moreno@citedi.mx).

‡ Jesús Sandoval está adscrito al Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Paz, Blvd. Forjadores de Baja California Sur 4720, La Paz, B.C.S., México (jesus.sg@lapaz.tecnm.mx).

La contribución del presente trabajo es un controlador tipo PID no lineal con acciones acotadas para la regulación de posición de un eslabón con articulación flexible. Este controlador se distingue del controlador de [1] por la inclusión de la acción de gravedad en la planta. Si bien, el controlador propuesto tiene una estructura similar a los controladores reportados en [6], su aplicación es inédita.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera: en la sección II se presenta el modelo dinámico empleado, en la sección III se presenta la ley de control, en la sección IV el análisis del sistema en lazo cerrado y en la sección V se presentan los resultados numéricos. Finalmente en la sección VI se dan algunas conclusiones.

## II. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un eslabón con flexibilidad en la articulación es dado por (ver e.g. [7], [8], [9]):

$$[ml^2 + I]\ddot{q} + D[\dot{q} - \dot{\theta}] + mlg\,\mathrm{sen}(q) + K\,[q - \theta] = 0 \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} - D[\dot{q} - \dot{\theta}] - K\,[q - \theta] = \tau \quad (2)$$

donde $q$ y $\theta$ son los desplazamientos del eslabón y el motor, respectivamente, $m$ es la masa del eslabón, $I$ y $J$ son momentos de inercia del eslabón y el motor, respectivamente, $l$ es la distancia al centro de masa del eslabón, $D$ es la constante de fricción viscosa, $g$ es la constante de aceleración de la gravedad, $K$ es la constante de elasticidad y $\tau$ es la entrada de control. En la Figura 1 se muestra un diagrama del eslabón con articulación flexible con las posiciones articulares correspondientes del motor y el eslabón.

La cualidad interesante del controlador propuesto en el presente trabajo es su estructura matemática, siendo una función de saturación su componente principal. En particular se pretende asegurar que la entrada de control $\tau$ no rebase el par máximo $\tau_{max}$ permitido por el actuador (típicamente un motor eléctrico). Formalmente, este criterio de diseño del controlador puede ser expresado matemáticamente como:

$$|\tau| \leq \tau_{max} \quad (3)$$

donde $\tau_{max}$ es una constante estrictamente positiva.

## III. Ley de control y objetivo de control

A continuación, se presenta la ley de control para la regulación de posición del eslabón con articulación flexible. El controlador con acciones acotadas del tipo PID (inspirado en [6], [7] y [8]) está dado por:

$$\tau = -k_p \tanh(\beta_1\tilde{\theta}) - k_v \tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}}) - k_i \tanh(\beta_3\xi) \quad (4)$$

$$\dot{\xi} = \epsilon \tanh(\beta_1\tilde{\theta}) + \dot{\tilde{\theta}} \quad (5)$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

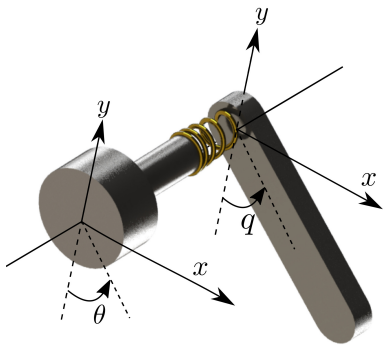



Figura 1: Diagrama del eslabón con articulación flexible.

donde $k_p$, $k_v$, $k_i$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ y $\epsilon$ son ganancias estrictamente positivas, las cuales son seleccionadas de acuerdo a las condiciones mostradas en la sección IV. Los errores de posición $\tilde{q}$ y $\tilde{\theta}$ están definidos como

$$\tilde{q}(t) = q(t) - q_d, \tag{6}$$

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta_d, \tag{7}$$

siendo $q_d$ la posición deseada (constante) del eslabón. En el esquema propuesto, $\theta_d$ se calcula empleando la definición correspondiente reportada en [7] y [8], esto es,

$$\theta_d = q_d + \frac{mlg}{K}\operatorname{sen}(q_d). \tag{8}$$

Observación 1: Debe ser notado que el máximo valor de (4) está acotado por

$$\tau_{max} = k_p + k_v + k_i.$$

Además, una vez seleccionada la posición deseada $q_d$, la posición deseada $\theta_d$ del motor se calcula de acuerdo a (8).

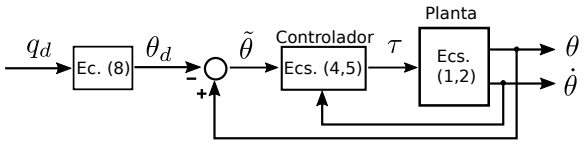



Figura 2: Diagrama de bloques del sistema de control estudiado.

El objetivo de control de regulación consiste en lograr que las posiciones articulares $q$ y $\theta$ de (1) y (2) tiendan asintóticamente a las posiciones articulares deseadas (constantes) $q_d$ y $\theta_d$, respectivamente. En términos de los errores de posición articular (6) y (7) esto se traduce en el cumplimiento de:

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}\tilde{q}(t)\\ \tilde{\theta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}. \tag{9}$$

## IV. Análisis de estabilidad

En esta sección se muestra el análisis del sistema en lazo cerrado conformado por el modelo dinámico (1) y (2) con el controlador (4) y (5). Se propone una función candidata de Lyapunov y se obtienen condiciones sobre las ganancias del controlador para las cuales se asegura que el origen del espacio de estados sea un equilibrio asintóticamente estable.

### *IV-A. Dinámica del error*

Sustituyendo el controlador (4) en (2) y reescribiendo el modelo dinámico en términos de los errores (6) y (7), junto a sus respectivas derivadas temporales, se obtiene la ecuación de lazo cerrado, dada por:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \tilde{\theta}\\ \dot{\tilde{q}}\\ \dot{\tilde{\theta}}\\ \bar{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\tilde{q}}\\ \dot{\tilde{\theta}}\\ \frac{-D[\dot{\tilde{q}}-\dot{\tilde{\theta}}]-mlg[\operatorname{sen}(\tilde{q}+q_d)-\operatorname{sen}(q_d)]-K[\tilde{q}-\tilde{\theta}]}{[ml^2+I]}\\ \frac{\tau+D[\dot{\tilde{q}}-\dot{\tilde{\theta}}]-mlg\operatorname{sen}(q_d)+K[\tilde{q}-\tilde{\theta}]}{J}\\ \epsilon\tanh(\beta_1\tilde{\theta})+\dot{\tilde{\theta}}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

donde

$$\tau = -k_p\tanh(\beta_1\tilde{\theta}) - k_v\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}}) - k_i\tanh(\beta_3[\bar{\xi}+\xi^\star])$$

ha sido reescrito convenientemente en términos de una nueva variable $\bar{\xi} = \xi - \xi^\star$, la cual satisface $\dot{\bar{\xi}} = \dot{\xi}$, útil para trasladar el punto de equilibrio de (10) a cero, con

$$\xi^\star = \operatorname{arctanh}(-mlg\operatorname{sen}(q_d)/k_i)/\beta_3. \tag{11}$$

Nótese que el dominio de la función $f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$ está el intervalo $x \in (-1, 1)$. Considerando este hecho, se deduce que $k_i > mlg$ para que (11) esté definida para todo $q_d$.

Como puede verificarse, el origen del espacio de estados $[\tilde{q}\ \tilde{\theta}\ \dot{\tilde{q}}\ \dot{\tilde{\theta}}\ \bar{\xi}]^T = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ es un equilibrio aislado de la dinámica del sistema en lazo cerrado, el cual es único si $K > mlg$. A continuación se demostrará que este equilibrio es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

### *IV-B. Positividad de la función candidata de Lyapunov*

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad, considere la función

$$\begin{aligned}V(\tilde{q},\tilde{\theta},\dot{\tilde{q}},\dot{\tilde{\theta}},\bar{\xi}) = {}& \frac{1}{2}[ml^2+I]\dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\tilde{\theta}}^2 + \frac{1}{2}K[\tilde{q}-\tilde{\theta}]^2\\ &+ \frac{k_p}{\beta_1}\ln(\cosh(\beta_1\tilde{\theta})) + mlg\operatorname{sen}(q_d)\bar{\xi}\\ &+ \frac{k_i}{\beta_3}\ln(\cosh(\beta_3[\bar{\xi}+\xi^\star])) + \alpha[ml^2+I]\tilde{q}\dot{\tilde{q}}\\ &+ \frac{\epsilon D}{\beta_1}\ln(\cosh(\beta_1\tilde{\theta})) + \epsilon J\tanh(\beta_1\tilde{\theta})\dot{\tilde{\theta}}\\ &+ \frac{1}{2}\alpha D\tilde{q}^2 - \frac{k_i}{\beta_3}\ln(\cosh(\beta_3\xi^\star))\\ &+ mlg\int_0^{\tilde{q}}[\operatorname{sen}(\tilde{q}+q_d)-\operatorname{sen}(q_d)]\,d\tilde{q},\end{aligned} \tag{12}$$

donde $\alpha$ es una constante estrictamente positiva.

***Proposición** 1: Suponga que se asignan ganancias $k_p$, $k_i$, $\beta_1$, $\beta_3$ y $\epsilon$, así como la existencia de una constante $\alpha$ estrictamente positiva, tales que la matriz*

$$H = \begin{bmatrix}H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0\\ H_{21} & H_{22} & 0 & H_{24} & 0\\ H_{31} & 0 & H_{33} & 0 & 0\\ 0 & H_{42} & 0 & H_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55}\end{bmatrix}, \tag{13}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

*con elementos*

$$\begin{aligned}
H_{11} &= K + \alpha D + mlg\cos(q_d),\\
H_{12} &= H_{21} = -K,\\
H_{13} &= H_{31} = \alpha[ml^2 + I],\\
H_{22} &= K + \beta_1[k_p + \epsilon D],\\
H_{24} &= H_{42} = \epsilon\beta_1 J,\\
H_{33} &= ml^2 + I,\\
H_{44} &= J,\\
H_{55} &= k_i\beta_3[1 - [mlg\,\mathrm{sen}(q_d)/k_i]^2],
\end{aligned}$$

*sea definida positiva. Entonces la función* (12) *es localmente positiva definida, y por lo tanto una función candidata de Lyapunov.*

*Prueba:* Puede verificarse que $V(0,0,0,0,0) = 0$. Enseguida, se procede a calcular el gradiente de $V$, tal que,

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \tilde{q}} & \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{\tilde{q}}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{\tilde{\theta}}} & \frac{\partial V}{\partial \bar{\xi}} \end{bmatrix}^T \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tilde{q}} =& K[\tilde{q} - \tilde{\theta}] + \alpha[[ml^2 + I]\dot{\tilde{q}} + D\tilde{q}]\\
&+ mlg[\mathrm{sen}(\tilde{q} + q_d) - \mathrm{sen}(q_d)],\\
\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} =& -K[\tilde{q} - \tilde{\theta}] + k_p\tanh(\beta_1\tilde{\theta}) + \epsilon J\beta_1\mathrm{sech}^2(\beta_1\tilde{\theta})\dot{\tilde{\theta}}\\
&+ \epsilon D\tanh(\beta_1\tilde{\theta}),\\
\frac{\partial V}{\partial \dot{\tilde{q}}} =& [ml^2 + I]\dot{\tilde{q}} + \alpha[ml^2 + I]\tilde{q},\\
\frac{\partial V}{\partial \dot{\tilde{\theta}}} =& J\dot{\tilde{\theta}} + \epsilon J\tanh(\beta_1\tilde{\theta}),\\
\frac{\partial V}{\partial \bar{\xi}} =& mlg\,\mathrm{sen}(q_d) + k_i\tanh(\beta_3[\bar{\xi} + \xi_\star]).
\end{aligned}$$

El gradiente se anula en el origen, por lo tanto $V$ satisface la condición necesaria para el extremo de una función escalar de varias variables.

Al aplicar el criterio de la segunda derivada se desprende que (13) es la matriz hessiana de $V$ evaluada en el origen. Por lo tanto, si $H > 0$ en el origen entonces $V$ tiene un mínimo local en este punto. Con esto se concluye que $V$ es localmente positiva definida y califica como una función candidata de Lyapunov. □

### *IV-C. Derivada temporal de la función de Lyapunov*

En lo sucesivo la siguiente propiedad será útil [13]: para todo $|x| \leq r$, $r > 0$ arbitrariamente grande, siempre existe $\gamma > 0$ suficientemente grande, tal que,

$$\gamma|\tanh(x)| \geq |x|. \tag{15}$$

Al calcular la derivada temporal de (12) a lo largo de las trayectorias de (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V} =& -D[\dot{\tilde{q}}^2 - 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{\theta}}^2] - k_v\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})\dot{\tilde{\theta}} + \alpha D\tilde{q}\dot{\tilde{\theta}}\\
&+ \epsilon J\beta_1\mathrm{sech}^2(\beta_1\tilde{\theta})\dot{\tilde{\theta}}^2 + \epsilon D\tanh(\beta_1\tilde{\theta})\dot{\tilde{q}}\\
&+ \epsilon K\tanh(\beta_1\tilde{\theta})[\tilde{q} - \tilde{\theta}] - \epsilon k_p\tanh^2(\beta_1\tilde{\theta})\\
&- \epsilon k_v\tanh(\beta_1\tilde{\theta})\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}}) + \alpha[ml^2 + I]\dot{\tilde{q}}^2\\
&- \alpha K[\tilde{q} - \tilde{\theta}]\tilde{q} - \alpha mlg[\mathrm{sen}(\tilde{q} + q_d) - \mathrm{sen}(q_d)]\tilde{q}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Con la finalidad de demostrar que (16) es una función negativa semidefinida, considere la siguiente proposición.

***Proposición*** *2: Suponga la existencia de constantes $\gamma_1$ y $\gamma_2$ estrictamente positivas y ganancias $k_v$ y $\beta_2$ tales que la matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & Q_{14}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24}\\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34}\\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

*con elementos*

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \alpha[K - mlg],\\
Q_{12} &= Q_{21} = -\frac{K}{2}[\alpha\gamma_1 + \epsilon],\\
Q_{14} &= Q_{41} = -\frac{\alpha D\gamma_2}{2},\\
Q_{22} &= \frac{\epsilon K}{\beta_1} + \epsilon k_p,\\
Q_{23} &= Q_{32} = -\frac{\epsilon D}{2},\\
Q_{24} &= Q_{42} = -\frac{\epsilon k_v}{2},\\
Q_{33} &= D - \alpha[ml^2 + I],\\
Q_{34} &= Q_{43} = -D\gamma_2,\\
Q_{44} &= \frac{k_v}{\beta_2} + \frac{D - \epsilon J\beta_1}{\beta_2^2},
\end{aligned}$$

*sea definida positiva. Entonces la derivada de la función candidata de Lyapunov* (16) *es localmente negativa semidefinida.*

*Prueba:* Considere las siguientes cotas superiores sobre los elementos correspondientes en (16):

$$\begin{aligned}
\epsilon J\beta_1\mathrm{sech}^2(\beta_1\tilde{\theta})\dot{\tilde{\theta}}^2 &\leq \epsilon J\beta_1|\dot{\tilde{\theta}}|^2,\\
-k_v\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})\dot{\tilde{\theta}} &\leq -\frac{k_v}{\beta_2}|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|^2,\\
-\epsilon K\tanh(\beta_1\tilde{\theta})\tilde{\theta} &\leq -\frac{\epsilon K}{\beta_1}|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})|^2,\\
-\alpha mlg[\mathrm{sen}(\tilde{q} + q_d) - \mathrm{sen}(q_d)]\tilde{q} &\leq \alpha mlg|\tilde{q}|^2.
\end{aligned}$$

Al usar estas cotas superiores en (16) se consigue la de-

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

sigualdad

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\left[D-\alpha[ml^2+I]\right]|\dot{\tilde{q}}|^2-[D-\epsilon J\beta_1]|\dot{\tilde{\theta}}|^2 \\ & -\frac{k_v}{\beta_2}|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|^2+\epsilon K|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\tilde{q}| \\ & -\frac{\epsilon K}{\beta_1}|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})|^2-\epsilon k_p|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})|^2+\alpha K|\tilde{q}||\tilde{\theta}| \\ & +\epsilon k_v|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|-\alpha\left[K-mlg\right]|\tilde{q}|^2 \\ & +2D|\dot{\tilde{q}}||\dot{\tilde{\theta}}|+\epsilon D|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\dot{\tilde{q}}|+\alpha D|\tilde{q}||\dot{\tilde{\theta}}|. \qquad (18)\end{aligned}$$

Suponiendo que $D-\epsilon J\beta_1>0$, se establece la desigualdad

$$-[D-\epsilon J\beta_1]|\dot{\tilde{\theta}}|^2 \leq -\frac{[D-\epsilon J\beta_1]}{\beta_2^2}|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|^2.$$

Además, considerando que $|\tilde{\theta}|$ y $|\dot{\tilde{\theta}}|$ pueden ser acotados superiormente, como se indica en la propiedad (15), mediante

$$\begin{aligned}|\tilde{\theta}| &\leq \gamma_1|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})|, \\ |\dot{\tilde{\theta}}| &\leq \gamma_2|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|,\end{aligned}$$

para todo $|\tilde{\theta}|\leq r_1$ y $|\dot{\tilde{\theta}}|\leq r_2$, respectivamente, donde $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son constantes estrictamente positivas, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\left[D-\alpha[ml^2+I]\right]|\dot{\tilde{q}}|^2-\frac{[D-\epsilon J\beta_1]}{\beta_2^2}|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|^2 \\ & +2D\gamma_2|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})||\dot{\tilde{q}}|-\frac{k_v}{\beta_2}|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|^2 \\ & +K[\alpha\gamma_1+\epsilon]|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\tilde{q}|+\alpha D\gamma_2|\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})||\tilde{q}| \\ & +\epsilon D|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\dot{\tilde{q}}|+\epsilon k_v|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})||\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})| \\ & -\alpha[K-mlg]|\tilde{q}|^2-[\frac{\epsilon K}{\beta_1}+\epsilon k_p]|\tanh(\beta_1\tilde{\theta})|^2. \qquad (19)\end{aligned}$$

Definiendo

$$\mathbf{x}=\left[|\tilde{q}| \quad |\tanh(\beta_1\tilde{\theta})| \quad |\dot{\tilde{q}}| \quad |\tanh(\beta_2\dot{\tilde{\theta}})|\right]^T$$

la desigualdad (19) se puede reescribir como

$$\dot{V} \leq -\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} \qquad (20)$$

donde $Q$ es la matriz definida en (17). Por lo tanto, si $Q>0$ entonces $\dot{V}\leq 0$. Con lo anterior se concluye que $\dot{V}$ es una función localmente negativa semidefinida, por tanto $V$ es una función de Lyapunov, tal que se puede concluir que el origen del sistema en lazo cerrado (10) es un equilibrio estable. □

### *IV-D. Estabilidad asintótica*

La siguiente proposición trata sobre la estabilidad asintótica del origen, la cual asegura el cumplimiento del objetivo de control (9).

***Proposición** 3: Si las ganancias $k_p$, $k_v$, $k_i$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ y $\epsilon$, y las constantes $\alpha$, $\gamma_1$ y $\gamma_2$ (estrictamente positivas) se asignan tales que las matrices $H$ y $Q$ sean definidas positivas, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado* (10).

*Prueba:* El origen es un punto de equilibrio aislado de (10). Además, ya que $H>0$ y $Q>0$ (localmente dentro de un subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^5$) entonces $V$ en (12) es una función de Lyapunov.

Defina el conjunto

$$\mathcal{S}=\left\{[\tilde{q},\tilde{\theta},\dot{\tilde{q}},\dot{\tilde{\theta}},\bar{\xi}]^T\in\mathcal{D}:\dot{V}=0\right\}.$$

Considerando (20), el conjunto $\mathcal{S}$ se puede expresar como

$$\mathcal{S}=\left\{[\tilde{q},\tilde{\theta},\dot{\tilde{q}},\dot{\tilde{\theta}},\bar{\xi}]^T\in\mathcal{D}:\tilde{q}=\tilde{\theta}=\dot{\tilde{q}}=\dot{\tilde{\theta}}=0,\bar{\xi}\in\mathbb{R}\right\}, \qquad (21)$$

esto al ser $Q>0$. De la ecuación de lazo cerrado (10), $\tilde{\theta}\equiv\dot{\tilde{\theta}}\equiv 0$ implica que $\bar{\xi}$ es constante, y

$$-k_i\tanh(\beta_3[\bar{\xi}+\xi^\star])-mgl\,\mathrm{sen}(q_d)=0,$$

la cual únicamente se satisface para $\bar{\xi}=0$, de acuerdo a la definición de (11). De aquí se deduce que la única solución de (10) que puede permanecer idénticamente en $\mathcal{S}$ para todo $t\geq 0$ es la solución trivial. Por medio del teorema de Barbashin-Krasovskii ([10], Corolario 4.1, página 128) se concluye que el punto $[\tilde{q}\ \ \tilde{\theta}\ \ \dot{\tilde{q}}\ \ \dot{\tilde{\theta}}\ \ \bar{\xi}]^T=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma local. □

## V. Simulaciones numéricas

Con la finalidad de validar el desempeño del controlador propuesto (4) y (5), se procedió a realizar una simulación numérica aplicándolo al modelo dinámico (1) y (2). Los valores numéricos de los parámetros y las ganancias del controlador se muestran en las Tablas I y II, respectivamente. Las ganancias fueron asignadas para que las matrices (13) y (17) sean definidas positivas. El par máximo es $\tau_{max}=1$ [N m], se estableció $[q\ \ \theta\ \ \dot{q}\ \ \dot{\theta}\ \ \xi]^T=[0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ como condición inicial y se seleccionó $q_d=10$ [rad] como la posición deseada del eslabón. Con el propósito de comparar el desempeño del controlador propuesto con respecto al reportado por [7] y [11], se agregaron simulaciones usando el controlador de Tomei [7]:

$$\tau=-k_p\tilde{\theta}-k_v\dot{\tilde{\theta}}+mlg\,\mathrm{sen}(q_d) \qquad (22)$$

y el controlador PD con compensación de gravedad en línea [11] (OGC por sus siglas en inglés):

$$\tau=-k_p\tilde{\theta}-k_v\dot{\tilde{\theta}}+mlg\,\mathrm{sen}(\bar{\theta}), \qquad (23)$$

$$\bar{\theta}=\theta-mlg\,\mathrm{sen}(q_d)/K, \qquad (24)$$

donde se utilizaron las mismas ganancias $k_p$ y $k_v$ mostradas en la Tabla II, esto es, $k_p=0.5$ y $k_v=0.1$. Los resultados de las tres simulaciones se pueden visualizar en las figuras 3, 4 y 5. Como se puede apreciar, los tres controladores son capaces de llevar al eslabón a la posición deseada seleccionada $q_d=10$ [rad]. Asimismo, la respuesta transitoria de los dos controladores tipo PD es más rápida comparada con la respuesta transitoria del controlador PID propuesto, sin embargo, el par demandado por los controladores tipo PD exceden el par máximo establecido $\tau_{max}=1$ [N m], mientas que el par demandado por el controlador PID propuesto no excede este valor (ver figura 5).

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLA I: Parámetros del eslabón con articulación flexible.

| Parámetro | Descripción | Valor | Unidad |
|---|---|---|---|
| $m$ | Masa del eslabón | 0.218 | [kg] |
| $l$ | Distancia al centro de masa | 0.11 | [m] |
| $g$ | Aceleración de la gravedad | 9.81 | [m/s$^2$] |
| $I$ | Momento de inercia del eslabón | $8.8\times10^{-4}$ | [kg m$^2$] |
| $J$ | Momento de inercia del motor | 0.01 | [kg m$^2$] |
| $D$ | Constante de fricción viscosa | 0.028 | [N m-s] |
| $K$ | Constante de elasticidad de la articulación | 4.2 | [N/m] |

TABLA II: Ganancias del controlador (4) y (5).

| Ganancia | Valor | Unidad |
|---|---|---|
| $k_p$ | 0.50 | N m |
| $k_v$ | 0.10 | N m-s |
| $k_i$ | 0.40 | N m |
| $\beta_1$ | 1.00 | - |
| $\beta_2$ | 1.00 | - |
| $\beta_3$ | 1.00 | - |
| $\epsilon$ | 1.00 | 1/s |

TABLA III: Constantes usadas en la función de Lyapunov (12) y su derivada temporal (16).

| Constante | Valor |
|---|---|
| $\alpha$ | 1.00 |
| $\gamma_1$ | 1.01 |
| $\gamma_2$ | 1.01 |

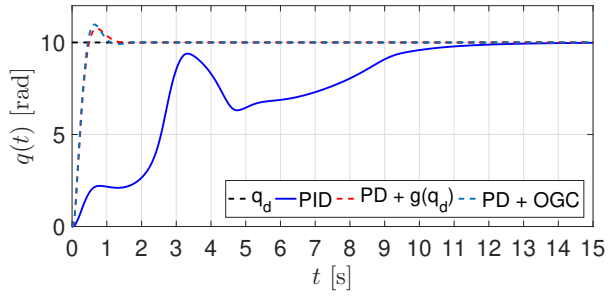



Figura 3: Evolución temporal del desplazamiento angular del eslabón $q(t)$.

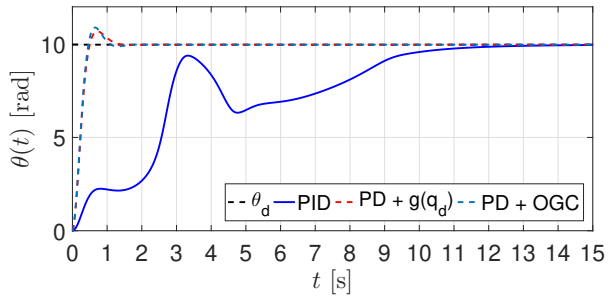



Figura 4: Evolución temporal del desplazamiento angular del motor $\theta(t)$.

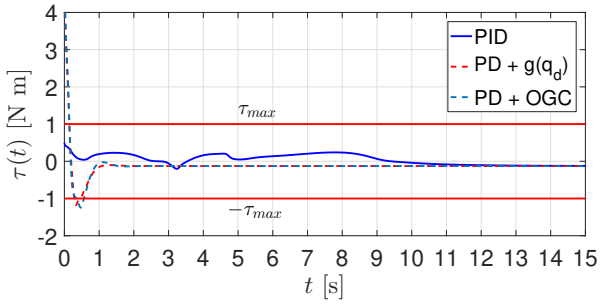



Figura 5: Par demandado por la ley de control $\tau(t)$.

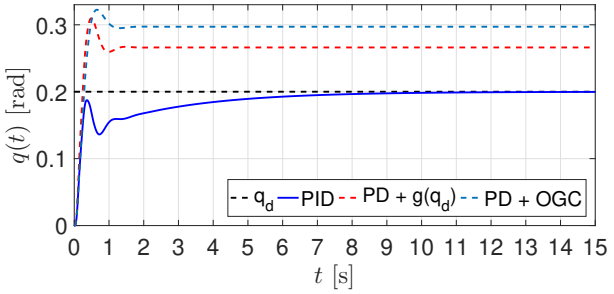



Figura 6: Evolución temporal del desplazamiento angular del eslabón $q(t)$. Una perturbación constante $\delta = 0.05$ [N m] ha sido aplicada al eje del motor.

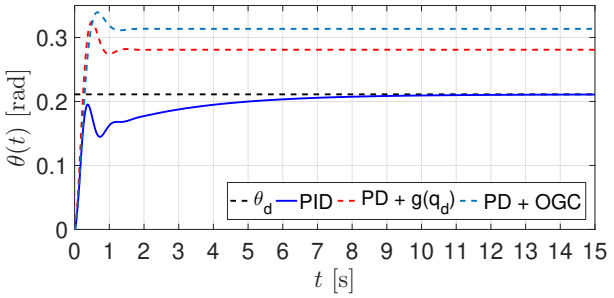



Figura 7: Evolución temporal del desplazamiento angular del motor $\theta(t)$. Una perturbación constante $\delta = 0.05$ [N m] ha sido aplicada al eje del motor.

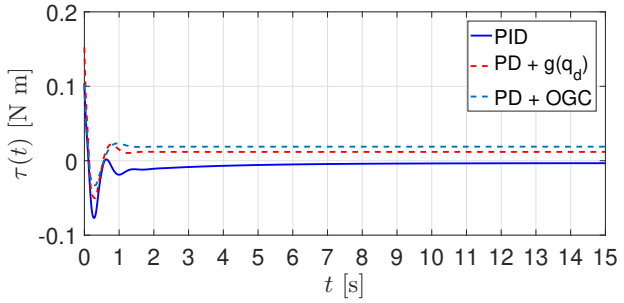



Figura 8: Par demandado por la ley de control $\tau(t)$ ante la perturbación constante $\delta = 0.05$ [N m] aplicada al eje del motor.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

TABLA IV: Valores RMS de las señales de error.

| | | PID | PD+g(qd) | PD+OGC |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\tilde{q}$ | 3.6586 | 1.1012 | 1.0868 |
| | $\tilde{\theta}$ | 3.6175 | 1.0823 | 1.0669 |
| 2 | $\tilde{q}$ | 0.0259 | 0.0687 | 0.0983 |
| | $\tilde{\theta}$ | 0.0271 | 0.0723 | 0.1035 |

Para ilustrar numéricamente el desempeño de cada uno de los tres controladores ante perturbaciones, se añadió una perturbación constante $\delta = 0.05$ [N m] aplicada en el eje del motor, modificando la posición deseada a $q_d = 0.2$ [rad]. Los resultados de simulación se muestran en las figuras 6, 7 y 8. Tal y como se aprecia en estas figuras, el controlador (4) lleva al eslabón a su posición deseada mientras que el controlador de Tomei y el control PD con compensación de gravedad en línea presentan un error en estado estacionario. En la Tabla IV se muestra el valor RMS de las señales de error para cada una de las simulaciones. Consulte [12] para un análisis de robustez del controlador PD con compensación de gravedad, el cual tiene una estructura similar al controlador de Tomei.

## VI. Conclusiones

El controlador propuesto es capaz de llevar al eslabón a una posición de referencia deseada sin exceder el par máximo establecido y mostrando un desempeño superior bajo perturbaciones de magnitud constante, con respecto a dos controladores PD reportados en la literatura ([7] y [11]). Se verificó por medio de simulaciones numéricas que la acción integral es capaz de corregir errores provocados por perturbaciones constantes. Finalmente, se presentó un completo análisis de estabilidad para probar el cumplimiento del objetivo de control (9) de regulación de posición.

El trabajo futuro consiste en extender los resultados a manipuladores de $n$ grados de libertad y validarlos experimentalmente.

## Referencias

[1] P. Borja, T. Wesselink, and J. M. A. Scherpen, “Saturated control without velocity measurements for planar robots with flexible joints”, *arXiv preprint*, arXiv:1812.08257, 2018.

[2] J. Moreno–Valenzuela, J. Montoya Chavez, y V. Santibáñez, “Control de movimiento para un robot con articulaciones flexibles basado en linealización por realimentación” en *Robótica y Computación. Investigación y Desarrollo*, pp. 62-66, 2019.

[3] R. Miranda–Colorado, and J. Moreno–Valenzuela, “Experimental parameter identification of flexible joint robot manipulators”, *Robotica*, vol. 36, pp. 313-332, 2018.

[4] J. Moreno–Valenzuela y C. Aguilar Avelar, *Motion control of underactuated mechanical systems*, Charm: Springer International Publishing AG., 2018.

[5] V. M. Hernández-Guzman, V. Santibáñez, and R. Silva-Ortigoza, “A new tuning procedure for PID control of rigid robots”, *Advanced Robotics*, vol. 22, no. 9, pp. 1007-1023, 2008.

[6] J. Orrante-Sakanassi, V. Santibáñez, and V. M. Hernández-Guzman “A new tuning procedure for nonlinear PID global regulators with bounded torques for rigid robots. *Robotica*, vol. 9, no. 9, pp. 1926-1947, 2015.

[7] P. Tomei, “A simple PD controller for robots with elastic joints”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 10, pp. 1208-1213, 1991.

[8] R. Kelly, and V. Santibáñez, “Global regulation of elastic joint robots based on energy shaping”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no.10, pp.1451-1456, 1998.

[9] C. Ott, *Cartesian impedance control of redundant and flexible joint robots*, Springer-Verlag 2008.

[10] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Third edition, Prentice Hall 2002.

[11] L. Zollo, A. De Luca, and B. Siciliano, “Regulation with on-line gravity compesation for robots with elastic joints”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004, LA, USA, vol. 3, pp. 2687-2692.

[12] R. Kelly, and C. Monroy, “On robustness of PD control with gravity compensation of torque-driven robot manipulators”, *2019 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, Grenoble, Francia, 2019, pp. 1-5.

[13] J. Moreno–Valenzuela, V. Santibáñez, and R. Campa, “A class of OFT controllers for torque-saturated robot manipulators: Lyapunov stability and experimental evaluation”, *J Intell Robot Syst*, vol. 51, pp. 65-88, 2008.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Compensador adaptativo-neuronal aplicado a una rueda inercial para el control de seguimiento de trayectoria

Luis David Olguin Hernández
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Tijuana
Tijuana, B. C., México C.P. 22414
Email: luis.olguin19@tectijuana.edu.mx

Sergio Alberto Puga Guzmán
Tecnológico Nacional de México
Tijuana, B. C., México C.P. 22414
Email: sergio.puga@tectijuana.edu.mx

Jovan Oseas Mérida Rubio
Universidad Autónoma de Baja California
Tijuana, B. C., México C.P. 22260
Email: jovan.merida@uabc.edu.mx

***Resumen*—Este trabajo muestra el diseño de dos controladores adaptativos para resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda inercial. El objetivo del trabajo es diseñar una ley de control que le permita al mecanismo propuesto seguir una trayectoria deseada, mientras el controlador adaptativo compensa las incertidumbres provenientes del modelo dinámico y las perturbaciones. Como primer solución se propone un control adaptativo por estimación paramétrica para el cual el modelo dinámico del mecanismo es estudiado en forma detallada. El segundo controlador incorpora una red neuronal mono capa de enlace funcional, cuyos pesos de salida se estiman en línea y para el cual no es necesario un estudio detallado del modelo dinámico gracias a la propiedad de aproximación universal de las redes neuronales. Ambas soluciones incluyen un análisis de estabilidad de Lyapunov, concluyendo estabilidad del tipo uniformemente últimamente acotada (UUB). Los resultados de simulación muestran que las estrategias de control propuestas son efectivas en el seguimiento de trayectoria y robustas en presencia de cambios paramétricos y perturbaciones.**

## I. Introducción

El modelo del péndulo de rueda de inercia fue introducido por Spong en 1999 y es una aplicación de la ley de inercia en la que se basan los sistemas de tipo robóticos para el control de orientación [1].

Debido a la estructura mecánica y la dinámica simple pero no lineal del péndulo de rueda de inercia, este modelo se puede utilizar como referencia en el diseño de los algoritmos de control no lineal. Desde un punto de vista pedagógico, los péndulos de rueda de inercia también pueden utilizarse como problemas de ejemplo para demostrar ideas básicas de la teoría de control [2], [3]. Uno de los objetivos en el control del péndulo, es encontrar un torque de entrada que le permita al mecanismo seguir una trayectoria de referencia deseada.

Actualmente en la literatura existen una gran cantidad de técnicas de control. Sin embargo, el control adaptativo es una herramienta con gran potencial que ha demostrado su eficacia en el tratamiento de las incertidumbres en los parámetros y en la dinámica del mecanismo [4], [5].

En la literatura se han reportado trabajos, donde técnicas de control adaptativo son aplicadas al péndulo de rueda de reacción inercial. En [6] se reporta un controlador IDA-PBC combinado con una ley de control adaptativa que estima los parámetros desconocidos del mecanismo en línea. En [7] se desarrollan algoritmos de control adaptativos a partir del gradiente de alta velocidad con función dinámica, que permiten la estabilización del péndulo en condiciones de incertidumbre paramétrica completa. Por otra parte en [8] se explora una propuesta de control adaptativo basado en un modelo de regresión para controlar el seguimiento de trayectorias del péndulo de rueda inercial. Finalmente en [9] se muestra una propuesta de control adaptativo que incorpora una red neuronal para la estabilización y el seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda de reacción.

La contribución de este trabajo de investigación consiste en resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria de un péndulo de rueda inercial, mediante la propuesta de dos controladores adaptativos. El primer controlador adaptativo está basado en la estimación de parámetros, por lo que es necesario definir de forma detallada el modelo del mecanismo. El segundo controlador adaptativo se basa en la incorporación de una red neuronal monocapa de enlace funcional, cuyos pesos de salida son estimados en línea. Este controlador no necesita de un modelo detallado de la planta. Con el objetivo de comparar el desempeño de ambos controladores se realizan pruebas de simulación aplicando cambios paramétricos y perturbaciones al modelo. El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección I se ha dado una breve introducción al trabajo, en la Sección II se presenta el modelo dinámico y en la Sección III se da la formulación del problema de control. En la Sección IV se desarrolla el diseño de los controladores y las pruebas de estabilidad. Finalmente en la Sección V se muestran resultados de simulación.

## II. Modelo dinámico

El modelo dinámico del mecanismo se definió de acuerdo al diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 1, donde el origen del mecanismo está situado en $O_0$. Las etiquetas $q_p$ y $q_w$ denotan a las posiciones angulares del péndulo y de la rueda inercial respectivamente, y $\tau_w$ es el par producido por un actuador montado en la rueda de reacción. Se considera que

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Tabla I
PARÁMETROS FÍSICOS DEL PÉNDULO DE RUEDA INERCIAL

| Parámetro | Descripción | Valor |
|---|---|---|
| $m_p$ | Masa del péndulo | 0.30 kg |
| $m_w$ | Masa de la rueda | 0.08 kg |
| $l_t$ | Longitud total del brazo (péndulo) | 1.5 m |
| $l$ | Distancia del origen a la rueda de reacción | 0.5 m |
| $a_b$ | Ancho del brazo | 0.07 m |
| $l_p$ | Distancia del origen al centro de masa del péndulo | 0.15 m |
| $F_p$ | Fricción en la articulación del origen $O_0$ | 0.0053 N |
| $F_w$ | Fricción en la articulación de la rueda de reacción | 0.0023 N |
| $I_p$ | Inercia péndulo | 0.01 kg m$^2$ |
| $I_w$ | Inercia rueda de reacción | 0.0016 kg m$^2$ |
| $g$ | Constante de aceleración gravitacional | 9.81 kg m/s$^2$ |

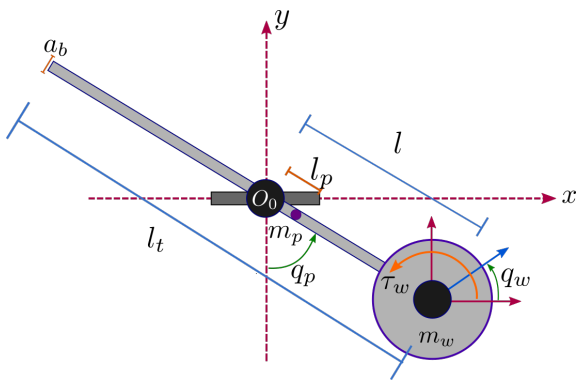



Figura 1. Modelo propuesto del péndulo de rueda inercial.

los centros de masa del brazo y rueda de inercia son tales que en conjunto, producen un centro de masa cercano al origen $O_0$; por lo que de forma natural los momentos aplicados por las masas del brazo y la rueda de inercia, sitúan al sistema en un estado muy cercano al equilibrio. Los parámetros físicos propuestos para este modelo se muestran en la Tabla I.

El método usado para obtener el modelo dinámico es el de Euler-Lagrange [10], el cual se basa en el análisis de la diferencia entre las energías cinética y potencial conocida como Lagrangiano. Siguiendo esta metodología se obtuvo el siguiente modelo dinámico para el péndulo de rueda de reacción inercial:

$$A\ddot{q}_p + I_w\ddot{q}_w + Bg\,\mathrm{sen}(q_p) + F_p\dot{q}_p = -\tau_d \tag{1}$$

$$I_w\ddot{q}_p + I_w\ddot{q}_w + F_w\dot{q}_w = \tau_w \tag{2}$$

donde $A = m_p l_p^2 + I_p + m_w l^2 + I_w$, $B = (m_p l_p + m_w l)$ y $\tau_d$ son las perturbaciones, que se asume están acotadas por $\|\tau_d\| < d_B$, donde $d_B > 0$.

Despejando el segundo término de (2) y sustituyéndolo en (1) se obtiene la ecuación que engloba la dinámica del mecanismo:

$$(A - I_w)\ddot{q}_p = -\tau_w - Bg\,\mathrm{sen}(q_p) - F_p\dot{q}_p + F_w\dot{q}_w - \tau_d. \tag{3}$$

## III. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL

Un reto en el control del péndulo de rueda inercial es hacer que el mecanismo siga una trayectoria de referencia $q_d$, la cual se asume es dos veces diferenciable con respecto al tiempo y está acotada de forma que:

$$\left\| \begin{matrix} q_d(t) \\ \dot{q}_d(t) \\ \ddot{q}_d(t) \end{matrix} \right\| \leq q_B \tag{4}$$

donde $q_B > 0$ es un valor escalar definido. Siendo $q_d$ una trayectoria deseada para $q_p$ y tomando la dinámica del sistema expresada en (3), el objetivo de control consiste en diseñar una ley $\tau_w$ que resuelva el problema de control de seguimiento de trayectoria [11], de forma que el error de seguimiento:

$$e = q_d - q_p \tag{5}$$

sea de tipo uniformemente últimamente acotado [13] (UUB por sus siglas en inglés).

De acuerdo a la definición en [13], las soluciones de un sistema dinámico representado por $\dot{x} = \xi(x,t)$, para un conjunto $S_c \in \mathbb{R}^n$, serán de tipo UUB si existe un valor de cota $C_B$ y un tiempo $T(x_0, C_B) \geq 0$ independiente de $t_0$, para cualquier condición inicial $x_0 \in S_c$ tal que:

$$\|x(t) - x_e\| \leq C_B, \;\; \forall \;\; t \geq t_0 + T. \tag{6}$$

Tomando la definición del error en (5) se establece la siguiente ecuación:

$$r = (\dot{q}_d - \dot{q}_p) + \Lambda e \tag{7}$$

donde $\Lambda$ es un parámetro de diseño positivo. La ecuación en (7) reduce las dimensiones del problema, simplificando el desarrollo de la ecuación que describe la dinámica del sistema [5].

A partir de esta definición se establece la dinámica del mecanismo de la siguiente forma:

$$H\dot{r} = f(x) + \tau_d + \tau_w \tag{8}$$

en la que:

$$f(x) = H[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e}] + g_0(q_p) + f_0(\dot{q}_p, \dot{q}_w) \tag{9}$$

describe la dinámica no lineal del péndulo, donde $H$ corresponde a la diferencia de constantes $(A - I_w)$, $f_0(\dot{q}_p, \dot{q}_w) = F_p\dot{q}_p - F_w\dot{q}_w$ y $g_0(q_p) = Bg\,\mathrm{sen}(q_p)$ es el término de aceleración gravitacional.

## IV. DISEÑO DE CONTROLADORES Y PRUEBAS DE ESTABILIDAD

El valor de los parámetros de diseño y las ganancias utilizadas en este apartado se encuentran en la Tabla II. Los valores propuestos se obtuvieron mediante un proceso de sintonización de manera heurística; proponiendo valores aleatorios, comprobando el desempeño del controlador y ajustando el valor en base al resultado obtenido.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Tabla II
GANANCIAS DE LOS CONTROLADORES

| Ganancia | Descripción | Valor |
|---|---|---|
| $K_v$ | Ganancia para la compensación PD | 10 |
| $\Lambda$ | Valor del parámetro de diseño | 7 |
| $\kappa_p$ | Ganancia para la ley de estimación de paramétros en (13) | 20 |
| $\Gamma$ | Matriz de sintonización para el controlador en (12) | $diag\{0.01\}$ |
| $N$ | Matriz constante para el controlador en (24) | $diag\{10\}$ |
| $Q$ | Matriz constante para el controlador en (24) | $diag\{0.01\}$ |

### *IV-A. Control por estimación de parámetros*

Tomando como referencia el trabajo realizado por Slotine en [12], se propone un controlador adaptativo por estimación de parámetros que resuelva el problema de control de seguimiento de trayectoria para un péndulo de rueda inercial.

Puesto que la función de la dinámica del péndulo en (8) es lineal en los parámetros, puede representarse en su forma paramétrica mediante:

$$f(x) = W(x)\phi \tag{10}$$

donde $W(x) = [\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e} \quad -\operatorname{sen}(q_p) \quad -\dot{q}_p \quad \dot{q}_w]$ es el vector regresor y

$$\phi = [(-A + I_w) \quad Bg \quad F_p \quad F_w]^T \tag{11}$$

es el vector de parámetros ideales desconocidos acotado por $\|\phi\| \leq \phi_B$, donde $\phi_B > 0$ es un valor que depende de los parámetros físicos del sistema.

Para calcular el torque de entrada al actuador se propone:

$$\tau_w = -\hat{f}(x) - K_v r \tag{12}$$

donde $\hat{f}(x)$ es una estimación de (10), $K_v > 0$ es una ganancia y $r$ está definida por (7). La estimación de los parámetros ideales se calcula mediante la ley de adaptación:

$$\dot{\hat{\phi}} = -\kappa_p\hat{\phi} + \Gamma W(x)^T r \tag{13}$$

donde $\kappa_p > 0$, $\hat{\phi}$ es la estimación de los parámetros físicos $\phi$ y $\Gamma > 0$ es una matriz de valores constantes.

Al introducir (12) en la ecuación (8) se obtiene la dinámica:

$$H\dot{r} = \tilde{f}(x) - K_v r + \tau_d \tag{14}$$

cuya función $\tilde{f}(x)$ representa el error de estimación de $f(x)$, correspondiente a $\tilde{f}(x) = W(x)\phi - W(x)\hat{\phi}$. De este modo, la dinámica del mecanismo en lazo cerrado se define en función del vector de regresor como:

$$H\dot{r} = W(x)\tilde{\phi} - K_v r + \tau_d \tag{15}$$

donde

$$\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi} \tag{16}$$

es el error de estimación de los parámetros del mecanismo.

Para desarrollar el análisis de estabilidad se propone la función candidata de Lyapunov globalmente definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(r, \tilde{\phi}) = \frac{1}{2}Hr^2 + \frac{1}{2}\tilde{\phi}^T\Gamma^{-1}\tilde{\phi}. \tag{17}$$

Derivando con respecto al tiempo la función candidata de Lyapunov en (17) y sustituyendo $H\dot{r}$ por la ecuación (15) se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{\phi}) = -K_v r^2 + \tilde{\phi}^T(W(x)^T r + \Gamma^{-1}\dot{\tilde{\phi}}) + r\tau_d. \tag{18}$$

Sustituyendo la ley de adaptación (13) en la derivada con respecto al tiempo de (16) se obtiene $\dot{\tilde{\phi}}$, que al sustituir en la derivada de la función candidata de Lyapunov (18) y acotando, se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{\phi}) \leq -(min\{\lambda_{min}\{K_v\}, \kappa_p\lambda_{min}\{\Gamma^{-1}\}\}) \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$+(max\{(d_B), \kappa_p\lambda_{max}\{\Gamma^{-1}\}\phi_B\}) \left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \right\|$$

por lo que:

$$\dot{V}(r, \tilde{\phi}) \leq -\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \right\| < 0 \tag{19}$$

siempre que:

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \right\| > \frac{(max\{(d_B), \kappa_p\phi_B\lambda_{max}\{\Gamma^{-1}\}\})}{(min\{\lambda_{min}\{K_v\}, \kappa_p\lambda_{min}\{\Gamma^{-1}\}\})} \tag{20}$$

y de acuerdo a la definición de UUB en [13], las trayectorias del sistema de lazo cerrado (15) permanecerán en una región limitada por una hiper-esfera de radio $r_s$:

$$\left\| \begin{bmatrix} r \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \right\| \leq r_s = \frac{(max\{(d_B), \kappa_p\phi_B\lambda_{max}\{\Gamma^{-1}\}\})}{(min\{\lambda_{min}\{K_v\}, \kappa_p\lambda_{min}\{\Gamma^{-1}\}\})} \tag{21}$$

de modo que considerando las ecuaciones (7) y (16) implica que $e$, $\dot{e}$, $\hat{\phi}$, $q_p$ y $\dot{q}_p$ son también UUB.

### *IV-B. Control utilizando redes neuronales*

Otra forma de estimar la dinámica no lineal en (8) es aprovechando la propiedad de aproximación universal que ofrecen las redes neuronales [14]. Esta propiedad le permite a un controlador adaptarse a variaciones en la dinámica y a perturbaciones externas. Al implementar una red neuronal, la aproximación de la función (10) se realiza a través de:

$$f(x) = Z^T\beta(\eta) + \varepsilon \tag{22}$$

donde $\varepsilon$ es el error de aproximación acotado por $\|\varepsilon\| < \varepsilon_N$ con $\varepsilon_N > 0$, $Z \in \mathbb{R}^S$ es un vector de pesos ideales de valor constante acotado por $\|Z\| \leq Z_B$ con $Z_B > 0$, siendo $S$ el número de neuronas de la capa oculta de la red neuronal.

La red neuronal de enlace funcional en (22) contiene un vector de funciones base:

$$\beta(\eta) = \boldsymbol{\sigma}(G^T\eta)$$

donde $\eta \equiv [1 \quad e \quad \dot{e} \quad q_d \quad \dot{q}_d \quad \ddot{q}_d]^T \in \mathbb{R}^j$ es un vector aumentado que contiene las $j-1$ entradas a la red neuronal provenientes del sistema. $G \in \mathbb{R}^{j\times S}$ es una matriz de pesos aleatorios de entrada de valores constantes y $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^S$ es un vector de funciones de activación de tangentes hiperbólicas [15].

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Sustituyendo la aproximación (22) en la dinámica del sistema en (8) da como resultado:

$$H\dot{r} = Z^T\beta(\eta) + \varepsilon + \tau_d + \tau_w \tag{23}$$

donde se asume que las perturbaciones están acotadas por $\|\tau_d\| < d_B$ y $d_B > 0$.

De forma análoga a (12), la ley de control aplicada para obtener la dinámica de lazo cerrado del sistema mediante una red neuronal es:

$$\tau_w = -\hat{Z}^T\beta(\eta) - K_v r \tag{24}$$

donde la ganancia $K_v > 0$, $\hat{Z}$ es un vector de pesos estimados variantes en el tiempo y $r$ está definida por (7). Por otra parte, la actualización de los pesos de salida de la red neuronal se calcula mediante:

$$\dot{\hat{Z}} = N\beta(\eta)r - NQ\hat{Z} \tag{25}$$

donde $Q > 0$ y $N = N^T > 0$ son matrices de valores constantes.

Al sustituir (24) en (23) se obtiene la ecuación de la dinámica de lazo cerrado:

$$H\dot{r} = \tilde{Z}^T\beta(\eta) - K_v r + \tau_d + \varepsilon \tag{26}$$

donde

$$\tilde{Z} = Z - \hat{Z} \tag{27}$$

es el error de aproximación de los pesos de la red neuronal.

El análisis de estabilidad se desarrolla a partir de la función candidata de Lyapunov globalmente definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(r, \tilde{Z}) = \frac{1}{2}Hr^2 + \frac{1}{2}tr\{\tilde{Z}^T N^{-1}\tilde{Z}\}. \tag{28}$$

Al derivar (28) con respecto al tiempo y sustituir $H\dot{r}$ por (26) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \tilde{Z}) &= r(\tilde{Z}^T\beta(\eta) - K_v r + \tau_d + \varepsilon) \\ &\quad + tr\{\tilde{Z}^T N^{-1}\dot{\tilde{Z}}\}.\end{aligned} \tag{29}$$

Considerando las ecuaciones (25) y (27), y relacionándolas con la ecuación (29) se obtiene:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) = -rK_v r + r(\varepsilon_N + d_B) - tr\{\tilde{Z}^T Q\tilde{Z} - \tilde{Z}^T QZ\}.$$

Al acotar los términos se obtiene que:

$$\dot{V}(r, \tilde{Z}) \leq -\left\|\begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z}\end{bmatrix}\right\| < 0 \tag{30}$$

siempre que:

$$\left\|\begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z}\end{bmatrix}\right\| > \frac{max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B\lambda_{max}\{Q\}\}}{min\{\lambda_{min}\{K_v\}, \lambda_{min}\{Q\}\}} \tag{31}$$

y de acuerdo a la definición de UUB [13], las trayectorias del sistema de lazo cerrado (26) permanecerán en una región limitada por una hiper-esfera de radio $r_h$:

$$\left\|\begin{bmatrix} r \\ \tilde{Z}\end{bmatrix}\right\| \leq r_h = \frac{max\{(\varepsilon_N + d_B), Z_B\lambda_{max}\{Q\}\}}{min\{\lambda_{min}\{K_v\}, \lambda_{min}\{Q\}\}} \tag{32}$$

y considerando las ecuaciones (7) y (27) $e$, $\dot{e}$, $\hat{Z}$, $q_p$ y $\dot{q}_p$ son también UUB.

## V. Resultados de simulación

Las ecuaciones del modelo y los algoritmos de control desarrollados fueron simulados en MATLAB SIMULINK®, utilizando el método numérico ode4 (Runge-kutta) con un paso de integración de $[0.001]$. Como condición inicial para el modelo se eligió una posición del péndulo muy cercana al equilibrio superior en $q_p = 3$ rad. La trayectoria deseada se describe mediante la función:

$$q_d = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b \tag{33}$$

con $a = \pi/2$ rad, $\omega = \pi/6$ rad/s, $b = \pi$ rad y un desfasamiento de 0.5 rad. El controlador adaptativo por estimación de parámetros propuesto en (12) y el controlador adaptativo neuronal en (24) utilizaron los mismos valores de ganancia $Kv$ y $\Lambda$. El controlador neuronal propuesto en (24) se diseñó con $S = 10$ neuronas y se usaron valores constantes de pesos iniciales aleatorios en la matriz $G^T$, en el rango de $[-1 \;\; 1]$.

Las simulaciones se dividieron en dos ensayos. En la primera prueba se introdujo un cambio paramétrico en línea, modificando el valor de la masa del brazo $m_p$ de 0.30 kg a 0.6 kg en $t = 10$ segundos. Con el objetivo de probar la robustez de los controladores, el segundo ensayo consistió en agregar una perturbación en forma de torque al brazo del péndulo con valor de 5 Nm en $t = 15$ segundos.

### *V-A. Resultados de simulación del modelo aplicando cambios paramétricos en la masa*

Los resultados obtenidos de la prueba de seguimiento de trayectoria para las leyes de control (12) y (24) se presentan en la Figura 2. El gráfico muestra que ambos controladores son efectivos en el seguimiento de la trayectoria deseada $q_d$ a pesar del cambio paramétrico en el péndulo. En las Figuras 3 y 4 se observa la evolución temporal de la velocidad y el torque respectivamente.

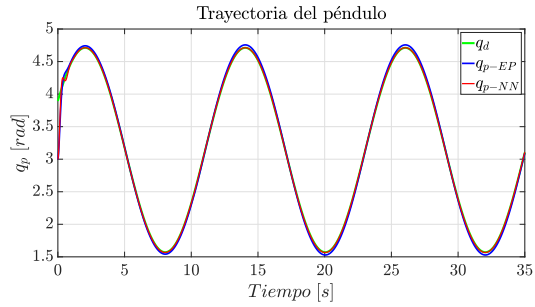



Figura 2. Seguimiento de la trayectoria deseada $q_d$ por del péndulo $q_p$, asistido por los controladores propuestos en (12) ($q_{p-EP}$) y en (24) ($q_{p-NN}$).

Los gráficos de las Figuras 5 y 6 muestran que los valores estimados por (13) y (25), y los errores de seguimiento de trayectoria están acotados, tal como se concluyó previamente en los análisis de estabilidad de la Sección IV.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

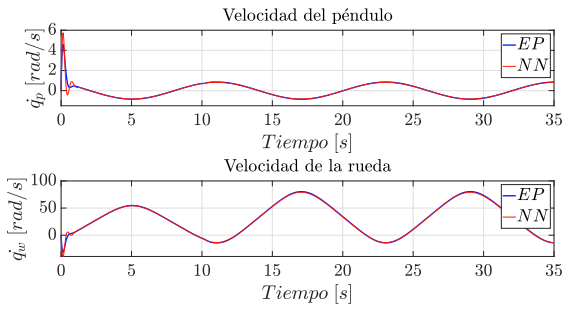



Figura 3. Evolución temporal de $\dot{q}_p$ y $\dot{q}_w$ con el mecanismo asistido por los controladores en (12)(EP) y (24)(NN).

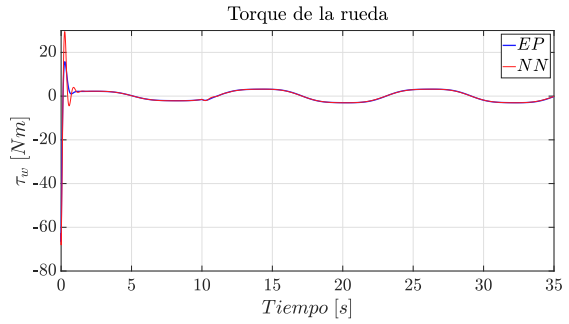



Figura 4. Torques de entrada a la rueda de reacción calculados por el controlador en (12) $(EP)$ y en (24) $(NN)$.

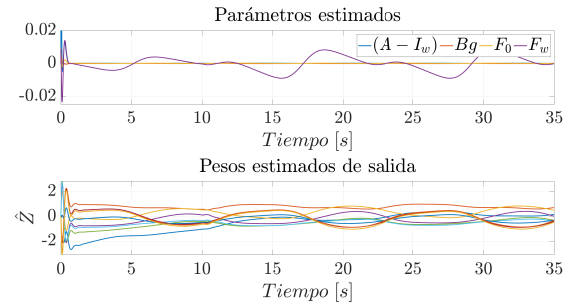



Figura 5. Estimación de parámetros desconocidos en (13) y estimación de pesos a la salida de la red neuronal en (25).

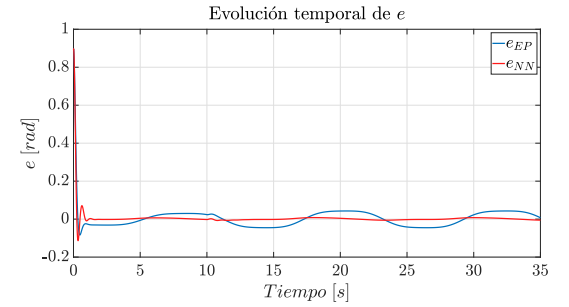



Figura 6. Evolución temporal de los errores para la ley de control (12) $(e_{EP})$ y el controlador en (24) $(e_{NN})$.

### *V-B. Resultados de simulación del modelo aplicando una perturbación*

En la Figura 7 se observa que ambos controladores cumplieron con éxito el objetivo de control propuesto, ya que a pesar de la perturbación aplicada en $t = 15$ segundos, $q_p$ tiende a $q_d$ durante toda la prueba. Los gráficos de la velocidad y torque se muestran en las Figuras 8 y 9 respectivamente.

Como se puede observar en la Figura 10 los valores de las leyes de estimación en (13) y (25), cumplen con la propiedad de acotamiento. El gráfico de la Figura 11 muestra que los errores de seguimiento están acotados y a pesar de la perturbación el sistema permanece estable.

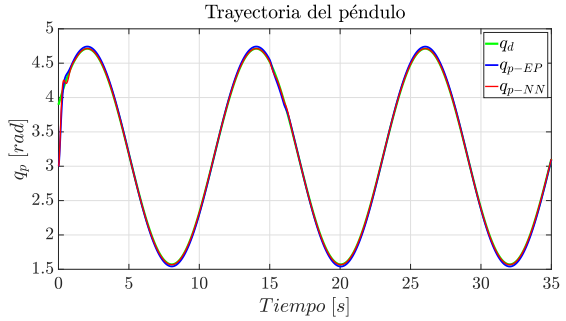



Figura 7. Evolución temporal de la trayectoria deseada $q_d$ y de $q_p$ asistida por el controlador adaptativo paramétrico en (12) $(q_{p-EP})$ y por el control neuronal en (24) $(q_{p-NN})$, en presencia de una perturbación.

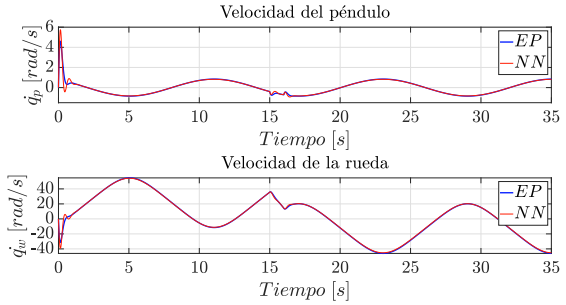



Figura 8. Evolución temporal de la velocidad $\dot{q}_p$ y $\dot{q}_w$ con el mecanismo asistido por los controladores en (12) y (24) en presencia de una perturbación.

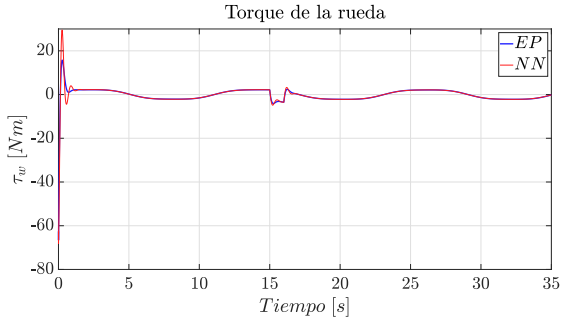



Figura 9. Torques de entrada a la rueda de reacción calculados por el controlador en (12) $(EP)$ y en (24) $(NN)$, con el mecanismo afectado por una perturbación.

En la Tabla III se muestran valores RMS obtenidos de ambos controladores en los ensayos realizados.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

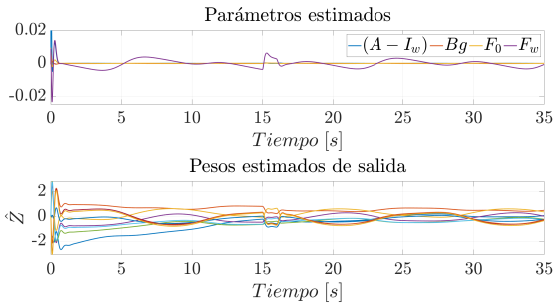



Figura 10. Estimación de parámetros desconocidos en (13) y estimación de pesos a la salida de la red neuronal en (25) con el mecanismo afectado por una perturbación.

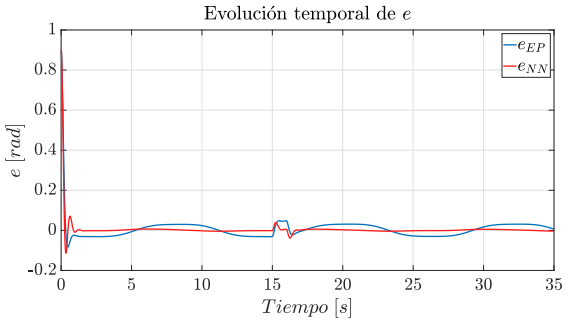



Figura 11. Evolución temporal de los errores para la ley de control (12) ($e_{EP}$) y el controlador en (24) ($e_{NN}$) en presencia de una perturbación.

Tabla III
NORMA DE LOS ERRORES

| Controlador | Cambio paramétrico (RMS) | Perturbación (RMS) |
|---|---|---|
| Estimación paramétrica | 0.0624 | 0.0591 |
| Neuronal | 0.0507 | 0.0509 |

## VI. CONCLUSIÓN

En este trabajo se han presentado dos estrategias de control para resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria en un péndulo de rueda de reacción inercial, basadas en el control adaptativo paramétrico en el cual es necesario conocer al menos la estructura del modelo del mecanismo, y el control por compensación neuronal, en el cual no es necesario conocer la estructura exacta del modelo ni los parámetros que lo componen.

Los resultados de simulación obtenidos muestran que las soluciones propuestas logran que $q_p$ siga la trayectoria deseada $q_d$ en (33) con un valor de error. Además, ambos controladores presentan robustez ante cambios paramétricos y perturbaciones aplicadas al modelo. Se observa en la Tabla III que el controlador neuronal posee niveles mejores de error en el seguimiento de la trayectoria presentada en (33); sin embargo ambos controladores pueden modificar el radio de la hiper-esfera dado por las ecuaciones (21) y (32), cambiando principalmente el parámetro de control $K_v$ en las ecuaciones (12) y (24), lo que implica cambiar los niveles de error de ambos controladores.

De acuerdo a la definición de UUB en [13], las soluciones de los sistemas de lazo cerrado (15) y (26) son uniformemente últimamente acotadas (UUB), lo que establece que las soluciones están dentro de las regiones dadas por las ecuaciones (21) y (32) correspondientes a cada sistema de lazo cerrado. Esto implica que $r$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{Z}$, $e$, $\dot{e}$ y $q_p$ presentan acotamiento de tipo uniformemente últimamente acotado (UUB). Por lo tanto, como se puede observar en los gráficos de las pruebas realizadas a los controladores, se ha cumplido con el objetivo de control propuesto.

## VII. AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Tijuana y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo brindado.

## REFERENCIAS

[1] D. J. Block, K. J. Astrom and M. W. Spong, "The reaction wheel pendulum," *Synthesis Lectures on Control and mechatronics*, vol. 1, no. 1, pp. 1-105, 2007.

[2] R. Olfati-Saber, "Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum," In Proc. IEEE Conference on Decision and Control, 2001, pp. 3764-3765.

[3] R. Iriarte, L. T. Aguilar and L. Fridman, "Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 1, pp. 92-106, 2013.

[4] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad and A. Karimi, *Adaptive control: algorithms, analysis and applications*. Springer Science & Business Media, 2011.

[5] F. W. Lewis, S. Jagannathan and A. Yesildirak, *Neural network control of robot manipulators and non-linear systems*. Padstow, Padstow, UK: CRC Press, 1998.

[6] N. K. Haddad, A. Chemori, J. Pena and S. Belghith, "Stabilization of inertia wheel inverted pendulum by model reference adaptive IDA-PBC: From simulation to real-time experiments," In 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology, IEEE, 2015, pp. 1-6.

[7] A. A. Bobtsov, A. A. Pyrkin and S. A. Kolyubin, "Adaptive stabilization of a reaction wheel pendulum on moving LEGO platform," In 2009 IEEE Control Applications, (CCA) & Intelligent Control, (ISIC), IEEE, 2009, pp. 1218-1223.

[8] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, S. Puga-Guzmán and V. Santibáñez, "Two adaptive control strategies for trajectory tracking of the inertia wheel pendulum: neural networks vis à vis model regressor," *Intelligent Automation & Soft Computing*, vol. 23, no. 1, pp. 63-73, 2017.

[9] S. A. Puga–Guzmán, J. Moreno–Valenzuela and V. Santibáñez, "Controlador neuronal para el seguimiento de trayectorias en un péndulo de rueda inercial," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 32, no. 4, pp. 204-211, 2016.

[10] R. Kelly, V. S. Davila and J. A. L. Perez, "Robot dynamics," in *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006, pp. 59-88.

[11] J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, Bergen, NJ: Prentice hall, 1991, pp. 392-433.

[12] J. Slotine, "Putting physics in control-the example of robotics," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 6, pp. 12-18, 1988.

[13] H. K. Khalil, "Lyapunov stability" in *Nonlinear Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002, pp. 168-174.

[14] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural networks*, vol. 2, no. 5, pp. 359-366, 1989.

[15] N. Sadegh, "A perceptron network for functional identification and control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 4, no. 6, pp. 982-988, 1993.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Control Adaptativo por Modos Deslizantes para Regulación de Velocidad de PMSMs

Francisco Puga*, Luis T. Aguilar†, Luis N. Coria* and Ramón Ramírez-Villalobos*
*Tecnológico Nacional de México/IT de Tijuana, Tijuana, Baja California, México,
e-mail: {francisco.puga18, luis.coria, ramon.ramirez}@tectijuana.edu.mx
†Instituto Politécnico Nacional-CITEDI, Tijuana, Baja California, México
e-mail: laguilarb@ipn.mx

***Resumen*—En este articulo se aborda la solución al problema de regulación de velocidad para motores síncronos de imán permanente, bajo variaciones del par de carga. Considerando la medición de la corriente y velocidad, se propone un controlador adaptativo por modos deslizantes para brindar propiedades de robustez frente a variaciones desconocidas del par de carga. Además, el controlador propuesto permite la reducción en las oscilaciones de alta frecuencia de la función discontinua del controlador adiciona en la planta. El controlador es analizado en lazo cerrado utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov. Resultados experimentales son presentados para demostrar la efectividad del controlador propuesto.**

## I. INTRODUCCIÓN

Debido a su pequeño tamaño, alta densidad de torque y su simple construcción el motor síncrono de imanes permanentes (PMSM, del inglés *Permanent Magnet Synchronous Motor*), tiene un rol importante en aplicaciones como: maquinaria CNC, bandas transportadoras, vehículos aéreos no tripulados, vehículos eléctricos, etc. Otra ventaja que tiene sobre los demás tipos de motores, es la ausencia de una fuente de excitación para el rotor, falta de escobillas y una mayor densidad de potencia, que proporciona una alta relación par-inercia [1]. Sin embargo, este tipo de motor se ve afectado por dinámicas no modeladas, variación de parámetros, fricción y variaciones de carga [2]. Asimismo, su operación en lazo abierto es muy sensible a perturbaciones, de tal manera que su operación en lazo cerrado es clave para un alto desempeño [3].

En el PMSM, los métodos convencionales de control, incluido el PI, no son capaces de garantizar un alto rendimiento en lazo cerrado [4]. Para mejorar el rendimiento del sistema, en años recientes muchos métodos de control han sido adoptados para el PMSM, como el control adaptativo [5], [6], modos deslizantes (SMC, del inglés *Sliding Mode Control*) [7], [8], entre otros. En un sistema de control de lazo cerrado para la regulación de velocidad en motores, la existencia de perturbaciones agrupadas causa degradación en el desempeño del controlador si este no es capaz de reprimirlas. El SMC es conocido por su robustez a ciertas variaciones de parámetros internos y perturbaciones externas, que pueden garantizar un rendimiento de control a pesar de los parámetros o las incertidumbres del modelo [9]. En este contexto, en [10] se diseña una nueva superficie deslizante para controlar el motor de inducción, y es propuesta en conjunto a una ley de adaptación, debido a la dificultad de medir la carga externa al motor y la necesidad en aplicaciones industriales de robustez. La existencia de variaciones debido al par de engranaje, los errores de medición de corriente y los armónicos de flujo restringen las aplicaciones del PMSM. En [11], se desarrolla un control por modos deslizantes adaptativo, para mejorar el rendimiento considerando variaciones de torque y exhibe un desempeño robusto satisfactorio en comparación con un controlador PI. Recientemente, en [14] se desarrolla un controlador que combina las ventajas de un controlador por modos deslizantes y el control adaptativo con modelo de referencia. El esquema propuesto, ofrece una convergencia rápida, robustez a perturnaciones y reducción de *chattering*.

En este articulo se propone un controlador robusto por modos deslizantes con ganancias adaptables (ASM, del inglés *Adaptive Sliding Mode*). Se considera este algoritmo con el fin de disminuir el chattering que un controlador por modos deslizantes de primer orden genera en el PMSM. Se presenta el diseño de una superficie deslizante, tal que, se incluyen los componentes de la corriente de estator $i_q(t)$ y la velocidad del rotor $w(t)$. Se establece que este controlador proporciona robustez al sistema en lazo cerrado. En la mayoría de los controladores de estructura variable se debe conocer el valor máximo de la carga externa, este parámetro es difícil de predecir debido a que la carga varía conforme el tiempo. Al utilizar un control adaptativo de estructura variable no es necesario conocer el factor carga del todo.

Este artículo está organizado de la manera siguiente. El modelo matemático del PMSM se presenta en la Sección II. La Sección III presenta el diseño del controlador por modos deslizantes adaptativo propuesto para el PMSM. En la Sección IV se presentan los resultados de implementacion en la plataforma de Technosoft DMcode-MS(BL). Finalmente, se presentan conclusiones en la Sección V.

## II. MODELO DINÁMICO DEL PMSM

En un PMSM, el flujo magnético en el devanado del rotor y estator son constantes debido a los campos magnéticos inducidos por los imanes. La dinámica en un marco de referencia rotatorio $(d, q)$ puede ser descrita con el modelo siguiente:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + sL_d & -pL_q w \\ pL_q w & R + sL_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_T w \end{bmatrix}, \quad (1)$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

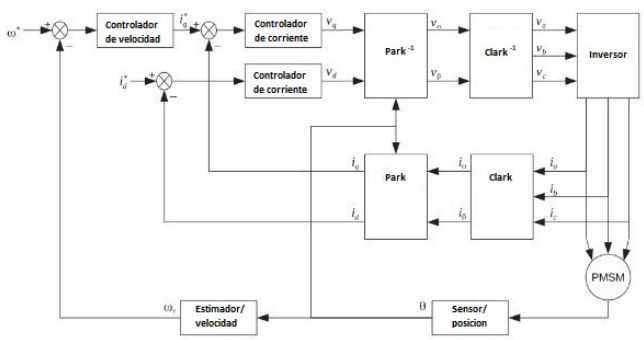



Fig. 1. Diagrama a bloques del control por campo orientado (FOC)

en donde $v_q(t)$ y $v_d(t)$ son los voltajes del estator (constituyen las entradas de control), $i_d(t)$ y $i_q(t)$ son las corrientes de estator, $w(t)$ es la velocidad angular rotor, $s$ es un operador diferencial $d/dt$, $R > 0$ es la resistencia del estator, $L > 0$ es la inductancia del estator y $p$ es el número de polos pares.

El torque electromagnético del motor síncrono de imán permanente está dado por la siguiente expresión

$$T_e = \frac{3p}{2}(L_d - L_q)i_d i_q + K_T i_q, \tag{2}$$

donde $K_T > 0$ es la constante de torque del motor. La ecuación que representa la dinámica mecánica del motor se denota por:

$$J\dot{w} + Fw = T_e - T_l, \tag{3}$$

donde $J > 0$ es la inercia del motor, $F \geq 0$ es el coeficiente de fricción y $T_l(t)$ es el torque de la carga.

Suponiendo simetría entre fases, circuitos magnéticos lineales e histéresis magnética descartables en el PMSM, el sistema representado por (1)-(3) puede ser expresado por la siguiente representación de espacios de estados.

$$\frac{d}{dt}i_d = -\frac{R}{L}i_d + pi_q w + \frac{v_d}{L}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}i_q = -\frac{R}{L}i_q - pi_d w - \frac{K_T}{L}w + \frac{v_q}{L}, \tag{5}$$

$$\dot{w} = \frac{K_T}{J}i_q - \frac{F}{J}w - \frac{T_l}{J}. \tag{6}$$

El PMSM comúnmente es controlado bajo el esquema de control de campo orientado (FOC, por sus siglas en inglés), vease Fig. 1. En este esquema la corriente de estator $i_d(t)$ es forzada a cero con la finalidad de desacoplar el sistema (4)-(6). Esto permite controlar la velocidad $w(t)$ a través de la corriente $i_q(t)$, de manera similar a un motor DC [8].

De ahora en adelante, las siguientes suposiciones serán consideradas:

S1) Los valores de los parámetros $R, L, K_T, J$ y $F$ son conocidos.

S2) El torque $T_l$ es desconocido, pero se encuentra acotado con límites superiores conocidos a priori, es decir, existe una constante positiva tal que:

$$|T_l(t)| \leq T_L. \tag{7}$$

$(S3)$ Las magnitudes de $i_q$, $i_d$ y $w$ se encuentran acotadas con límites superiores dados por el fabricante, es decir, existe una constante positiva tal que:

$$|i_d(t)| \leq i_d^+, \quad |i_q(t)| \leq i_q^+, \quad |w(t)| \leq w^+. \tag{8}$$

El objetivo de control se dirige al diseño de un controlador robusto de velocidad para el PMSM de montaje en la superficie representado en (4)-(6), considerando un sistema completamente medible. Para resolver este problema, se propone un controlador por modos deslizantes adaptativo, el cual regula de manera asíntotica a la velocidad $w(t)$. Ademas, forza a la corriente de estator $i_d(t)$ a cero, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \|w(t) - w^*\| = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|i_d(t)\| = 0, \tag{10}$$

a pesar de la presencia de perturbaciones constantes del par de carga $T_l(t) \in \mathbb{R}$.

## III. SÍNTESIS DEL CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES

Para el diseño del controlador se considera el modelo en el esquema de FOC, y se propone un controlador por modos deslizantes de primer orden. Primeramente, se definen los errores $e_d$, $e_q$ y $e_w$ como:

$$e_d = i_d, \tag{11}$$

$$e_q = i_q - i_q^*, \tag{12}$$

$$e_w = w - w^*. \tag{13}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones del error en (4)-(6) se obtiene la siguiente dinámica del error:

$$\dot{e}_d = -\frac{R}{L}e_d + pi_q w + \frac{v_d}{L}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_q = &-\frac{R}{L}(e_q + i_q^*) + \frac{v_q}{L} - \frac{d}{dt}i_q^* \\ &- (pe_d + \frac{K_T}{L})(e_w + w^*),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\dot{e}_w = \frac{K_T}{J}(e_q + i_q^*) - \frac{F}{J}(e_w + w^*) - \frac{T_l}{J}. \tag{16}$$

### A. Diseño de la superficie deslizante

En este apartado se presenta el análisis matemático para obtener la dinámica de las superficies deslizantes que se proponen en este controlador, los cuales están definidas como $S_1 = e_d$, $S_2 = \alpha e_w + e_d$ y sus derivadas como

$$\dot{S}_1 = \dot{e}_d, \tag{17}$$

$$\dot{S}_2 = \alpha\dot{e}_w + \dot{e}_d. \tag{18}$$

Primeramente, se define un controlador por modos deslizantes para la corriente $i_d(t)$ descrito por

$$v_d = -L(k_1 sgn(S_1) + k_2 S_1), \tag{19}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

en donde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ son ganancias del controlador. Sustituyendo (19) en (17) se obtiene la dinámica de la superficie deslizante $S_1$, dada por

$$\dot{S}_1 = -\frac{R}{L}S_1 + pi_q w - (k_1 sgn(S_1) + k_2 S_1), \quad (20)$$

A continuación, se define el controlador ASM para la regulación de la velocidad $w(t)$

$$v_q = \left(-\widehat{k}sgn(S_2) - k_3 S_2 + K_4 i_q^* + K_5 w^* - M\tilde{K}\right), \quad (21)$$

donde $\hat{k}$ es una ganancia de adaptación, $k_3 > 0$ y $M > 0$ son ganancias del controlador, $\tilde{K}$ es una ganancia adaptativa diferenciable y $K_4 = \frac{R}{L} - (\alpha - \sigma)\frac{K_T}{J}$, $K_5 = \frac{K_T}{L} + (\alpha - \sigma)\frac{F}{J}$. Al sustituir (21) en (18) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 = \alpha\dot{e}_w - \frac{R}{L}(e_q + i_q^*) + \frac{v_q}{L} - \frac{d}{dt}i_q^* \\ - \left(pe_d + \frac{K_T}{L}\right)(e_w + w^*).\end{aligned} \quad (22)$$

Se observa en (22), que aparece la entrada de control virtual $i_q^*(t)$ y su derivada, las cuales se definen como

$$i_q^* = \beta \int e_w(t)dt + \sigma e_w, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}i_q^* = \beta e_w + \sigma\dot{e}_w, \quad (24)$$

donde $\beta$ y $\sigma$ son ganancias positivas del controlador. En (24), se considera nula la constante de integración. Ahora, se sustituye (23) en (22) y se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 = (\alpha - \sigma)\dot{e}_w - \beta e_w - \frac{R}{L}(e_q + i_q^*) \\ - \left(pe_d + \frac{K_T}{L}\right)(e_w + w^*) + \frac{v_q}{L}.\end{aligned} \quad (25)$$

Posteriormente, se sustituye la dinámica del error $e_w$ en (25)

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 = (\alpha - \sigma)\left(\frac{K_T}{J}(e_q + i_q^*) - \frac{F}{J}(e_w + w^*) - \frac{T_l}{J}\right) \\ - \beta e_w - \frac{R}{L}(e_q + i_q^*) \\ - \left(pe_d + \frac{K_T}{L}\right)(e_w + w^*) + \frac{v_q}{L}.\end{aligned} \quad (26)$$

Para obtener la dinámica de la superficie se sustituye, (21) en (26), resultando,

$$\dot{S}_2 = -\psi_1 e_q - \psi_2 e_w - \widehat{k}sgn(S_2) - k_3 S_2 - M\tilde{K} - T, \quad (27)$$

con

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{R}{L} - (\alpha - \sigma)\frac{K_T}{J}, \\ \psi_2 &= (\alpha - \sigma)\frac{F}{J} + \beta + pe_d + \frac{K_T}{L}, \\ T &= (\alpha - \sigma)\frac{T_L}{J}.\end{aligned} \quad (28)$$

### B. *Análisis de estabilidad*

Para el analisis de estabilidad se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_2^2}{2} + \frac{\tilde{K}^2}{2}. \quad (29)$$

La derivada de (29) a lo largo de las trayectorias de (20) y (27) y la ganancia adaptable del controlador ASM, está dado por

$$\begin{aligned}\dot{V} = -\left(\frac{R}{L} + k_2\right)S_1^2 - (k_1 - pi_q w)|S_1| \\ - (\psi_1 e_q + \psi_2 e_w + T)|S_2| - \hat{k}|S_2| \\ - k_3 S_2^2 - M\tilde{K}|S_2| + \dot{\tilde{K}}\tilde{K}.\end{aligned} \quad (30)$$

Ahora, se define la ganancia de adaptación $\hat{k} = N\tilde{K} + K$, con $K > 0$ y $N > 0$, y se sustituye en (30), obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{V} = -\left(\frac{R}{L} + k_2\right)S_1^2 - (k_1 - pi_q w)|S_1| \\ - (\psi_1 e_q + \psi_2 e_w + T)|S_2| - (N\tilde{K} + K)|S_2| \\ - k_3 S_2^2 - M\tilde{K}|S_2| + \dot{\tilde{K}}\tilde{K}.\end{aligned} \quad (31)$$

Posteriormente, se define la variable diferenciable $\dot{\tilde{K}} = |S_2|$ y es sustituida en (30), dando como resultado

$$\begin{aligned}\dot{V} = -\left(\frac{R}{L} + k_2\right)S_1^2 - (k_1 - pi_q w)|S_1| \\ - (\psi_1 e_q + \psi_2 e_w + T + K)|S_2| - k_3 S_2^2 \\ - (N + M - 1)\tilde{K}|S_2|,\end{aligned} \quad (32)$$

donde $\tilde{K} > 0$. Finalmente, si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}&K > \psi_1|e_q| + \psi_2|e_w| + T, \\ &k_1 > pi_q^+ w^+, \\ &k_2 > 0, \\ &k_3 > 0, \\ &N > 1 - M > 0.\end{aligned} \quad (33)$$

se puede garantizar que $\dot{V} < 0$. Consecuentemente, se demuestra estabilidad asíntotica del controlador aún en presencia de perturbaciones y cargas aplicadas al sistema.

## IV. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados de la implementación del controlador propuesto en la plataforma experimental MCK28335 Kit C-Pro Digital Control de Technosoft®(ver Fig. 1). La implementacion se llevo a cabo bajo el esquema de control que se muestra en la Fig. 2 y se explica a continuación

P1) Se realiza la medición de posición del rotor y se calcula la velocidad.
P2) Se diseña la corriente virtual de $i_q^*$ considerando un controlador PI a partir del error de velocidad.
P3) Cuando $i_d(t) = 0$, el controlador ASM controla la velocidad apartir del error de $w(t)$ y $i_q(t)$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

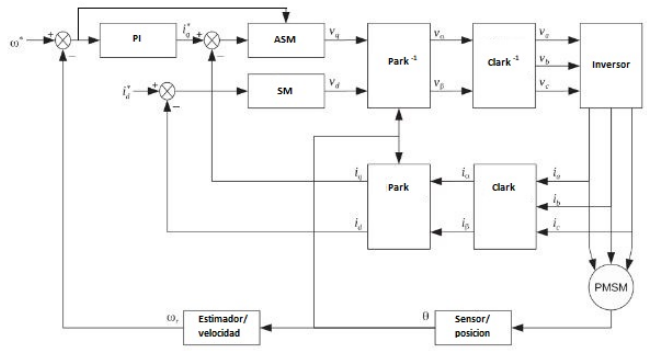



Fig. 2. Diagrama a bloques del controlador ASM

TABLA I
PARÁMETROS DEL MOTOR Y ESPECIFICACIONES ELÉCTRICAS

| Símbolo | Parámetro | Valor | Unidad |
|---|---|---|---|
| $R$ | Resistencia de estátor | 4.3 | Ohm |
| $L$ | Inductancia de estátor | $359\times10^{-3}$ | H |
| $K_T$ | Constante de torque del rotor | $24.5\times10^{-3}$ | Nm/A |
| $p$ | Número de pares de polos | 1 | |
| $F$ | Viscosidad | $0.157\times10^{-3}$ | Nms |
| $J$ | Inercia del rotor | $1.1\times10^{-6}$ | Kgm |
| $T_l$ | Torque máximo de la carga | $30\times10^{-3}$ | Nm |

### A. Descripción de la plataforma

La plataforma cuenta con un DSP TMS320LF28335, cuya función es procesar los algoritmos de control y enviar al sistema de accionamiento las señales referentes a la entrada del control, cuenta con sensores de corriente que se encargan de medir la salida del sistema de potencia DC-AC, un encoder incremental encargado de medir la posición del rotor en el motor, un PMSM Technosoft MBE.300E.500, donde sus parámetros se muestran en la Tabla I. Además, tiene integrada una interface puerto paralelo para comunicarse con el computador. En la Fig. 3 se muestra la plataforma.

### B. Resultados experimentales

En la implementación se muestran resultados en función de la respuesta del controlador a una velocidad $w^* = 900RPM$ y ganancias de $\beta = 14.87$, $\sigma = 121.34$, $K = 2$, $k_1 = 30$, $k_2 = 200$, $k_3 = 0$, $M = 1.3$ y $N = 1$, las cuales cumplen las condiciones dadas en (33). El controlador se separa en dos partes debido a que la plataforma maneja dos tiempos de muestreo diferente separados en dos etapas de control:

- El lazo de control de velocidad tiene un tiempo de muestreo de 1 ms
- El lado de control de corriente tiene un tiempo de muestreo de 0.1 ms.

El controlador propuesto se compara con controlador PI [13]. En la Fig. 4 se muestra la respuesta del controlador por modos deslizantes en comparación con un controlador PI, para esta prueba el rotor del motor no se encuentra perturbado, se utilizó un escalón como velocidad de referencia $w^*$. Se observa como el controlador por modos deslizantes lleva la velocidad a

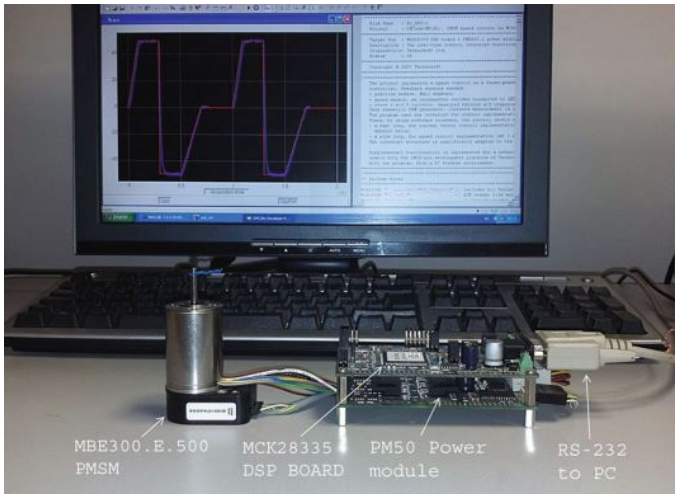



Fig. 3. Plataforma experimental TMS320F28335 control kit

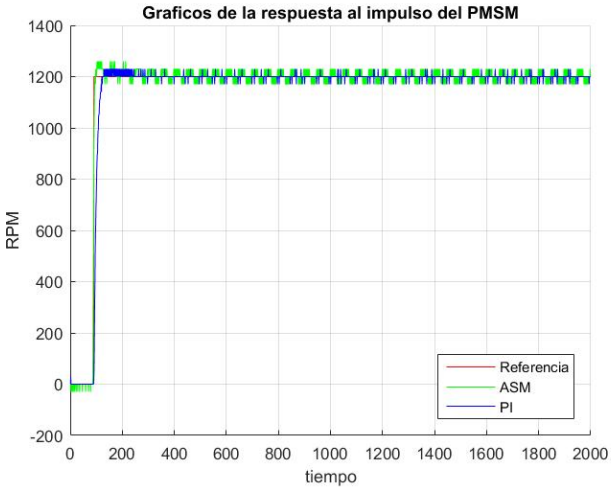



Fig. 4. Implementación del controlador PI y ASM utilizando una referencia constante de 900RPM

la referencia, mientras el controlado PI oscila de forma acotada alrededor de la referencia.

En la Fig. 5 se muestra la respuesta del controlador por modos deslizantes a través de la entrada de control, en esta se aprecia el pequeñas variaciones que se presentan por naturalidad esta clase de controladores debido a la resolución de los encoders y se puede observar que en comparación con el controlar PI, el controlador ASM genera variaciones suaves en la entrada de control que provocan que la velocidad se estabilice de forma asintótica.

En la Fig. 6 se muestra la corriente de estator $i_d$, se aprecia como el SMC de primer orden forza $i_d(t)$ a oscilar alrededor de cero. Por otra parte, se muestra la entrada de control producida por el controlador PI la cual claramente muestra un mejor comportamiento para controlar $i_d(t)$ que el SMC convencional.

Además, se realiza una implementación en donde se muestran resultados en función de la respuesta del controlador a

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

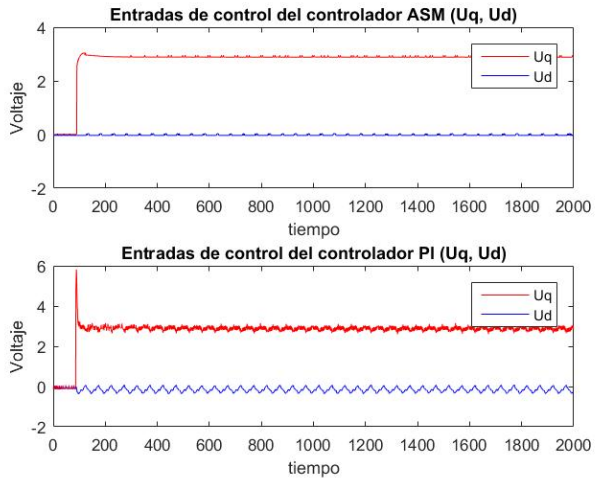



Fig. 5. Entrada de control en la implementación de PI y ASM utilizando una referencia constante de 900RPM

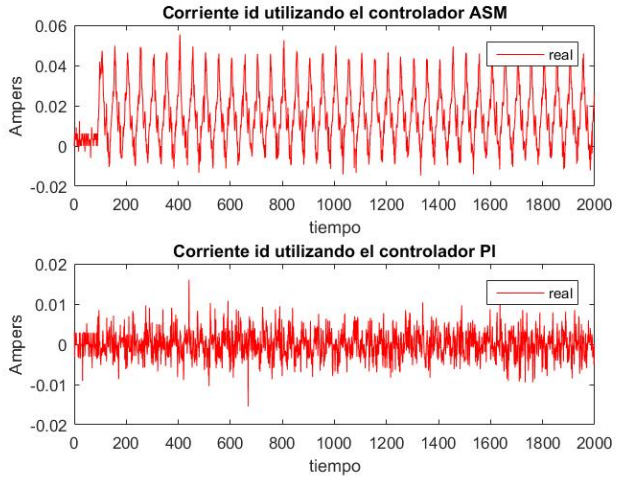



Fig. 6. Corriente $i_d$ en la implementación de PI y ASM utilizando una referencia constante de 900RPM

velocidad de $900RPM$ y un torque constante desconocido y se comparan los resultados con el de el controlador PI descrito. En la Fig. 7 se muestra la respuesta del controlador por modos deslizantes en comparación con el PI antes mencionado, donde se observa como el controlador por modos deslizantes lleva la velocidad a la referencia y se mantiene aun incluso en presencia de la carga, mientras que el controlador PI alcanza la referencia en un tiempo superior y presenta una mayor variación.

En la Fig. 8 se muestra la respuesta del controlador por modos deslizantes a través de la entrada de control en presencia de la carga y se aprecia la variación de la salida debido a las ganancias adaptativas. por otra parte en la Fig. 8, se muestra la entrada de control producida por el controlador PI.

En la Fig. 9, se muestra la corriente $i_d$ producida por ambos controladores los cuales muestran un comportamiento acotado a la referencia.

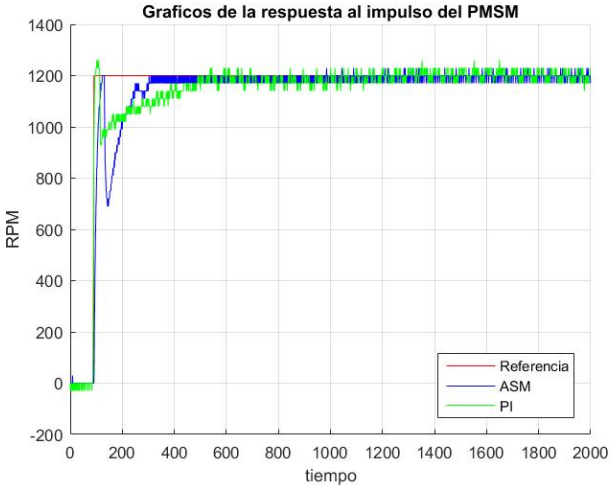



Fig. 7. Implementación del controlador PI y ASM bajo presencia de una carga constante, utilizando una referencia de 900RPM

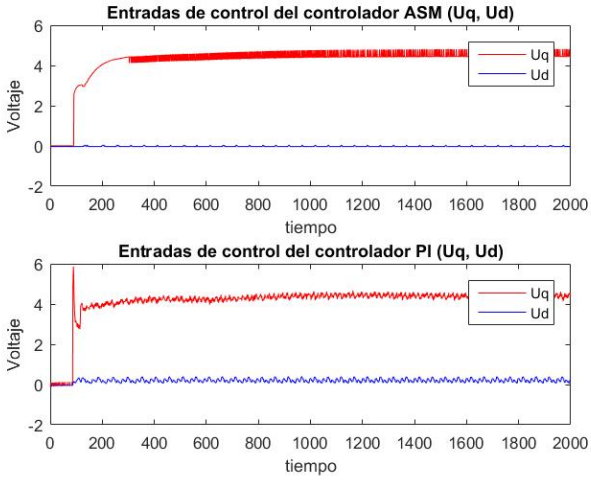



Fig. 8. Entrada de control en la implementación de PI y ASM bajo presencia de una carga constante, utilizando una referencia de 900RPM

## V. CONCLUSIÓN

En este articulo se propuso un controlador por modos deslizantes adaptativo que resuelve el problema de control de velocidad del motor síncrono de imán permanente en presencia de carga constante. El controlador propuesto aprovecha los cambios en las corrientes de estátor para estabilizar el motor bajo perturbaciones y disminuyendo los efectos del fenómeno chattering. El desempeño del controlador fue evaluado en la plataforma MCK28335 Kit C-Pro Digital Control de Technosoft®. Se realizaron pruebas del esquema propuesto comparando con un controlador PI. Se agregó una carga constante de magnitud desconocida con la finalidad de analizar el comportamiento del controlador ASM bajo perturbaciones externas de carga y se presentaron resultados gráficos.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

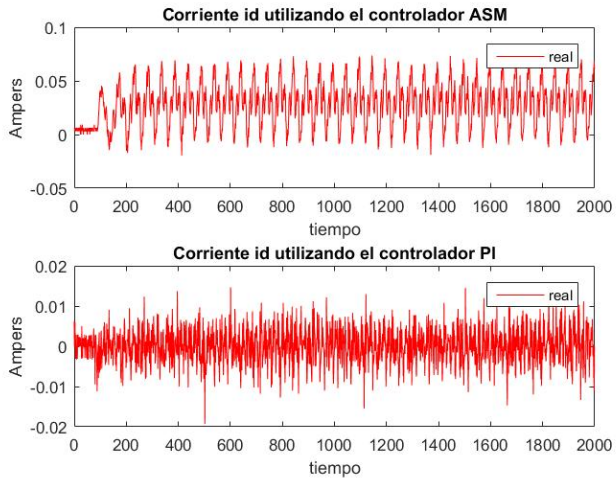



Fig. 9. Corriente $i_d$ en la implementación de PI y ASM bajo presencia de una carga constante, utilizando una referencia de 900RPM

## REFERENCIAS

[1] A. V. Sant and K. R. Rajagopal, "PM Synchronous Motor Speed Control Using Hybrid Fuzzy-PI With Novel Switching Functions," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 45, no. 10, pp. 4672-4675, Oct. 2009.

[2] S. Li and Z. Liu "Adaptive Speed control for permanent magnet synchronous motor system with variations of load inertia," IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 56, no.88, pp. 3050-3059, aug 2009.

[3] A. Akrad, M. Hilairet, R. Ortega and D. Diallo, "Interconnection and Damping Assignment approach for reliable PM synchronous motor control," 2007 IET Colloquium on Reliability in Electromagnetic Systems, Paris, France, 2007, pp. 1-6.

[4] Ying Liu, Bo Zhou and Sichen Fang, "Sliding mode control of PMSM based on a novel disturbance observer," 2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Xi'an, 2009, pp. 1990-1994, doi: 10.1109/ICIEA.2009.5138551.

[5] Yoon-Seok Han, Jung-Soo Choi and Young-Seok Kim, "Sensorless PMSM drive with a sliding mode control based adaptive speed and stator resistance estimator," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, no. 5, pp. 3588-3591, Sept 2000

[6] F. G. Rossomando and C. M. Soria, "Adaptive Neural Sliding Mode Control in Discrete Time for a SCARA robot arm", in IEEE Latin America Transactions, vol. 14, no. 6, pp. 2556-2564, June 2016, doi: 10.1109/TLA.2016.7555218.

[7] S. Li, M. Zhou and X. Yu, "Design and Implementation of Terminal Sliding Mode Control Method for PMSM Speed Regulation System," in IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 9, no. 4, pp. 1879-1891, Nov. 2013.

[8] Ramirez-Villalobos, Ramon and Ferreira de Loza, Alejandra and Aguilar, Luis and Coria, Luis. (2016). "Robust Sensorless Speed-tracking Controller for Surface-Mount Permanent Magnet Synchronous Motors". 10.1109/CDC.2016.7798340.

[9] X. Zhang, L. Sun, K. Zhao and L. Sun, "Nonlinear Speed Control for PMSM System Using Sliding-Mode Control and Disturbance Compensation Techniques", IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 28, no. 3, pp. 1358-1365, March 2013.

[10] Patakor, Fizatul Aini and Sulaiman, Marizan and Ibrahim, Zulkifilie. (2013). "Sliding Mode Speed Control for Induction Motor Drives with State-Dependent Gain Method". International Review of Electrical Engineering. 8. 1446-1453.

[11] J. Liu, H. Li and Y. Deng, "Torque Ripple Minimization of PMSM Based on Robust ILC Via Adaptive Sliding Mode Control", in IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 33, no. 4, pp. 3655-3671, April 2018, doi: 10.1109/TPEL.2017.2711098.

[12] B. Adhavan, A. Kuppuswamy, G. Jayabaskaran and V. Jagannathan, "Field oriented control of Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) using fuzzy logic controller", 2011 IEEE Recent Advances in Intelligent Computational Systems, Trivandrum, Kerala, 2011, pp. 587-592.

[13] Technosoft. (2013). DM-Code-S(BL) for MCK28335 plug-in for DM-CDPro. Switzerland: Technosoft.

[14] Jiang, J., Zhou, X., Zhao, W., Li, W. "A model reference adaptive sliding mode control for the position control of permanent magnet synchronous motor". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. 2020.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Estabilización por el método PID-PBC de un robot autobalanceable sobre una rampa

Isaac Gandarilla[1], Víctor Santibáñez[2] y Jesús Sandoval[3]

***Resumen*— En este trabajo se presenta el diseño de una ley de control, basada en el método PID-PBC, para estabilizar el robot autobalanceable sobre una rampa. El robot autobalanceable es un plataforma interesante para probar leyes de control, por ser un sistema subactuado y también un robot móvil. Se demuestra estabilidad asintótica de la posición deseada utilizando el teorema de Barbashin–Krasovskii. Resultados experimentales en tiempo real muestran un buen desempeño de la ley de control propuesta.**

## I. Introducción

Los sistemas de control basados en moldeo de energía han sido usados para el control de sistemas mecánicos subactuados. Dos de los métodos de diseño de control desarrollados para esta clase de sistemas son: el Lagrangiano Controlado, presentado en [1] y el método IDA-PBC, propuesto en [2]. Una característica que comparten ambos métodos es la necesidad de recurrir a un paso de igualación entre la dinámica de la planta y la dinámica deseada impuesta con una estructura adecuada. Como consecuencia de esta igualación, se requiere resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, cuyas soluciones conducen a una ley de control que asegura la regulación de posición de las variables articulares del sistema mecánico subactuado. Recientemente, en [3], los autores propusieron un método basado en moldeo de energía para el control de sistemas mecánicos subactuados, en el cual no es necesario resolver ecuaciones diferenciales parciales, ya que no recurren a la igualación de los dos modelos dinámicos (malla abierta y malla cerrada), llamado PID-PBC en [4]. El nombre de este esquema de control resulta del hecho de este es un PID no lineal construido a partir de una salida pasiva que está en función de las velocidades del sistema, en lugar de la forma ortodoxa del PID clásico que depende de los errores de posición. Cabe señalar que la proposición hecha en [3] se basa en la frágil técnica de linealización parcial, como fue propuesta en [5]. Una versión del PID-PBC en la que se eliminó la linealización parcial, fue desarrollada usando la formulación hamiltoniana, y presentada en [6], mientras que en [4] se hizo otra propuesta, pero en formulación lagrangiana.

*Este proyecto ha sido parcialmente financiado por los proyectos TecNM, CONACyT 134534 y y CONACYT 166636. Agradecemos a CONACyT por los apoyos dados.

[1] Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27000 igandarillae@gmail.com

[2] Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27000 vsantiba@itlalaguna.edu.mx

[3] Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Paz, La Paz, B. C. S., 23080 jesus.sg@lapaz.tecnm.mx

Con el propósito de observar el desempeño del PID-PBC en la regulación de posición de sistemas mecánicos subactuados, en este trabajo se presenta el diseño y los resultados experimentales de un controlador diseñado siguiendo los pasos mostrados en [4], para la estabilización de un robot autobalanceable en una rampa. El robot autobalanceable, también llamado péndulo invertido sobre ruedas, puedes ser visto tanto como un robot móvil, o como un sistema mecánico subactuado. estas características lo convierten en un sistema desafiante desde el punto de vista del control automático, tanto por su uso como vehículo de transporte, como por la dificultad que supone controlar cualquier sistema subactuado. Ejemplos del control del robot autobalanceable, en los que se aborda su control al desplazarse sobre un plano horizontal, se encuentran en [7], [8], [9], [10] y [11]. Tomando en cuenta el uso del robot autobalanceable como medio de transporte, un escenario común es su desplazamiento sobre, lo cual ha sido investigada en los trabajos [12], [13] y [14].

El resto de este trabajo se organiza de la siguiente manera: la sección II contiene un resumen del método propuesto en [4], mientras en la sección III detalla el diseño de la ley de control propuesta en este trabajo y se muestra el análisis de estabilidad en el que se demuestra estabilidad asintótica de la posición deseada. En la sección IV se presentan los resultados experimentales en tiempo real, para validar el controlador propuesto. Finalmente, en la sección V se dan algunas conclusiones

## II. Método de control PID-PBC

A continuación se presenta un resumen del método de control PID-PBC, reportado en [4].

### *II-A. Modelo dinámico de la planta: una clase de sistemas mecánicos subactuados*

El método de control PID-PBC puede aplicarse a sistemas mecánicos subactuados cuya dinámica pueda expresarse, usando la ecuaciones de Euler-Lagrange, como:

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = G\boldsymbol{\tau}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \nabla_{\boldsymbol{q}} V(\boldsymbol{q})$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ es el vector de fuerzas centrifugas y de Coriolis, y $V(\boldsymbol{q})$ es la función de energía potencial. Asumiendo que la matriz de distribución $G$ tiene la forma

$$G = \begin{bmatrix} I_{m\times m} \\ 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}.$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

entonces la ecuación (1) puede ser reescrita, separando las coordenadas actuadas de las no actuadas, como:

$$m_{aa}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_a + m_{au}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_u + c_a(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \nabla_{\boldsymbol{q}_a}V(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

$$m_{au}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_a + m_{uu}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_u + c_u(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \nabla_{\boldsymbol{q}_u}V(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}_{n-m}, \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{q}_a \in \mathbb{R}^m$ es el vector de coordenadas actuadas, $\boldsymbol{q}_u \in \mathbb{R}^{n-m}$ es el vector de coordenadas no actuadas (de manera que, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_a^T & \boldsymbol{q}_u^T\end{bmatrix}^T$), $c_a\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^m$ y $c_u\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ son los vectores de fuerzas centrifugas y de Coriolis actuados y no actuados, correspondientemente, con $c_a \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $c_u \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n}$. Los términos $m_{aa} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m_{au} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, y $m_{uu} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ son submatrices de $M$, por lo que la matriz de inercias se puede representar como

$$M = \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{au} \\ m_{au}^T & m_{uu}\end{bmatrix}.$$

### *II-B. Objetivo de control y diseño de un PID-PBC*

El objetivo de control consiste en lograr que las trayectorias $[\boldsymbol{q}^T \;\; \dot{\boldsymbol{q}}^T]^T$ tiendan asintóticamente al valor constante $[\boldsymbol{q}_d^T \;\; \boldsymbol{0}^T]^T$, donde $\boldsymbol{q}_d$ se define como:

$$\boldsymbol{q}_d = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{a_d} \\ \boldsymbol{q}_u^*\end{bmatrix}, \quad (4)$$

siendo $\boldsymbol{q}_{a_d}$ un vector de valores deseados constantes para las articulaciones actuadas y $\boldsymbol{q}_u^*$ las posiciones deseadas constantes en las articulaciones no actuadas que satisfacen

$$\nabla_{\boldsymbol{q}_u}V_u\Big|_{\boldsymbol{q}_u=\boldsymbol{q}_u^*} = \boldsymbol{0}_{n-m}.$$

Aunque en el método PID-PBC no es necesario resolver ecuaciones diferenciales parciales, sí es requerido que el sistema que se desea estabilizar cumpla con ciertas suposiciones. Del trabajo publicado en [4] sobre el método PID-PBC, estas suposiciones son:

- A1. $M$ es función únicamente de $\boldsymbol{q}_u$.
- A2. $m_{aa}$ es constante.
- A3. $V$ puede ser expresada como:

$$V(\boldsymbol{q}) = V_a(\boldsymbol{q}_a) + V_u(\boldsymbol{q}_u).$$

- A4. Las columnas de la matriz $L$, definida como

$$L = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ \frac{k_a-k_u}{k_u}m_{aa}m_{uu}^{-1}\end{bmatrix},$$

  con $k_a, k_u \in \mathbb{R}$ y $k_a \neq k_u$, generan una distribución involutiva.

Si el sistema a controlar cumple con las suposiciones A1-A4, entonces el vector de entradas de control $\boldsymbol{\tau}$ en (2) puede definirse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{q}_a}V_a, \quad (5)$$

donde el término $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ está dado por

$$\boldsymbol{u} = \frac{T(\boldsymbol{q})^T}{k_e}\Big[-K_PT(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d - \nabla\boldsymbol{\gamma}\Phi\left(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\kappa}\right) - K_D\frac{d}{dt}\left(T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d\right)\Big], \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{q}) = T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d$$

donde $K_P, K_D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $k_e \in \mathbb{R}$, $K_P > 0$, $K_D \geq 0$; $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times m}$ es un término libre que debe ser una matriz de rango pleno que agrega cierto grado de libertad en el diseño de la ley de control; $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función que debe ser definida positiva con respecto a $\boldsymbol{\gamma}$ y tener un mínimo aislado en $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}_d)$; $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}_d)$, con $\boldsymbol{q}_d$ definido en (4). En (6) se puede observar que la acción proporcional es producida por el término $-K_PT(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d$, la acción integral es creada por el término $-\nabla\boldsymbol{\gamma}\Phi\left(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\kappa}\right)$, que es una función de la integral con respecto a tiempo de $\boldsymbol{y}_d$ y el término $-K_D\frac{d}{dt}\left(T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d\right)$ genera la acción derivativa. Esta ley de control puede reescribirse como:

$$\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{q})^TK(\boldsymbol{q}_u)^{-1}\left\{-K_PT(\boldsymbol{q})y_d - \nabla\boldsymbol{\gamma}\Phi\left(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\kappa}\right) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\right\} \quad (7)$$

con:

$$\begin{aligned}
y_d &= k_a\dot{\boldsymbol{q}}_a + (k_a - k_u)m_{aa}^{-1}m_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u, \\
K &= k_eI_m + k_aK_DTm_{aa}^{-1}T^T \\
&\quad + k_uK_DT\left[m_{aa}^{-1}m_{au}\left(m_{uu}^s\right)^{-1}m_{au}^Tm_{aa}^{-1}\right]T^T, \\
\boldsymbol{s} &= K_D\dot{T}y_d + K_DT\Big\{k_um_{aa}^{-1}m_{au}\left(m_{uu}^s\right)^{-1}\beta(\boldsymbol{q}_u,\dot{\boldsymbol{q}}) \\
&\quad + [k_a - k_u]\,m_{aa}^{-1}\dot{m}_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u - k_am_{aa}^{-1}\nabla_{\boldsymbol{q}_u}\left(m_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u \\
&\quad - k_um_{aa}^{-1}m_{au}\left(m_{uu}^s\right)^{-1}m_{au}^Tm_{aa}^{-1}\nabla_{\boldsymbol{q}_u}\left(m_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \left[\nabla_{\boldsymbol{q}_u}(m_{uu}\dot{\boldsymbol{q}}_u) - \frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{q}_u}^T(m_{uu}\dot{\boldsymbol{q}}_u)\right]\dot{\boldsymbol{q}}_u + \nabla_{\boldsymbol{q}_u}V_u \\
&\quad + \nabla_{\boldsymbol{q}_u}\left(m_{au}^T\dot{\boldsymbol{q}}_a\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u - \nabla_{\boldsymbol{q}_u}^T\left(m_{au}^T\dot{\boldsymbol{q}}_a\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u, \\
m_{uu}^s &= m_{uu} - m_{au}^Tm_{aa}^{-1}m_{au},
\end{aligned}$$

donde se usó la dinámica de malla abierta (2)-(3) para sustituir los términos de aceleración que surgen de $K_D\frac{d}{dt}\left(T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{y}_d\right)$ por expresiones en función de las posiciones y velocidades articulares.

### *II-C. Sistema en lazo cerrado*

El sistema en lazo cerrado resulta de sustituir la ley de control (5) en (2) y (3), tal que la dinámica en términos de las articulaciones actuadas y no actuadas puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{q}}_a &= -\left[m_{aa}^{-1}m_{au}\left(m_{uu}^s\right)^{-1}m_{au}m_{aa}^{-1} + m_{aa}^{-1}\right] \\
&\quad \times\left[\nabla_{\boldsymbol{q}_u}\left(m_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u - T^TK^{-1}\left\{-K_PTy_d\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\nabla\boldsymbol{\gamma}\Phi\left(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa}\right) - \boldsymbol{s}\right\}\right] + m_{aa}^{-1}m_{au}\left(m_{uu}^s\right)^{-1}\beta, \quad (8) \\
\ddot{\boldsymbol{q}}_u &= -\left(m_{uu}^s\right)^{-1}\beta + \left(m_{uu}^s\right)^{-1}m_{au}m_{aa}^{-1}\left[\nabla_{\boldsymbol{q}_u}\left(m_{au}\dot{\boldsymbol{q}}_u\right)\dot{\boldsymbol{q}}_u\right. \\
&\quad \left.-T^TK^{-1}\left\{-K_PTy_d - \nabla\boldsymbol{\gamma}\Phi\left(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa}\right) - \boldsymbol{s}\right\}\right], \quad (9)
\end{aligned}$$

y puede verificarse que tiene un equilibrio aislado en $[\boldsymbol{q} \;\; \dot{\boldsymbol{q}}] = [\boldsymbol{q}_d \;\; \boldsymbol{0}_n]^T$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

### *II-D. Análisis de estabilidad*

Para probar que $[\boldsymbol{q}^T \quad \dot{\boldsymbol{q}}^T]^T = [\boldsymbol{q}_d^T \quad \mathbf{0}_n^T]^T$es un equilibrio estable, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$H_d = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M_d(\boldsymbol{q}_u)\dot{\boldsymbol{q}} + V_d(\boldsymbol{q}), \tag{10}$$

en la cual

$$\begin{aligned}
M_d &= \begin{bmatrix} k_e k_a m_{aa} + k_a^2 \tilde{K}_D(\boldsymbol{q}_u) & B(\boldsymbol{q}_u) \\ B(\boldsymbol{q}_u)^T & A(\boldsymbol{q}_u) \end{bmatrix}, \\
A &= k_e k_u m_{uu}^s + k_e k_a m_{au}^T m_{aa}^{-1} m_{au} \\
&\quad + (k_a - k_u)^2 m_{au}^T m_{aa}^{-1} \tilde{K}_D m_{aa}^{-1} m_{au}, \\
B &= k_e k_a m_{au}^T + k_a(k_a - k_u) m_{au}^T m_{aa} \tilde{K}_D, \\
\tilde{K}_D &= \frac{1}{k_a^2} \nabla_{\boldsymbol{q}_a}(\boldsymbol{\gamma}) K_D \nabla_{\boldsymbol{q}_a}^T(\boldsymbol{\gamma}), \\
V_d &= k_e k_u V_u(\boldsymbol{q}_u) + \Phi(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q}_d)).
\end{aligned}$$

La función (10) es definida positiva si $k_a, k_e, k_u$ son constantes seleccionadas tales que $M_d > 0$ y $V_d$ tenga un mínimo aislado en $\boldsymbol{q}_d$. La derivada temporal de (10), a lo largo de las trayectorias de (8)-(9) es

$$\dot{H}_d = -\|T y_d\|_{K_P}^2. \tag{11}$$

Dado que (11) es semidefinida negativa, $[\boldsymbol{q}^T \quad \dot{\boldsymbol{q}}^T]^T = [\boldsymbol{q}_d^T \quad \mathbf{0}_n^T]^T$ es un equilibrio estable.

## III. PID-PBC PARA ESTABILIZAR EL ROBOT AUTOBALANCEABLE SOBRE UNA RAMPA

En esta sección se muestra el diseño de un PID-PBC para la estabilización de un robot autobalanceable sobre una rampa.

### *III-A. Modelo dinámico del robot autobalanceable sobre una rampa*

La figura 1 muestra un esquema del robot autobalanceable sobre una rampa con un ángulo de inclinación $\phi$. El ángulo entre el péndulo es representado por $\psi$ y se mide desde el eje $y$ positivo, mientras que $\theta$ es el ángulo de las llantas medido con respecto al eje $y$ positivo y $\tau$ es el par producido por los motores eléctricos responsables del movimiento de las llantas. Los parámetros físicos son indicados en la Tabla I.

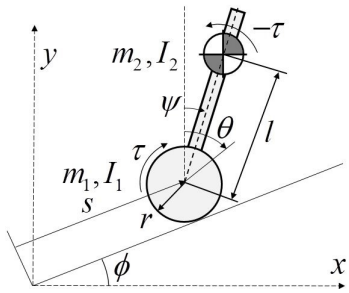



Fig. 1. Robot autobalanceable sobre una rampa

Tabla I
PARÁMETROS DEL ROBOT AUTOBALANCEABLE

| Parámetro | Descripción [unidad] |
|---|---|
| $l$ | Distancia del centro de masa del cuerpo del robot [m] |
| $r$ | Radio de la ruedas [m] |
| $m_1$ | Masa de las ruedas [kg] |
| $m_2$ | Masa del cuerpo del robot [kg] |
| $I_1$ | Inercia de las ruedas [kg·m$^2$] |
| $I_2$ | Inercia del cuerpo del robot [kg·m$^2$] |
| $g$ | Aceleración de la gravedad [m/s$^2$] |

La matriz de inercias $M$ y la función de energía potencial $V$ del robot autobalanceable sobre una rampa son

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} c & b\cos(\psi+\phi) \\ b\cos(\psi+\phi) & a \end{bmatrix}, \\
V &= d\cos(\psi) + e\theta,
\end{aligned}$$

donde $a = m_2 l^2 + I_2$, $b = l m_2 r$, $c = [2m_1 + m_2]r^2 + 2I_1$, $d = m_2 g l$, $e = (m_2 + 2m_1) g r \sin(\phi)$, y $g$ es la aceleración gravitacional.

La dinámica del robot autobalanceable sobre una rampa, obtenida por medio de las ecuaciones Euler-Lagrange, es

$$\begin{aligned}
c\ddot{\theta} + b\cos(\psi+\phi)\ddot{\psi} - b\sin(\psi+\phi)\dot{\theta}\dot{\psi} + e &= \tau, \\
b\cos(\psi+\phi)\ddot{\theta} + a\ddot{\psi} - d\sin(\psi) &= -\tau,
\end{aligned}$$

El conjunto de equilibrios con $\tau = e$ está dado por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \psi = \arcsin\left(\frac{e}{d}\right), \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0 \right\}.$$

El objetivo de control que se busca cumplir en este trabajo es estabilizar el robot autobalanceable sobre la rampa (ver figura 1), esto es,

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_d}{r} \\ \psi^* \end{bmatrix}, \tag{14}$$

donde $s_d$ es la distancia que se desea recorra el robot desde su posición inicial y $\psi^*$ está dado por

$$\psi^* = \arcsin\left(\frac{e}{d}\right).$$

En el caso del robot autobalanceable, de las ecuaciones (12) y (13), es claro que la matrix $G$ no tiene la forma adecuada. Un cambio de variables es usado para solucionar este problema. las nuevas coordenadas son $\boldsymbol{q} = [q_1 \;\; q_2]^T$, donde

$$\begin{aligned}
q_1 &= \theta - \psi, \\
q_2 &= \psi.
\end{aligned}$$

Aplicando este cambio de variables, (III-A) y (III-A) se expresan como:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} c & c + b\cos(q_2+\phi) \\ c + b\cos(q_2+\phi) & a + 2b\cos(q_2+\phi) + c \end{bmatrix}, \\
V &= d\cos(q_2) + e\left[q_1 + q_2\right],
\end{aligned} \tag{15}$$

mientras que la dinámica en lazo abierto se reescribe como

$$\begin{aligned}
m_{aa}\ddot{q}_1 + m_{au}\ddot{q}_2 + c_a\dot{q}_2 + \nabla_{q_1} V &= \tau, \\
m_{au}\ddot{q}_1 + m_{uu}\ddot{q}_2 + c_u\dot{q}_2 + \nabla_{q_2} V &= 0,
\end{aligned}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

con

$$\begin{aligned} m_{aa} &= c, \\ m_{au} &= c + b\cos(q_2+\phi), \\ m_{uu} &= a + 2b\cos(q_2+\phi) + c, \\ c_a &= -b\sin(q_2+\phi)\dot{q}_2, \\ c_u &= -b\sin(q_2+\phi)\dot{q}_2, \\ \nabla_{q_1} V &= e, \\ \nabla_{q_2} V &= e - d\sin(q_2). \end{aligned}$$

La posición deseada, expresada en función de las nuevas coordenadas, está dada por:

$$\boldsymbol{q}_d = \begin{bmatrix} q_{1_d} \\ q_{2_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_d}{r} - q_2^* \\ q_2^* \end{bmatrix},$$

Puede verificarse de la matriz (15) muestra que tanto A1 como A2 se cumplen, mientras la condición A3 se satisface con $V_a = eq_1$ y $V_u = d\cos(q_2) + eq_2$. En cuanto a la condición A4, dado que para el robot autobalanceable de dos grados de libertad, como para cualquier otro sistema mecánico subactuado de dos grados de libertad, la matriz $L$ se convierte en un vector columna, por lo que esta condición se satisface de manera trivial ya que cualquier distribución generada por un solo vector es involutiva.

Habiéndose probado que las condiciones de igualación son satisfechas, el paso siguiente es definir la ley de control (7). En el caso del robot autobalanceable a posicionarse en un punto sobre una pendiente de inclinación constante, se define como:

$$\tau = u + e, \tag{16}$$

donde:

$$\begin{aligned} u &= k(q_2)^{-1}\left\{-k_P y_d - k_I \tanh\left(k_s\left(\gamma(q_1,q_2)+\kappa\right)\right)\right. \\ &\quad \left. -s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\right\}, \qquad (17) \\ y_d &= k_a\dot{q}_1 + (k_a - k_u)\frac{c + b\cos(q_2+\phi)}{c}\dot{q}_2, \\ \gamma &= k_a q_1 + \frac{(k_a-k_u)(cq_2 + b\sin(q_2+\phi))}{c}, \\ k &= k_e + \frac{k_a k_D}{c} + k_u k_D \frac{(c+b\cos(q_2+\phi))^2}{c^2 m_{uu}^s}, \\ s &= k_D\left\{k_u\frac{c+b\cos(q_2+\phi)}{c}\beta(q_2,\dot{q}_2)\right. \\ &\quad - [k_a - k_u]\frac{b\sin(q_2+\phi)}{c}\dot{q}_2^2 \\ &\quad \left. - \left[\frac{k_a}{c} - \frac{k_u(c+b\cos(q_2+\phi))^2}{c^2 m_{uu}^s}\right] b\sin(q_2+\phi)\dot{q}_2^2\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= -b\sin(q_2+\phi)\dot{q}_2^2 - d\sin(q_2) + e, \\ m_{uu}^s &= a + 2b\cos(q_2+\phi) + c - \frac{(c+b\cos(q_2+\phi))^2}{c}, \\ \Phi &= k_I \ln(\cosh(\gamma-\kappa)). \end{aligned}$$

La dinámica de lazo cerrado del robot autobalanceable sobre una rampa, con la ley de control (16), está dada por

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ -\frac{m_{au}^2 c_u \dot{q}_2}{m_{aa}^2 m_{uu}^s} - \frac{c_u\dot{q}_2}{m_{aa}} + \frac{m_{au}}{m_{aa}m_{uu}^s}\beta \\ -\frac{m_{au}^2[-k_P y_d - k_I\tanh(k_s[\gamma+\kappa]) - s]}{m_{aa}^2 m_{uu}^s K} \\ -\frac{-k_P y_d - k_I\tanh(k_s[\gamma+\kappa]) - s}{m_{aa}K} \\ -\frac{\beta}{m_{uu}^s} + \frac{m_{au}c_u\dot{q}_2}{m_{aa}m_{uu}^s} \\ -\frac{m_{au}[k_P y_d - k_I\tanh(k_s[\gamma+\kappa]) - s]}{m_{aa}m_{uu}^s K} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

con un equilibrio en el punto $[\boldsymbol{q} \quad \dot{\boldsymbol{q}}]^T = [\boldsymbol{q}_d \quad \mathbf{0}_2]^T$.

### *III-B. Análisis de estabilidad asintótica*

Como función candidata de Lyapunov se usa la siguiente expresion:

$$H_d(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M_d \dot{\boldsymbol{q}} + V_d(\boldsymbol{q}), \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned} M_d &= \begin{bmatrix} k_e k_a c + k_a^2 k_D & B \\ B & A \end{bmatrix}, \\ A &= k_e k_u m_{uu}^s + k_e k_a \frac{m_{au}^2}{c} + (k_a - k_u)^2 \frac{k_D m_{au}^2}{c^2}, \\ B &= k_e k_a m_{au} + k_a(k_a - k_u)\frac{k_D m_{au}}{c}, \\ V_d &= k_e k_u\left[d\cos(q_2) + eq_2\right] + k_I \ln\left(\cosh\left(k_s\left[\gamma-\kappa\right]\right)\right). \end{aligned}$$

La función de Lyapunov (19) es definida positiva para valores de $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ dentro del conjunto $D$ definido como

$$D = \left\{\left[\boldsymbol{q}^T \quad \dot{\boldsymbol{q}}^T\right]^T \in \mathbb{R}^4 : q_2 \in (\zeta_-, \zeta_+)\right\},$$

donde

$$\begin{aligned} \zeta_+ &= \text{mín}\left\{q_2 : \det(M_d) = 0, q_2 > 0\right\} \\ \zeta_- &= \text{máx}\left\{q_2 : \det(M_d) = 0, q_2 < 0\right\} \end{aligned}$$

La derivada temporal de (19), a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (18), es:

$$\dot{H}_d = -k_p\left[k_a\dot{q}_1 + [k_a - k_u]\frac{c+b\cos(q_2+\phi)}{c}\dot{q}_2\right]^2,$$

la cual resulta ser semidefinida negativa, por lo que $[\boldsymbol{q}_d \quad \mathbf{0}_2]^T$ es un equilibrio estable. Para probar estabilidad asintótica del mismo punto, se invoca el Teorema de Barbashin-Krasovskii (Corollary 4.1 [15]). Sea $S$ un conjunto definido como

$$\mathcal{S} = \left\{\left[\boldsymbol{q}^T \quad \dot{\boldsymbol{q}}^T\right]^T \in D : \dot{H}_d = 0\right\}.$$

Las trayectorias del sistema (18) que se encuentran dentro del conjunto $\mathcal{S}$ son las que cumplen con:

$$k_a\dot{q}_1(t) + [k_a - k_u]\frac{c+b\cos(q_2(t)+\phi)}{c}\dot{q}_2(t) \equiv 0. \tag{20}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

Integrando (20) con respecto al tiempo resulta en

$$k_a q_1(t) + [k_a - k_u]\,\frac{cq_2 + \sin\left(q_2(t) + \phi\right)}{c} \equiv C_1, \quad (21)$$

con $C_1$ siendo una constante de integración. También, la derivación de (20) arroja, después de cierta manipulación algebraica,

$$\begin{aligned} k_a \frac{u(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))}{c} - k_u \frac{c_u(q_2(t), \dot{q}_2(t))}{c}\dot{q}_2(t) \\ + k_u \frac{m_{au}(q_2(t))\beta(q_2(t), \dot{q}_2(t))}{c m^s_{uu}(q_2(t))} \\ - k_u \frac{m^2_{au}(q_2(t)) c_u(q_2(t), \dot{q}_2(t))\dot{q}_2(t)}{c^2 m^s_{uu}(q_2(t))} \\ + k_u \frac{m^2_{au}(q_2(t)) u(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))}{c^2 m^s_{uu}(q_2(t))} \equiv 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Ahora, $u$, como se define en (17), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} k_e u = -k_p y_d - k_I \Phi - k_D \left\{ -k_u \frac{c_u}{c}\dot{q}_2 + k_u \frac{m_{au}\beta}{m_{aa} m^s_{uu}} \right. \\ \left. - k_u \frac{m^2_{au} c_u \dot{q}_2}{m^2_{aa} m^s_{uu}} \right\} - k_a k_D \frac{u}{c} - k_u k_D \frac{m^2_{au} u}{m^2_{aa} m^s_{uu}}. \quad (23) \end{aligned}$$

Sustituyendo (20), (21) y (22) en (23) resulta, para trayectorias dentro de $\mathcal{S}$:

$$u(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) \equiv -\frac{k_I}{k_e}\tanh\left(C_1 - \kappa\right) \equiv C_2, \quad (24)$$

donde $C_2$ es alguna constante arbitraria. La ecuación (22) puede reagruparse como

$$\ddot{q}_1(t) \equiv \frac{k_a - k_u}{k_u c} C_2 \quad (25)$$

Integrando (25) dos veces con respecto al tiempo resulta

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &\equiv \frac{k_a - k_u}{k_u c} C_2 t + C_3, \\ q_1(t) &\equiv \frac{k_a - k_u}{2 k_u c} C_2 t^2 + C_3 t + C_4. \end{aligned}$$

con $C_3$ y $C_4$ siendo constantes de integración. Al haberse probado que el punto $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_d & \boldsymbol{0}_2^T\end{bmatrix}^T$ es un equilibrio estable, se puede afirmar que existe alguna $\delta > 0$ tal que si

$$\left\| \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^T(0) & \dot{\boldsymbol{q}}^T(0)\end{bmatrix}^T \right\| < \delta,$$

entonces $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^T(t) & \dot{\boldsymbol{q}}^T(t)\end{bmatrix}^T$ permanece acotado. Si $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^T(t) & \dot{\boldsymbol{q}}^T(t)\end{bmatrix}^T$ está acotado, esto implica que $q_1(t)$ no puede depender lineal o cuadráticamente del tiempo, por lo tanto $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, y

$$q_1(t) \equiv C_4 \Rightarrow \dot{q}_1(t) \equiv 0. \quad (26)$$

Sustituyendo $C_2 \equiv 0$ en (24) resulta en

$$C_1 \equiv \kappa. \quad (27)$$

Considerando (26), de la ecuación (20) se deduce que $\dot{q}_2 \equiv 0$ y $\ddot{q}_2 \equiv 0$. Analizando $\ddot{q}_2$ de (18) se obtiene que

$$-d\sin(q_2(t)) + e \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &\equiv \arcsin\left(\frac{e}{d}\right), \\ q_2(t) &\equiv q_2^*. \end{aligned}$$

Sustituyendo (27) y (III-B) en (21) resulta en $q_1(t) \equiv q_{1_d}$. Por lo tanto, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^T(t) & \dot{\boldsymbol{q}}(t)^T\end{bmatrix}^T \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_d & \boldsymbol{0}_2^T\end{bmatrix}^T$ es la única solución que permanece idénticamente en $\mathcal{S}$. Por lo tanto, se concluye que $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_d^T & \boldsymbol{0}_2^T\end{bmatrix}^T$ es un equilibrio asintóticamente estable de manera local del sistema en lazo cerrado (18).

## IV. Caso Experimental

Para evaluar el desempeño del controlador propuesto, se realizaron pruebas en tiempo real usando un prototipo de robot autobalanceable. El prototipo usado cuenta con dos microcontroladores cortex M4F corriendo a 180 MHz. El primer microcontrolador se encarga de procesar la información (velocidades angulares y aceleraciones) de una unidad de medición inercial MPU9250, a través de un filtro de Kalman, para estimar el angulo del cuerpo del robot con respecto al horizonte, calcular la ley de control, y almacenar las variables en una memoria microSD, con un perido de muestreo de 1 milisegundo; en el otro microcontrolador se ejecuta un control de corriente, empleando sensores de corriente ACS711EX y drivers tipo puentes H modelo VNH5019, para controlar el par entregado por los motores Maxon DC-max 22S con los que cuenta el prototipo, ademas de medir la posición angular de las ruedas por medio de los encoders de 4096 pulsos de revolución de cada motor, con un periodo de muestreo de 100 microsegundos.

El experimento se realizó sobre un plano con una inclinación de 4.7 grados. El objetivo de control es que el robot se desplace 50 centímetros en dirección de subida de la rampa. Numéricamente, este objetivo de control se puede expresar como $\boldsymbol{q}_d = [10.0\text{[radianes]} \;\; 0.076\text{[radianes]}]$. Cabe destacar que esta inclinación no es el límite para el cual puede funcionar el control propuesto y aún para vaalores menores o ligeramente mayores es posible asegurar el objetivo de control (14). Aún se trabaja en encontrar dicho límite de inclinación. Las ganancias usadas, que se obtuvieron de manera empírica, en los experimentos fueron:

Tabla II

Ganancias usadas en el experimento

| Ganancia | $k_a$ | $k_e$ | $k_u$ | $k_p$ | $k_I$ | $k_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 1.9 | 50.0 | -1050.0 | 0.1 | 50000.0 | 0.1 |

En las Figuras 3 a 5, que muestran los resultados de las pruebas experimentales, se observa que ambas articulaciones tienden a los valores deseados respectivos y en estado estacionario permanecen oscilando con muy poco rizo alrededor del valor deseado. La articulación $q_2$ oscila alrededor del valor deseado, con un valor rms del error de posición de 0.025 grados y un valor de pico a pico de 0.17 grados. Mientras tanto, la articulación $q_1$ oscila ligeramente por arriba del valor deseado, con valor rms para el error de posición de 6 milímetros, con un valor de pico a pico de las oscilaciones de 13 milímetros. Estas oscilaciones pueden atribuirse a errores paramétricos, especialmente en

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

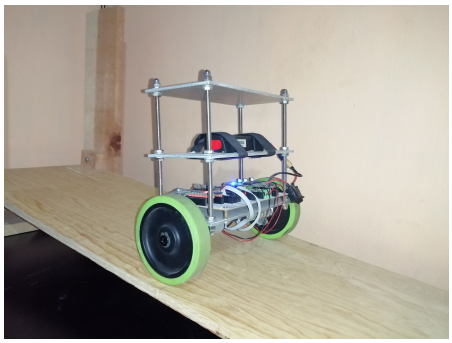


Fig. 2. Prototipo de robot autobalanceable.

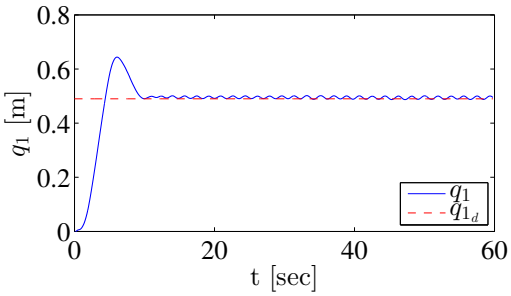



Fig. 3. Desplazamiento sobre la rampa

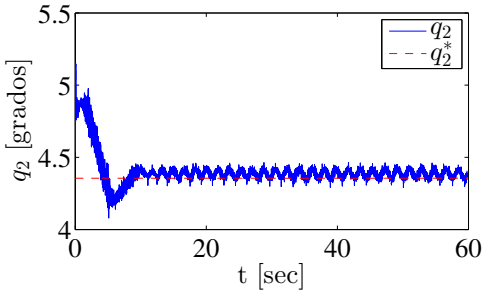



Fig. 4. Ángulo del cuerpo del robot

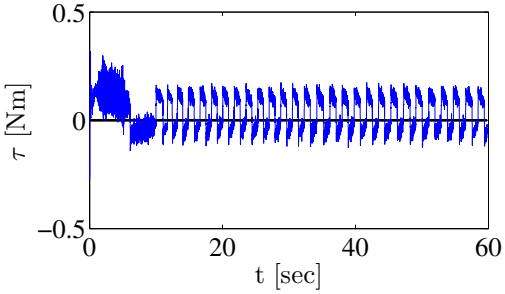



Fig. 5. Entrada de control

la posición del centro de gravedad del robot o a fenómenos no contemplados en el modelo, como el juego en las cajas de engranes de los motores.

## V. Conclusiones

Se ha presentado el diseño de un PID-PBC para la estabilización de un robot autobalanceable sobre un punto en una rampa de inclinación constante. También se ha mostrado en detalle análisis de estabilidad para probar el cumplimiento del objetivo de control, esto es, las articulaciones del robot autobalanceable tienden asintóticamente a la configuración deseada de manera local. Finalmente, los resultados experimentales en tiempo real obtenidos muestran el buen desempeño del controlador.

## Agradecimientos

Este proyecto ha sido parcialmente financiado por los proyectos TecNM, CONACyT 134534 y y CONACYT 166636.

## Referencias

[1] A. M. Bloch, D. E. Chang, N. E. Leonard, y J. E. Marsden, "Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. Potential shaping," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 10, pp. 1556–1571, Oct 2001.

[2] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gomez-Estern, y G. Blankenstein, "Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 8, pp. 1218–1233, Aug 2002.

[3] A. Donaire, R. Mehra, R. Ortega, S. Satpute, J. G. Romero, F. Kazi, y N. M. Singh, "Shaping the energy of mechanical systems without solving partial differential equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 4, pp. 1051–1056, Abr 2016.

[4] J. G. Romero, A. Donaire, R. Ortega, y P. Borja, "Global stabilisation of underactuated mechanical systems via pid passivity-based control," *Automatica*, vol. 96, pp. 178–185, 2018. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109818303327

[5] M. W. Spong, "Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems," en *Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS '94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on*, vol. 1, Sep 1994, pp. 314–321 vol. 1.

[6] J. G. Romero, R. Ortega, y A. Donaire, "Energy shaping of mechanical systems via pid control and extension to constant speed tracking," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 11, pp. 3551–3556, Nov 2016.

[7] J. X. Xu, Z. Q. Guo, y T. H. Lee, "Design and implementation of integral sliding-mode control on an underactuated two-wheeled mobile robot," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 7, pp. 3671–3681, Jul 2014.

[8] S. Kwon, S. Kim, y J. Yu, "Tilting-type balancing mobile robot platform for enhancing lateral stability," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 20, no. 3, pp. 1470–1481, Jun 2015.

[9] S. Yuan, G. Lei, y X. Bin, "Dynamic modeling and sliding mode controller design of a two-wheeled self-balancing robot," en *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Aug 2016, pp. 2437–2442.

[10] R. Sadeghian y M. T. Masoule, "An experimental study on the PID and Fuzzy-PID controllers on a designed two-wheeled self-balancing autonomous robot," en *4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*, Jan 2016, pp. 313–318.

[11] I. Gandarilla, V. Santibáñez, y J. Sandoval, "Control of a self-balancing robot with two degrees of freedom via ida-pbc," *ISA Transactions*, vol. 88, pp. 102–112, 2019.

[12] K. Hirata, M. Kamatani, y T. Murakami, "Advanced motion control of two-wheel wheelchair for slope environment," en *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Nov 2013, pp. 6436–6441.

[13] F. Dai, X. Gao, S. Jiang, Y. Liu, y J. Li, "A multi-dof two wheeled inverted pendulum robot climbing on a slope," en *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014)*, Dec 2014, pp. 1958–1963.

[14] D. Liang, N. Sun, Y. Wu, y Y. Fang, "Modeling and motion control of self-balance robots on the slope," en *31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, Nov 2016, pp. 93–98.

[15] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, ser. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

# Control del sistema doble integrador con variable de flujo acotada

Carlos Palafox, Ollin Peñaloza
*Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica*
*Instituto Tecnológico de Sonora*
5 de Febrero 818 Sur, 85000, Cd. Obregón, Sonora, México
carlos_palafox_10@hotmail.com
ollin.penaloza@itson.edu.mx

***Abstract*—En este trabajo se aborda el problema de control de seguimiento de trayectoria del sistema doble integrador sujeto a restricción en la variable de flujo. La solución propuesta consiste de una ley de control no lineal que incluye dos términos: uno para realizar el seguimiento y otro que mantiene la variable de flujo acotada a un valor deseado. Una característica de la propuesta es que, bajo ciertas condiciones, no es necesario tener acceso a la variable de flujo del sistema dado que ésta puede identificarse algebraicamente a partir del mapeo entrada-salida. Mediante herramientas de pasividad y teoría de Lyapunov, se muestra que el error de seguimiento es asintóticamente estable, mientras que la variable de flujo desarrollada permanece acotada. Se proporcionan simulaciones numéricas que muestran la efectividad del esquema de control propuesto.**

***Index Terms*—doble integrador; control de seguimiento; variable de flujo acotada.**

## I. Introducción

El doble integrador es un sistema fundamental de estudio en teoría de control debido a que su aplicación incluye diversas áreas de la ingeniería. También ha representado un sistema base, con condiciones ideales, para realizar el diseño de nuevos controladores mediante diferentes técnicas, así como su rediseño y aplicación a sistemas dinámicos más complejos. Un problema de control tradicional para el doble integrador consiste en la estabilización de la dinámica de error. La importancia del doble integrador y algunos esquemas de control para satisfacer diferentes objetivos se reportan en [1]. Algunas aplicaciones y problemas recientes del doble integrador incluyen la robótica de manipuladores [2], sistemas multiagente [3], la estabilización en tiempo finito [4], entre otros. Algunos tienen la característica de que el control depende del acceso a la variable de flujo, por lo que algunos trabajos han incluido alternativas para estimarla, como en [5].

Varios controladores para el doble integrador tienen la característica de que tanto la señal de control como la variable de flujo desarrollada por el sistema puedan alcanzar cualquier valor. Dado que en la práctica las señales están saturadas, el no tomar en cuenta explícitamente los límites físicos de estas señales en el propio diseño del control puede provocar en la práctica un deterioro severo del desempeño del sistema e incluso su inestabilidad. Por lo que la inclusión explícita de los límites físicos del sistema en el diseño del controlador atiende estos inconvenientes. Sin embargo, esta no es una tarea fácil ya que mientras más restricciones físicas se consideren, más complejo resulta el diseño del controlador. Algunos controladores para el doble integrador con entrada saturada se han reportado, recientemente, en [6]–[8]. El diseño de controladores para algunos sistemas mecánicos específicos, sujetos a restricciones simultáneas de par y velocidad, se reportan en [9] y [10], mientras que aquellos que consideran solamente restricciones de velocidad se reportan, por ejemplo, en [11]–[14]. Sin embargo, estos controladores requieren del acceso completo a los estados del sistema (en la práctica pueden no estar todos disponibles) y solo algunos permiten realizar seguimiento de trayectoria.

En este trabajo, se considera el problema de control de seguimiento de trayectoria del sistema doble integrador sujeto a restricción de la variable de flujo. La solución propuesta consiste de una ley de control que incluye dos términos: uno para realizar el seguimiento y otro que mantiene la variable de flujo acotada a un valor deseado. Una característica de la propuesta es que, bajo ciertas condiciones, no es necesario tener acceso a la variable de flujo del sistema dado que ésta puede identificarse algebráicamente a partir del mapeo entrada-salida. Mediante herramientas de pasividad y teoría de Lyapunov, se muestra que el error de seguimiento es globalmente asintóticamente estable, mientras que la variable de flujo desarrollada se mantiene dentro de los límites establecidos por el usuario. Mediante simulaciones numéricas, se muestra la efectividad del controlador propuesto.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. En la sección II se presenta la dinámica del sistema y el objetivo de control. La solución propuesta es descrita en la sección III, mientras que las simulaciones numéricas se proporcionan en la sección IV. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección V.

## II. Formulación del problema

### A. Dinámica del sistema

Considere la dinámica del doble integrador descrita por la ecuación

$$\ddot{q} = u, \tag{1}$$

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

donde las variables fundamentales del sistema son [15]: el desplazamiento $q \in \mathbb{R}$, el flujo $\dot{q} \in \mathbb{R}$ y el esfuerzo $u \in \mathbb{R}$. Además, $\dot{q} := \frac{d}{dt}q$ y $\ddot{q} := \frac{d}{dt}\dot{q} = \frac{d^2}{dt^2}q$. El sistema (1) puede verse como un caso simple de sistemas más complejos y las variables fundamentales adquieren diferentes nombres en distintas disciplinas de la ingeniería (e.g. en sistemas mecánicos simples, exhibiendo movimientos de traslación o rotación, el desplazamiento corresponde a la posición o posición angular, el flujo a la velocidad o velocidad angular y el esfuerzo a la fuerza o al par de torsión).

### B. Objetivo de control

Suponga que está disponible alguna trayectoria deseada que se quiere seguir $q_d \in \mathbb{R}, \mathcal{C}^2$, y defina los errores de seguimiento como

$$e = q_d - q, \tag{2}$$
$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}, \tag{3}$$
$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q}. \tag{4}$$

El problema a abordar consiste en diseñar la entrada $u$ del sistema (1), tal que se logre el seguimiento asintótico global a la referencia deseada mientras que el flujo máximo desarrollado no sobrepase una cota deseada $\overline{\dot{q}}$. Esto es, diseñar $u$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \tag{5}$$
$$\lim_{t\to\infty} \dot{e}(t) = 0, \tag{6}$$
$$|\dot{q}(t)| \leq \overline{\dot{q}}, \quad \forall \quad t \geq 0. \tag{7}$$

La cota $\overline{\dot{q}}$ para la variable de flujo es establecida libremente por el usuario al considerar

$$|\dot{q}_d(t)| + \epsilon \leq \overline{\dot{q}}, \quad \forall \quad t \geq 0 \tag{8}$$

donde $\epsilon$ es una constante positiva pequeña. Esta desigualdad se utiliza como criterio para asegurar que el movimiento del sistema pueda ser tan rápido como la referencia deseada, de manera que se pueda realizar el seguimiento de la trayectoria.

Con el fin de satisfacer (5)-(7), en este trabajo, se tendrán en cuenta las siguientes suposiciones.

*Suposición 1:* Para el sistema (1), la condición inicial del flujo es cero; es decir, $\dot{q}(0) = 0$.

*Suposición 2:* Para el diseño de $u$ en (1), solo se tiene acceso al desplazamiento $q$.

Al no tener acceso a la variable de flujo $\dot{q}$, se define $\hat{\dot{q}}$ como estimación de $\dot{q}$, por lo que el error de estimación es

$$\tilde{\dot{e}} = \dot{q} - \hat{\dot{q}}. \tag{9}$$

Note que, si uno es capaz de identificar la variable de flujo mediante $\hat{\dot{q}}$, para todo $t \geq 0$, entonces $\hat{\dot{q}}(t) = \dot{q}(t)$, por lo que $\tilde{\dot{e}}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. En este caso, (6)-(7) se pueden satisfacer teniendo la entrada de control $u$ dependiente solamente de $\hat{\dot{q}}$, en lugar de $\dot{q}$.

## III. Diseño del control

Se propone que la entrada de control $u$ sea de la forma

$$u = u_c - u_v, \tag{10}$$

donde $u_c$ es un término a diseñar para satisfacer (5)-(6), mientras que $u_v$ es un término a diseñar para satisfacer (7). Así, el primer término es permanente para asegurar el seguimiento asintótico de la referencia mientras que el segundo término es una corrección para mantener acotada la variable de flujo desarrollada. De esta forma, el sistema controlado siempre se encontrará bajo la acción de $u_c$ y, solo cuando sea necesario, estará también bajo la acción de $u_v$ (si la magnitud de la variable de flujo crece tan rápido para intentar sobrepasar la cota, la acción de $u_v$ debe ser tal que esto no ocurra).

Defina $u_c$ como

$$u_c = \ddot{q}_d - e_{u_c}, \tag{11}$$

donde $e_{u_c}$ es una entrada auxiliar aún por definir. Usando esta ecuación junto con (1), (4) y (10), se obtiene la dinámica

$$\ddot{e} = e_{u_c} + u_v, \tag{12}$$

que es la base para el diseño que sigue.

### A. Control de seguimiento sin medición de la variable de flujo

Para evitar tener acceso a la variable de flujo, integre (12) en el intervalo de tiempo de 0 a $t$ para obtener

$$\dot{e} = \int_0^t \big(e_{u_c}(\tau) + u_v(\tau)\big)d\tau + \dot{q}_{d0}, \tag{13}$$

donde la condición inicial del error de flujo corresponde a la condición inicial del flujo deseado al considerar la suposición 1; esto es, $\dot{e}(0) = \dot{q}_d(0) - \dot{q}(0) = \dot{q}_d(0) = \dot{q}_{d0}$. Tomando en cuenta (13), se propone que $e_{u_c}$ sea

$$e_{u_c} = -k_2\Big(\int_0^t \big(e_{u_c}(\tau) + u_v(\tau)\big)d\tau + \dot{q}_{d0}\Big) - k_1 e, \tag{14}$$

donde $k_1$ y $k_2$ son ganancias positivas a elegirse adecuadamente conforme al desempeño deseado. Note que la forma de (14) es del tipo proporcional generalizado (vea e.g. control GPI en [16]) y es equivalente, algebraicamente, a un PD, pero sin necesitar del acceso a $\dot{e}$.

Sustituyendo (14) en (12) se obtiene la dinámica de lazo cerrado

$$\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1 e = u_v. \tag{15}$$

Note que, si $u_v$ se diseña para mantener acotada la variable de flujo $\dot{q}$, y es tal que $-\dot{e}u_v \geq 0$ para todo $t \geq 0$, entonces, mediante herramientas de pasividad y teoría de Lyapunov, se puede demostrar que $(e, \dot{e}) = (0, 0)$, siendo punto de equilibrio de (15), es globalmente asintóticamente estable.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

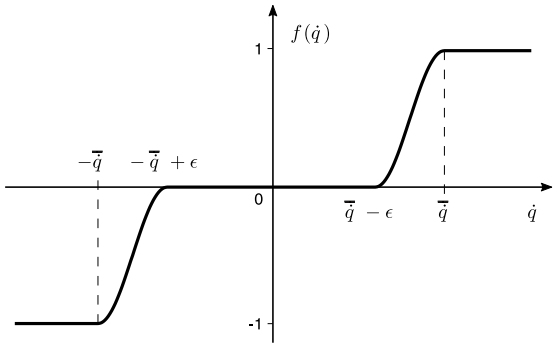



Fig. 1. Forma de la función no lineal propuesta $f(\dot{q})$.

### B. Identificación algebraica de la variable de flujo

Tomando en cuenta el error de flujo (3), el reconstructor integral (13) y el control (14), la variable de flujo puede obtenerse como $\dot{q} = \dot{q}_d + \frac{1}{k_2}\big(e_{u_c} + k_1 e\big)$. Dado que el lado derecho de esta ecuación contiene términos diseñados y conocidos, puede definirse entonces la estimación de la variable de flujo como

$$\hat{\dot{q}} = \dot{q}_d + \frac{1}{k_2}\big(e_{u_c} + k_1 e\big), \tag{16}$$

por lo que $\hat{\dot{q}} = \dot{q}$. Así, el error de estimación $\tilde{\dot{e}} = 0$ para todo $t \geq 0$

### C. Control de seguimiento con variable de flujo acotada

*1) Una función no lineal:* Similar a [13], se define una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ como

$$f(\dot{q}) = \begin{cases} -1 & \dot{q} < -\overline{\dot{q}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\big(\frac{\pi}{\epsilon}(\dot{q} + \overline{\dot{q}})\big) & -\overline{\dot{q}} \leq \dot{q} < -\overline{\dot{q}} + \epsilon \\ 0 & -\overline{\dot{q}} + \epsilon \leq \dot{q} \leq \overline{\dot{q}} - \epsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\big(\frac{\pi}{\epsilon}(\dot{q} - \overline{\dot{q}})\big) & \overline{\dot{q}} - \epsilon < \dot{q} \leq \overline{\dot{q}} \\ 1 & \dot{q} > \overline{\dot{q}} \end{cases} \tag{17}$$

Como se muestra en la figura 1, (17) es una función no lineal en el sector $[0, \infty]$. La forma de la función combina una zona muerta y una saturación, con un intervalo de transición suave definido por una constante positiva pequeña $\epsilon$. La función no lineal es continua por partes en $t$, continua en $\dot{q}$ y globalmente Lipschitz.

Considerando $f(\cdot)$, se definen los siguientes conjuntos complementarios.

$$\mathcal{Z} = \{\dot{q} \in \mathbb{R} : |\dot{q}| \leq \overline{\dot{q}} - \epsilon\}, \tag{18}$$

$$\mathcal{O} = \{\dot{q} \in \mathbb{R} : |\dot{q}| > \overline{\dot{q}}\}, \tag{19}$$

$$\mathcal{I} = \{\dot{q} \in \mathbb{R} : |\dot{q}| \in \{\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}\}\}. \tag{20}$$

*Observación 1:* La desigualdad (7) es equivalente a $\dot{q} \in \mathcal{I}$ para todo $t \geq 0$. La desigualdad (8) es equivalente a $\dot{q}_d \in \mathcal{Z}$ para todo $t \geq 0$.

*Observación 2:* La función no lineal $f(\cdot)$ es pasiva; esto es, $\dot{q} f(\dot{q}) \geq 0$ para todo $\dot{q}$. Equivalentemente, $f(\cdot)$ pertenece al sector $[0, \infty]$ (vea e.g. [17]).

TABLE I
NEGATIVIDAD DE $\dot{e} f(\dot{q})$.

| $\dot{q}$ | $\dot{q}_d$ | $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$ | $f(\dot{q})$ | $\dot{e} f(\dot{q})$ |
|---|---|---|---|---|
| - | - | + | - | - |
| - | + | + | - | - |
| + | - | - | + | - |
| + | + | - | + | - |

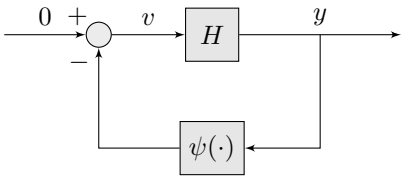



Fig. 2. Conexión negativa de $H$ y $\psi(\cdot)$.

*Proposición 1:* Considere el error de flujo $\dot{e}$, dado en (3), y la función $f(\dot{q})$, dada en (17). Entonces el mapeo entrada-salida $\dot{e} \mapsto -a f(\dot{q})$, con $a > 0$, es pasivo.

*Demostración*: El mapeo entrada-salida es pasivo si $-a\dot{e} f(\dot{q}) \geq 0$, o equivalentemente, $a\dot{e} f(\dot{q}) \leq 0$. Dos casos son posibles para la variable de flujo: ya sea que $\dot{q} \in \mathcal{Z}$ o que $\dot{q} \in \{\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}\}$. Para $\dot{q} \in \mathcal{Z}$, uno tiene que $f(\dot{q}) = 0$, que implica que $a\dot{e} f(\dot{q}) = 0$. Para $\dot{q} \in \{\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}\}$, uno tiene que $\dot{q} \neq 0$, de manera que $|\dot{q}| > |\dot{q}_d|$ (dado que $\dot{q}_d \in \mathcal{Z}$); entonces, considerando la tabla I, se tiene que $\dot{e} f(\dot{q}) < 0$. Dado que $a$ es positivo, se concluye, para los dos casos descritos, que $-a\dot{e} f(\dot{q}) \geq 0$, por lo que el mapeo es pasivo. ■

*Proposición 2:* Considere la dinámica del doble integrador (1) junto con la entrada de control (10), donde $u_c$ y $e_{u_c}$ se dan en (11) y (14), respectivamente. Defina $u_v$ como

$$u_v = a f(\hat{\dot{q}}), \tag{21}$$

donde $\hat{\dot{q}}$ y $f(\cdot)$ están dados en (16) y (17). Además, defina $a$ como

$$a = \lambda + |u_c|, \tag{22}$$

siendo $\lambda$ una ganancia a ser elegida. Entonces los objetivos (5)-(7) se satisfacen si $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $\lambda > 0$.

*Demostración*: Defina

$$\psi(t, \dot{e}) := -a f(\dot{q}_d - \dot{e}) = -a f(\hat{\dot{q}}) = -a f(\dot{q}), \tag{23}$$

y note que

$$\psi(t, \dot{e} = 0) = -a f(\dot{q}_d) = 0, \tag{24}$$

debido a que $\dot{q}_d \in \mathcal{Z}$ implica que $f(\dot{q}_d) = 0$ (vea la observación 1 y la definición de $f(\cdot)$ en (17)).

Substituya (11), (14) y (21) en (1), usando (10) y (23), para obtener

$$\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1 e = -\psi(t, \dot{e}), \tag{25}$$

con $(e,\, \dot{e}) = (0,\, 0)$ siendo un punto de equilibrio.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

*Seguimiento asintótico:* Como se muestra en la figura 2, la dinámica de lazo cerrado (25) puede verse como una estructura en conexión negativa del sistema $H$

$$H : \begin{cases} \ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1 e = v, \\ y = \dot{e}, \end{cases} \tag{26}$$

y la función no lineal $\psi(\cdot)$, dada en (23), junto con la conexión

$$v = -\psi(t, \dot{e}). \tag{27}$$

La función no lineal $\psi(\cdot)$ disipa el exceso de energía en el sistema para mantener acotada la variable de flujo. Así, dos casos son posibles, ya sea que $v = 0$ (la conexión se desconecta dado que la variable de flujo se encuentra dentro de los límites establecidos, particularmente cuando $\dot{q} \in \mathcal{Z}$) o que $v \neq 0$ (la conexión por retroalimentación negativa está activa dado que se necesita una acción correctiva para no permitir que la variable de flujo abandone el conjunto $\mathcal{I}$, si inicialmente se encontraba ahí, o que sea llevada a $\mathcal{I}$ si inicialmente no se encontraba ahí).

El sistema $H$ es estrictamente pasivo de salida con la función de almacenamiento de energía, definida positiva, radialmente desacotada, dada como

$$S(e, \dot{e}) = \frac{k_1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\dot{e}^2, \tag{28}$$

dado que su derivada temporal se escribe como

$$\dot{S}(e, \dot{e}) = -k_2\dot{e}^2 + \dot{e}v = -k_2 y^2 + yv. \tag{29}$$

En el caso en que $v = 0$, $y = 0 \Leftrightarrow \dot{e} = 0$ implica que $e = 0$, por lo que $H$ es observable de estado cero. Se sigue entonces que $(e, \dot{e}) = (0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable.

En otro caso, $v \neq 0 \Leftrightarrow \psi(t, \dot{e}) \neq 0$. Multiplicando $\psi(t, \dot{e})$ por $\dot{e}$, y considerando (23), así como la proposición 1, se tiene

$$\dot{e}\psi(t, \dot{e}) = -a\dot{e}f(\dot{q}) \geq 0, \tag{30}$$

que muestra la pasividad de $\psi(\cdot)$. Entonces,

$$yv = -\dot{e}\psi(t, \dot{e}) \leq 0, \tag{31}$$

y en (29) uno tiene

$$\dot{S}(e, \dot{e}) = -k_2\dot{e}^2 - \dot{e}\psi(t, \dot{e}) \leq -k_2\dot{e}^2. \tag{32}$$

Esto implica que $S(e, \dot{e})$ no se incrementa, que $e$ y $\dot{e}$ están acotados, y por lo tanto, $e_{u_c}$ y $u_c$, dados en (14) y (11), también lo están. Entonces, de (25), $\ddot{e} \in \mathcal{L}_\infty$, y de (32), $\dot{e} \in \mathcal{L}_2$, por lo que $\lim_{t\to\infty} \dot{e}(t) = 0$. Dado que $\dot{e} = 0$ implica en (25) que $e = 0$, se sigue que $(e, \dot{e}) = (0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable. Así, (5)-(6) se satisfacen.

*Variable de flujo acotada:* Defina

$$\sigma = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \bar{\dot{q}}^2) > 0 \quad \forall \quad \dot{q} \in \mathcal{O}. \tag{33}$$

y tome la derivada temporal a lo largo de (1), usando (10) y (21), para obtener

$$\dot{\sigma} = \dot{q}u_c - \dot{q}af(\dot{q}) = \dot{q}u_c - a|\dot{q}| = -(a - |u_c|)|\dot{q}|. \tag{34}$$

Usando (22), (34) se escribe como[1]

$$\dot{\sigma} = -\lambda|\dot{q}| < -\lambda\sqrt{\sigma}, \tag{35}$$

que implica que existe un tiempo finito $T > 0$ tal que $\lim_{t\to T} \sigma(t) = 0$ y $\sigma(t) = 0$ para todo $t \geq T$. Esto es, $\sigma = 0$ se alcanza en tiempo finito $T$, por lo que $\dot{q} = \bar{\dot{q}}$, y así $\dot{q} \in \mathcal{I}$. Note que, si $\dot{q} \in \mathcal{O}$, para $0 \leq t < T$, entonces $\dot{q} \in \mathcal{I}$ para $t \geq T$; si $\dot{q} \in \mathcal{I}$ para $0 \leq t < T$, entonces $\dot{q}$ no puede abandonar $\mathcal{I}$ para $t \geq T$. Por lo tanto, (35) implica que el conjunto $\mathcal{I}$ es atractivo y la variable de flujo está acotada, por lo que (7) es satisfecho. ■

## IV. Simulaciones numéricas

El propósito de esta sección es ilustrar el desempeño del controlador propuesto, descrito en la proposición 2, mediante la realización de simulaciones numéricas, usando un método de integración de Runge-Kutta con paso fijo de 1 [ms].

Primeramente, considere el sistema doble integrador (1) bajo la acción del control PD tradicional

$$u = \ddot{q}_d + k_2\dot{e} + k_1 e, \tag{36}$$

donde la trayectoria deseada a seguir está descrita como $q_d(t) = A\sin(\omega t)$, con $A = \pi/8$ y $\omega = 2\pi$. Las ganancias de control $k_1$ y $k_2$ se eligen para tener un tiempo de convergencia a la referencia de 0.25 [s], por lo que $k_1 = 1250$ y $k_2 = 75$. Las condiciones iniciales del sistema son $q(0) = 1$ y $\dot{q}(0) = 0$. La figura 3 muestra los resultados de simulación correspondientes, que son incluidos para tener una referencia para ilustrar el desempeño del controlador propuesto descrito en la proposición 2. En la figura 3, note que la convergencia a la referencia se logra en el tiempo deseado de 0.25 [s] mientras que la magnitud máxima desarrollada por la variable de flujo está alrededor de 10, que en realidad puede alcanzar cualquier valor, dado que el control PD no permite acotarla explícitamente. Por ejemplo, si para el sistema controlado se requiere que la magnitud de la variable de flujo desarrollada no sobrepase el límite de 3 manteniendo, tanto como sea posible, el tiempo de convergencia de 0.25 [s], es claro que el controlador PD (36) no permitirá al sistema exhibir este desempeño deseado. Note también que (36) requiere que la variable de flujo $\dot{q}$ esté disponible.

Ahora considere el controlador propuesto en la proposición 2, que se escribe como

$$\begin{aligned} u &= \ddot{q}_d - e_{u_c} - af(\hat{\dot{q}}), \\ e_{u_c} &= -k_2\Big(\int_0^t \big(e_{u_c}(\tau) + u_v(\tau)\big)d\tau + \dot{q}_{d0}\Big) - k_1 e, \end{aligned} \tag{37}$$

donde $\hat{\dot{q}}$ y $f(\cdot)$ están dados en (16) y (17), respectivamente. Note que este controlador no depende del acceso a la variable de flujo del sistema $\dot{q}$; en su lugar, depende de $\hat{\dot{q}}$, dado en (16). Considerando el desempeño de seguimiento deseado descrito previamente, pero ahora incluyendo restricción de la variable de flujo desarrollada a la cota deseada $\bar{\dot{q}} = 3$, se realizan simulaciones numéricas del sistema (1) bajo la acción del

[1] de (33), uno tiene $\sigma = \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}\bar{\dot{q}}^2 < \dot{q}^2 = ||\dot{q}||_2^2$. Así, $\sqrt{\sigma} < ||\dot{q}||_2 \leq ||\dot{q}||_1 = |\dot{q}|$. Entonces, $-\lambda\sqrt{\sigma} > -\lambda|\dot{q}|$, para $\lambda > 0$.

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

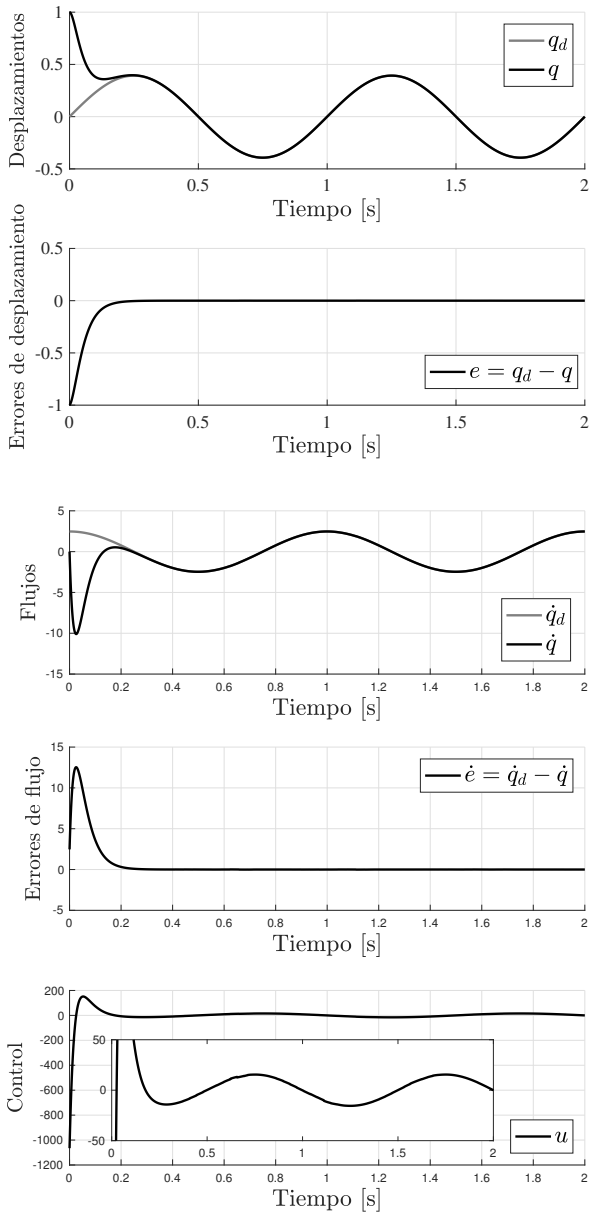



Fig. 3. Resultados de simulación para el sistema doble integrador (1) bajo la acción del control PD (36).

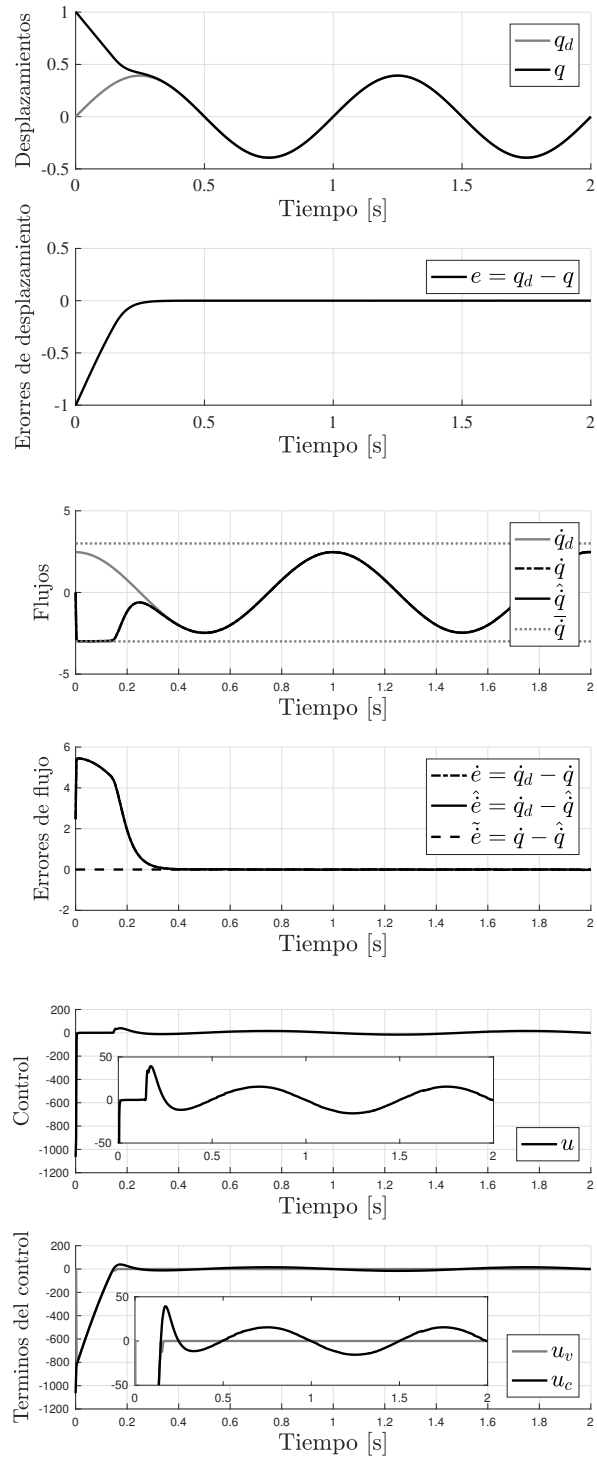



Fig. 4. Resultados de simulación para el sistema doble integrador (1) bajo la acción del control propuesto (37).

control propuesto (37), con $\lambda = 1$ y $\epsilon = 0.5$ . Los resultados de simulación se muestran en la figura 4, donde se muestra que el tiempo de convergencia a la referencia se mantiene alrededor de 0.25 [s], y que la variable de flujo desarrollada, en efecto, no sobrepasa el límite deseado $\bar{\dot{q}} = 3$. En las simulaciones, $\dot{q}$ se incluye solamente para mostrar qué tan bien ha sido su identificación mediante $\hat{\dot{q}}$; note que el error de estimación (9) es cero durante todo el tiempo que dura la simulación.

## V. Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de seguimiento de trayectorias para el sistema doble integrador sujeto a restricción de la variable de flujo. La solución propuesta consiste de una ley de control no lineal que incluye un término para realizar el seguimiento y otro que mantiene la variable de flujo desarrollada acotada a un valor deseado. La implementación del controlador diseñado no requiere del acceso a la vari-

TecNM-Instituto Tecnológico de Tijuana y Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC
XXII COMRob 2020, http://comrob.tijuana.tecnm.mx, ISBN: 978-607-98174-8-0
29 – 31 de Octubre, 2020,
Tijuana, Baja California, México

able de flujo del sistema, dado que ésta es algebraicamente identificada mediante el mapeo entrada-salida. La efectividad del controlador propuesto se ilustró mediante simulaciones numéricas, que fueron consistentes con los resultados teóricos desarrollados. El rediseño del controlador propuesto para su aplicación a una clase más amplia de sistemas dinámicos es un trabajo actualmente en curso.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor reconoce el apoyo económico brindado por el CONACyT México a través de la beca 726021.

## REFERENCES

[1] V. G. Rao and D. S. Bernstein, "Naive control of the double integrator," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, no. 5, pp. 86–97, 2001.

[2] C. Knoll and K. Röbenack, "Control of an underactuated manipulator using similarities to the double integrator," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 11 501 – 11 507, 2011, 18th IFAC World Congress. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016454637

[3] E. Garcia, Y. Cao, and D. W. Casbeer, "Decentralised event-triggered consensus of double integrator multi-agent systems with packet losses and communication delays," *IET Control Theory Applications*, vol. 10, no. 15, pp. 1835–1843, 2016.

[4] E. Bernuau, W. Perruquetti, D. Efimov, and E. Moulay, "Finite-time output stabilization of the double integrator," in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012, pp. 5906–5911.

[5] B. Tian, Z. Zuo, X. Yan, and H. Wang, "A fixed-time output feedback control scheme for double integrator systems," *Automatica*, vol. 80, pp. 17 – 24, 2017. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000510981730016X

[6] S. Ding and W. X. Zheng, "Robust control of multiple integrators subject to input saturation and disturbance," *International Journal of Control*, vol. 88, no. 4, pp. 844–856, 2015.

[7] M. Fehér, O. Straka, and V. Šmídl, "Constrained time-optimal control of double-integrator system and its application in MPC," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 783, p. 012024, jan 2017.

[8] H. J. Asl, T. Narikiyo, and M. Kawanishi, "Saturated input consensus algorithms for perturbed double-integrator systems without velocity measurements," *Systems and Control Letters*, vol. 133, p. 104528, 2019.

[9] K. Ngo and R. Mahony, "Bounded torque control for robot manipulators subject to joint velocity constraints," in *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, orlando, FL, USA, 2006.

[10] A. Salinas, R. Kelly, and J. Moreno-Valenzuela, "Position control under simultaneous limited torque and speed of a torque-driven nonlinear rotational mechanism," *Cogent Engineering*, vol. 3, p. 1192009, 2016.

[11] F. Garelli, L. Gracia, A. Sala, and P. Albertos, "Sliding mode speed auto-regulation technique for robotic tracking," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 59, no. 7, pp. 519–529, 2011.

[12] T. Jesus, L. Pimenta, Leonardo A.B., and E. Mendes, "Consensus for double-integrator dynamics with velocity constraints," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 930–938, 2014.

[13] O. Peñaloza-Mejía, L. Márquez-Martínez, J. Álvarez, M. Villarreal-Cervantes, and R. García-Hernández, "Motion control design for an omnidirectional mobile robot subject to velocity constraints," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 608015, p. 15, 2015.

[14] T. Liu, J. Qi, and Z.-P. Jiang, "Distributed containment control of multi-agent systems with velocity and acceleration saturations," *Automatica*, vol. 117, p. 108992, 2020.

[15] B. Fabien, *Analytical system dynamics: modeling and simulation*. Springer, 2009.

[16] H. Sira-Ramírez, "From flatness, gpi observers, gpi control and flat filters to observer-based adrc," *Control Theory and Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 249–260, 2018.

[17] H. Khalil, *Nonlinear control*. Pearson Education, 2015.